Koninklijke Akademie van Wetenschappen
te Amsterdam.

VERSLAG

VAN DE

GEWONE VERGADERINGEN

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van 28 Mei 1898 tot 22 April 1899.

DEEL VII.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
Mei 1899.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
van Zaterdag 28 Mei 1898.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren SURINGAR en J. C. KAPTEIJN dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 13 Mei 1898, inhoudende het bericht dat de keuze van de Heeren J. CARDINAAL, C. WINKLER, H. E. DE BRUIJN, P. ZEEMAN en F. A. F. C. WENT tot gewone leden, en van de Heeren ED. STRASBURGER te Bonn en SIMON NEWCOMB te Washington tot buitenlandsche leden door H. M. de Koningin-Weduwe-Regentes is bekrachtigd.

Van de Heeren STRASBURGER, WENT, WINKLER, ZEEMAN en DE BRUIJN zijn brieven ontvangen, waarin zij dankzeggen voor hunne benoeming.

De nieuwbenoemde gewone leden worden door de Heeren LOBRY DE BRUIJN en JAN DE VRIES binnengeleid, en door den Voorzitter verwelkomd.

3°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 30 April 1898, waarin bericht wordt dat de jaarlijksche subsidie ad f 500.— ten behoeve van de geologische commissie voor het houden van aanteekeningen van geologischen aard bij grondboringen en doorsnijdingen van den bodem van Nederland te rekenen van 1898, ten laste van het Departement van Waterstaat, Handel en Nijverheid zal komen en dat voor de uitbetaling door genoemden Minister zal worden zorggedragen.

4°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 7 Mei 1898 met verzoek om bericht op een begeleidend schrijven van zijn ambtgenoot van Buitenlandsche Zaken van 2 Mei 1898, waarbij deze doet toekomen een rapport over de tiendeelige indeeling van den tijd en van den cirkelomtrek, hem door den Franschen gezant overhandigd met het oog op de ter zaken in overweging genomen bijeenroeping van een internationaal congres.

De Fransche Regeering toch zoude er prijs op stellen te weten in hoeverre de geleerden in andere landen van Europa van oordeel zijn, dat dit vraagstuk rijp is om in een bijeenkomst van deskundigen met een praktisch doel te worden besproken.

Dit schrijven met de bijlagen wordt in handen gesteld van eene commissie bestaande uit de Heeren J. A. C. OUDEMANS, J. C. KAPTEIJN en VAN DE SANDE BAKHUIJZEN om advies.

5°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 16 Mei 1898, met verzoek om bericht of er Nederlandsche geleerden zijn, en zoo ja welke, bereid buiten bezwaar van 's Rijks Schatkist te worden afgevaardigd naar het op 25 September a. s. te Luik te houden Ve Congres voor hydrologie, climatologie en geologie. Aan dezen brief zijn verschillende programma's voor dat Congres toegevoegd.

Geen der leden stelt zich ter beschikking om naar dat Congres te worden afgevaardigd.

6°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 27 Mei 1898 met verzoek om bericht of er Nederlandsche geleerden zijn en zoo ja welke, bereid buiten bezwaar van 's Rijks Schatkist te worden afgevaardigd naar het van 28 Juli—2 Augustus 1898 te Weenen te houden IIIe Congres van toegepaste scheikunde.

Ook voor dat Congres stelt zich geen der leden ter beschikking. De Secretaris herinnert, dat naar het I^e Congres van toegepaste scheikunde, indertijd de Heer GUNNING is afgevaardigd. De Heer LOBRY DE BRUIJN spreekt het vermoeden uit, dat de Heer GUNNING

ook wel de Akademie op dat Congres zal hebben vertegenwoordigd, maar reeds door de Regeering in andere kwaliteit daarheen afgevaardigd zal zijn geworden.

De Heer J. A. C. OUDEMANS meent het te moeten uitspreken, dat het niet in het belang van ons land is, dat Nederland op deze en dergelijke congressen niet vertegenwoordigd wordt. In de bepaling dat zulks buiten bezwaar van 's Rijks schatkist zou moeten geschieden, zoekt hij de oorzaak dat slechts bij uitzondering een der Leden zich beschikbaar stelt. Hij acht het wenschelijk daarop den Minister te wijzen. De Voorzitter, ofschoon de meening van den Heer OUDEMANS beamende, meent dat, alvorens dit geschiede, de zaak in eene buitengewone vergadering zal dienen besproken te worden.

7°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 27 Mei 1898 met verzoek, namens de Commissie, ingesteld tot voorbereiding eener tentoonstelling van werken van SIMON STEVIN, welke in de tweede helft der maand Juli a.s. te 's Gravenhage zal worden gehouden, opgaaf te doen of de Akademie ook in het bezit is van handschriften, brieven, gedrukte stukken, medailles enz. die blijkens ex libris tot de bibliotheek van STEVIN behoord hebben.

De Voorzitter meent dat dit schrijven ook in de Letterkundige Afdeeling behoort gebracht te worden, en verzoekt den Heer KORTEWEG zich, met een eventueel in deze Afdeeling aan te wijzen Lid, te willen belasten met een onderzoek naar hetgeen in het bezit der Akademie is, ter zake dienende.

8°. Een gedrukte circulaire, uitnoodigende tot bijwoning van het 4e internationale Congres of Physiologists te Cambridge te houden van 23 tot 26 Augustus 1898. Ten vervolge op deze uitnoodiging is van den Heer LÉON FRÉDERICQ een circulaire ontvangen, inhoudende een nadere opgaaf betreffende reis- en verblijfkosten.

Daar deze circulaire niet van een afzonderlijk schrijven is vergezeld, meent de Heer STOKVIS, dat niet bedoeld is dat de Akademie zich zal doen vertegenwoordigen. De Heer HAMBURGER geeft zijn voornemen te kennen dat Congres te zullen bijwonen.

9°. Brief van den Heer L. VUYCK, conservator-bibliothecaris der Nederlandsche botanische Vereeniging, waarin dank wordt gezegd voor de toezending van het Verslag in zake de duinflora benevens de verzameling planten daarop betrekking hebbende.

10°. Brief van den Heer Dr. LAMBERT te Namen, gericht aan de Académie de Médecine de Hollande, waarin hij mededeeling doet van eene door hem gedane ontdekking over de behandeling der tuberculosis.

Dit schrijven was eerst in handen geweest van de Maatschappij

tot bevordering der Geneeskunst en is door deze Maatschappij naar de Akademie verwezen. De Voorzitter meent echter dat de Koninklijke Akademie van Wetenschappen zich niet als Académie de Médecine de Hollande kan beschouwen en de brief aan de Maatschappij ter bevordering der Geneeskunst behoort teruggezonden te worden.

11°. Brief van den Heer F. POMPE VAN MEERDERVOORT te Nijmegen, waarin hij aan de Akademie aanbiedt een opstel, getiteld: *Deeling van hoeken in drie, vijf en zeven gelijke deelen.* In handen gesteld van eene Commissie bestaande uit de Heeren KLUYVER en JAN DE VRIES.

De Heer MARTIN brengt het volgende verslag uit namens de Commissie in zake de Wereldtentoonstelling te Parijs in 1900.

De bizondere commissie voor groep XVII (Kolonisatie) van de Nederlandsche Afdeeling der Wereldtentoonstelling te Parijs in 1900 heeft zich bij circulaire van Januari 1898 tot de Akademie van Wetenschappen gewend met verzoek om medewerking ter bereiking van het wetenschappelijk doel dezer tentoonstelling.

Naar aanleiding daarvan benoemde onze Afdeeling eene Commissie, om na te gaan in hoeverre de leden der Afdeeling *individueel*, en misschien de Afdeeling *in haar geheel*, aan deze uitnoodiging zouden kunnen gevolg geven. Dezelfde circulaire kwam, als zijnde gericht tot de Akademie in haar geheel, ook in de Letterkundige Afdeeling ter tafel, die in hare zitting van 14 Februari aan de Commissie onzer Afdeeling vijf leden heeft toegevoegd, waaronder den Heer KERN als voorzitter.

Uwe Commissie heeft de eer naar aanleiding hiervan het volgende te berichten:

Het is zeker niet te betwijfelen, dat enkele leden der Afdeeling *individueel* tot het welslagen van het beoogde doel hunne krachtige medewerking zouden kunnen verleenen en dat zoodanige medewerking in hooge mate gewenscht is.

Het komt er toch op aan, om aan het buitenland te toonen, wat Nederland voor het wetenschappelijk onderzoek der koloniën heeft gedaan, en meer in het bizonder, in hoeverre de kennis dezer koloniën sedert 1883 is vermeerderd geworden — zulks in aansluiting aan de Nederlandsche Koloniale Tentoonstelling te Amsterdam. De Commissie is van oordeel, dat enkele leden er veel toe kunnen bijdragen, om een juist beeld te helpen geven van de wijze, waarop Nederland als koloniseerende macht ook op wetenschappelijk gebied werkzaam is geweest. Het zoude onder andere, om ons tot een enkel voorbeeld

te bepalen, wenschelijk wezen, om de groote geologische kaart van Java, door de Heeren Verbeek en Fennema vervaardigd, te Parijs ten toon te stellen; andere leden kunnen eveneens kaarten of geschriften, photografieën, reisroutes etc. inzenden en gedeeltelijk ook voorwerpen uit de onder hun beheer staande inrichtingen, voor zooverre die op de Nederlandsche koloniën betrekking hebben. Dat dit een goeden indruk op de bezoekers der tentoonstelling zal maken, valt wel niet te betwijfelen, al spreekt het van zelf, dat van zoodanige inzendingen geen direkt wetenschappelijk voordeel is te wachten.

Daarentegen is Uwe Commissie van oordeel, dat die Afdeeling *in haar geheel* moeilijk in staat kan worden geacht, om iets van beteekenis voor het doel der tentoonstelling te doen, aangezien in haar bezit noch verzamelingen noch geschriften van eenigszins grooteren omvang zijn, die op de koloniën betrekking hebben. De inzending van Hare Verslagen en Verhandelingen in haar geheel zoude immers niet aan het doel beantwoorden, en de enkele daarin voorkomende en voor de kennis van Indië belangrijke stukken zouden ook al weer gemakkelijk door de leden der Afdeeling *individueel* kunnen gezonden worden.

De voorzitter Uwer Commissie heeft zich ook in verbinding gesteld met den voorzitter der Commissie uit de Afdeeling Letterkunde, die eene gemeenschappelijke vergadering van de commissieleden der beide Afdeelingen onnoodig oordeelde en zich overigens met de boven weergegeven zienswijze Uwer Commissie ten volle kon vereenigen.

Wij hebben derhalve de eer aan de Afdeeling voor te stellen, om aan de Commissie voor groep XVII der Nederlandsche Afdeeling der Wereldtentoonstelling te berichten, dat de Wis- en Natuurkundige Afdeeling als zoodanig moeilijk voor het beoogde doel iets kan doen, daarbij echter den wensch uit te spreken, dat alle leden, die in staat mochten wezen, om individueel iets bij te dragen voor het welslagen der groep „Kolonisatie", dit zooveel mogelijk zullen doen ter handhaving van den goeden naam van Nederland als koloniseerende mogendheid.

Wij verzoeken tevens, dat aan de Commissie der Afdeeling Letterkunde hiervan kennis worde gegeven.

K. MARTIN.
A. A. W. HUBRECHT.
J. A. C. OUDEMANS.
V. A. JULIUS.
B. J. STOKVIS.

De conclusie van dit verslag wordt goedgekeurd.

Wiskunde. — De Heer P. H. SCHOUTE spreekt: „*Over de cyklographische ruimte-afbeelding der cirkels van* JOACHIMSTHAL" en biedt naar aanleiding hiervan de volgende mededeeling aan:

1. In zijn „Cyklographie" heeft Dr. W. FIEDLER een theorie ontwikkeld, waarbij een willekeurige cirkel in het platte vlak op de ruimte wordt afgebeeld door een der twee punten, die men verkrijgt door in het middelpunt van dien cirkel een loodlijn op het vlak op te richten en op deze loodlijn ter weerszijden van het middelpunt stukken gelijk aan den straal af te zetten. Van de dubbelzinnigheid dezer afbeelding kan bij het onderscheiden van in verschillenden zin doorloopen cirkels gebruik gemaakt worden. Dit is in het volgende echter niet noodig.

Volgens de FIEDLER'sche voorstelling beantwoordt aan het net van cirkels door een punt de omwentelingskegel met een rechten tophoek, die dit punt tot top, de loodlijn in dit punt op het vlak der cirkels tot as heeft. Met alle cirkels door twee punten komt op dezelfde wijs een gelijkzijdige hyperbool overeen gelegen in het vlak, dat den afstand der beide cirkelmiddelpunten loodrecht middendoordeelt; van deze hyperbool is de lijn in het vlak der cirkels de onbestaanbare as, het snijpunt van deze lijn met de verbindingslijn der middelpunten der cirkels het middelpunt en de loodlijn in dit punt op het vlak der cirkels de bestaanbare as. Of algemeener: met de cirkels van een bundel komt een gelijkzijdige hyperbool overeen, waarvan de bestaanbare of de onbestaanbare as loodrecht op het vlak der cirkels staat, naarmate de basispunten van den cirkelbundel bestaanbaar of onbestaanbaar zijn, en die ontaardt in twee rechten, als deze basispunten samenvallen. En met de cirkels van een algemeen net komt een gelijkzijdige omwentelingshyperboloïde met een of twee bladen overeen, naarmate de machtcirkel van het net al of niet bestaanbaar is.

De theorie van FIEDLER kan in sommige gevallen strekken reeksen van cirkels overzichtelijk voor te stellen. Zoo o. a. de cirkels, die een gegeven ellips ε dubbel aanraken. Stelt $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ de gegeven ellips voor, dan duiden de ellips $\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, $y=0$ en de hyperbool $-\frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$, $x=0$ de beide reeksen van dubbelrakende cirkels aan. Zooals zich gemakkelijk laat verklaren, gaan deze krommen door omkeering van het teeken van z^2 in de brandkrommen der gegeven ellips over.

We onderzoeken in de volgende regels door welk oppervlak het

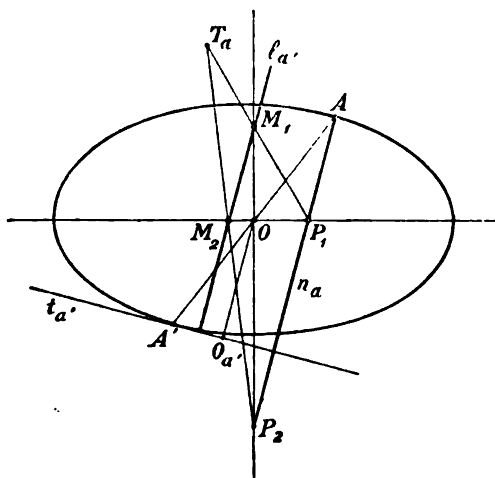
tweevoudig oneindige stelsel der cirkels van JOACHIMSTHAL van de gegeven ellips ε op de aangegeven wijs wordt afgebeeld.

2. Uit een willekeurig punt P in het vlak van ε kan men vier normalen op deze kromme neerlaten. De voetpunten A, B, C, D dezer normalen noemen we „conormaal". Verstaan we onder A' het diametraal tegenover A gelegen punt van ε, dan zegt de bekende stelling van JOACHIMSTHAL dus, dat A', B, C, D op een cirkel liggen als A, B, C, D conormaal zijn.

Deze niet omkeerbare stelling is door LAGUERRE aangevuld met de opmerking, dat de cirkel $A'BCD$ de raaklijn $t_{a'}$ in A' aan ε ten tweedenmale snijdt in het voetpunt $O_{a'}$ van de loodlijn uit het middelpunt O van ε op $t^{a'}$ neergelaten. Met andere woorden:

Doorloopt P de normaal n_a in A op ε, dan vormen de overeenkomstige cirkels $A'BCD$ een bundel met de basispunten A' en $O_{a'}$. Wijl deze bundel door een gelijkzijdige hyperbool wordt afgebeeld, is het gezochte oppervlak de meetkundige plaats van een enkelvoudig oneindig aantal gelijkzijdige hyperbolen. Voor we echter tot de bepaling van dit oppervlak overgaan, onderzoeken we eerst de verwantschap tusschen de punten P van de lijn n_a en de middelpunten M op de lijn $l_{a'}$, die den afstand $A'O_{a'}$ rechthoekig middendoordeelt, wat nader.

3. De punten P en M op de lijnen n_a en $l_{a'}$ komen één aan één met elkaar overeen; dus doorloopen ze projectieve puntenreeksen. Ligt P oneindig ver op n_a, dan doet M dit op $l_{a'}$. Dus hebben de projectieve puntenreeksen P en M het snijpunt harer dragers overeenkomstig gemeen en zijn zij perspectief verwant. Het centrum van perspectief wordt onmiddellijk gevonden als het snijpunt T_a der verbindingslijnen P_1M_1 en P_2M_2 (fig. 1) van overeenkomstige punten. Nu dit punt gevonden is, kan bij een willekeurig punt P van n_a het middelpunt van den overeenkomstigen cirkel van JOACHIMSTHAL worden aangewezen.



In stelkundig schrift wordt het bovenstaande als volgt verkort weergegeven. Zijn $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ de coördinaten van A, dan vindt men voor de rechten n_a, $l_{a'}$, P_1M_1, P_2M_2 achtereenvolgens de vergelijkingen:

$$n_a \ldots \frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2, \quad l_{a'} \ldots \frac{-2\,ax}{\cos\varphi} + \frac{2\,by}{\sin\varphi} = c^2 ,$$

$$P_1 M_1 \ldots \frac{ax}{\cos\varphi} + \frac{2\,by}{\sin\varphi} = c^2, \quad P_2 M_2 \ldots \frac{-2\,ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2 .$$

Derhalve heeft het centrum van perspectief T_a de coördinaten $-\frac{c^2}{a}\cos\varphi$, $\frac{c^2}{b}\sin\varphi$ en doorloopt dit punt bij verandering van φ de ellips ε', die de vier bestaanbare keerpunten van de ontwondene van ε tot toppen heeft. En de verbindingslijnen AT_a en $A'T_a$ omhullen dan weer ellipsen, enz.

4. Uit het eenvoudig verband tusschen de lijnen n_a en $l_{a'}$ blijkt onmiddellijk, dat de laatste een normaal is van de ellips $\frac{4\,x^2}{a^2} + \frac{4\,y^2}{b^2} = 1$ en er dus door een willekeurig gekozen punt M vier lijnen $l_{a'}$ gaan. Anders gezegd, elke loodlijn op het vlak der cirkels snijdt vier der gelijkzijdige hyperbolen en levert dus acht punten van de gezochte meetkundige plaats op. Wijl het aan deze loodlijnen gemeenschappelijke punt in het oneindige niet op een dier gelijkzijdige hyperbolen ligt, is het gezochte oppervlak dus van den achtsten graad. We bevestigen dit door er de vergelijking van op te maken.

De kegels, die achtereenvolgens de afbeelding vormen van alle cirkels door A' en alle cirkels door worden O , voorgesteld door

$$\left.\begin{array}{l} (x - a\cos\varphi)^2 + (y - b\sin\varphi)^2 = z^2 \\ \left(x - \dfrac{ab^2\cos\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\right)^2 + \left(y - \dfrac{a^2b\sin\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\right)^2 = z^2 \end{array}\right\} .$$

Dus duiden deze vergelijkingen samen de zich volgens $l_{a'}$ projecteerende gelijkzijdige hyperbool aan. Stelt men $x^2 + y^2 - z^2$ eenvoudigheidshalve door u^2 voor, dan herleiden ze zich tot

$$\left.\begin{array}{l} u^2 + b^2 + c^2\cos^2\varphi - 2\,ax\cos\varphi = 2\,by\sin\varphi \\ u^2(a^2 - c^2\cos^2\varphi) - 2\,ab^2x\cos\varphi + a^2b^2 = 2\,a^2by\sin\varphi \end{array}\right\} .$$

Dus geeft eliminatie van $\sin\varphi$, ter bepaling van $\cos\varphi$, de betrekking

$$\cos\varphi\,[(u^2 + a^2)\cos\varphi - 2\,ax] = 0 ,$$

wat zich splitst in

$$\cos\varphi = 0 , \qquad \cos\varphi = \frac{2\,ax}{u^2 + a^2} .$$

Wijl φ veranderlijk is, kan de eerste voorwaarde hier niet dienen. Trouwens zij beantwoordt hieraan, dat de beide kegels met de toppen A' en $O_{a'}$ samenvallen in plaats van samen een gelijkzijdige hyperbool te bepalen, als A' een der beide uiteinden is van de kleine as van ε; terwijl een andere behandeling, waarbij de rollen van $\cos\varphi$ en $\sin\varphi$ worden omgewisseld, tot de betrekking $\sin\varphi = 0$ voert, die evenzoo op het bij een der uiteinden van de groote as van ε voorkomende samenvallen der beide kegels doelt. Invoeging van de andere waarde voor $\cos\varphi$ in de eerste van het tweede paar kegelvergelijkingen levert dan voor de gezochte meetkundige plaats de vergelijking

$$\frac{4\,a^2\,x^2}{(u^2+a^2)^2} + \frac{4\,b^2\,y^2}{(u^2+b^2)^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

op, die werkelijk van den achtsten graad is.

Omgekeerd leiden we uit deze eenvoudige vergelijking gemakkelijk af, dat het door haar voorgestelde oppervlak door gelijkzijdige hyperbolen kan worden voortgebracht door haar te beschouwen als het resultaat der eliminatie van ψ uit de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} 2\,ax &= (u^2+a^2)\cos\psi \\ 2\,by &= (u^2+b^2)\sin\psi \end{aligned}\right\},$$

welke voor ψ standvastig een gelijkzijdige hyperbool voorstellen, die in het vlak

$$\frac{2\,ax}{\cos\psi} - \frac{2\,by}{\sin\psi} = c^2$$

gelegen is. Voor $\psi = \varphi \pm 180°$ gaat deze vergelijking in die van $l_{a'}$ over.

5. Van het gevonden oppervlak mogen hier enkele bijzonderheden worden aangewezen.

a. De doorsnee van den kegel $x^2+y^2-z^2=0$ met het vlak in het oneindige is viervoudige kromme van het oppervlak. Want invoeging van

$$x = p + z\cos\lambda\,, \qquad y = q + z\sin\lambda$$

in de vergelijking 1) doet voor z een vergelijking van den vierden graad vinden. Onder de voorwaarde

$$(p\cos\lambda + q\sin\lambda)^2 = a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda$$

verlaagt deze vergelijking haren graad tot drie, terwijl zij zelfs in een vierkantsvergelijking overgaat voor

$$p \cos \lambda + q \sin \lambda = 0.$$

Hieruit volgt, dat de vier raakvlakken in het oneindig ver gelegen punt $x = z \cos \lambda$, $y = z \sin \lambda$ voorgesteld zijn door

$$x \cos \lambda + y \sin \lambda - z = \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda}\,,$$
$$x \cos \lambda + y \sin \lambda - z = 0\,,$$

waarvan het laatste dubbel te tellen is. Door te zoeken, wat deze vlakken bij verandering van λ omhullen, vindt men, dat het oppervlak 1) in het oneindige wordt aangeraakt door het ontwikkelbaar oppervlak, dat omschreven is aan de schaar van kwadratische oppervlakken, waarvan de aangewezen viervoudige kromme en de ellips ε twee der vier afgeplatte ontaardingen zijn, en het aldaar bovendien wordt geosculeerd door den kegel $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Dus moet deze kegel het oppervlak 1) snijden volgens een ruimtekromme van den zestienden graad, waarvan de viervoudige kegelsnee van 1) zesmaal deel uitmaakt. De aanvullende kromme van den vierden graad ligt op den cylinder $\frac{4\,x^2}{a^2} + \frac{4\,y^2}{b^2} = 1$, waarin 1) overgaat voor $u^2 = 0$; dus snijdt deze cylinder het oppervlak 1) bovendien volgens een kromme van den twaalfden graad, enz.

b. De doorsnee van het oppervlak 1) met elk der beide vlakken ZOX, ZOY bestaat uit vier rechte lijnen en een dubbeltellende gelijkzijdige hyperbool. Zoo geeft $y = 0$ de vier lijnen $x \pm z = \pm a$ en de hyperbool $x^2 - z^2 + a^2 = 0$ en $x = 0$ de vier lijnen $y \pm z = \pm b$ en de hyperbool $y^2 - z^2 + b^2 = 0$. Dus bevat 1) behalve de viervoudige kegelsnee in het oneindige nog twee dubbelkegelsneden, terwijl er acht rechte lijnen op liggen, n.l. de vier lijnenparen, waarin de bij de toppen van ε behoorende gelijkzijdige hyperbolen ontaard zijn.

c. Het oppervlak bevat bovendien vier afzonderlijke kegelpunten nl. de vier toppen van ε. Door de coördinaatassen evenwijdig aan zich zelf naar een dezer punten te verplaatsen en de termen van den tweeden graad der nieuwe vergelijking nul te stellen vindt men de vergelijkingen der osculatiekegels in die punten.

d. De grens van projectie van het oppervlak op het vlak der cirkels wordt gevonden door z te elimineeren tusschen 1) en haar aan nul gelijk gestelde afgeleide naar z. Zij bestaat uit de doorsnee

van het oppervlak met het vlak der cirkels en de projectie eener ruimtekromme. De eerste is de meetkundige plaats van de achttallen van snijpunten der overeenkomstige cirkelparen van de twee cirkel-involuties

$$\left.\begin{aligned}(x \pm a \sec \lambda)^2 + y^2 = a^2\, tg^2\, \lambda \\ x^2 + (y \pm b \operatorname{cosec} \lambda)^2 = b^2 \cot^2 \lambda\end{aligned}\right\}$$

en als zoodanig dus een quadricirculaire kromme van den achtsten graad; buiten de in de toppen van s gelegen afzonderlijke dubbelpunten heeft zij geen bestaanbare punten. De tweede vindt men door eliminatie van u^2 uit 1) en haar afgeleide naar u^2, wat als we u^2 door v vervangen op het elimineeren van v uit

$$\frac{4\,a^2\,x^2}{(v + a^2)^2} + \frac{4\,b^2\,y^2}{(v + b^2)^2} = 1,$$

$$\frac{4\,a^2\,x^2}{v + a^2} + \frac{4\,b^2\,y^2}{v + b^2} = 2\,v + a^2 + b^2$$

neerkomt. Hieruit vindt men door oplossing

$$(v + a^2)^3 = 4\,a^2\,c^2\,x^2, \qquad (v + b^2)^3 = -\,4\,b^2\,c^2\,y^2$$

en dus na eliminatie van v

$$(2\,a\,x)^{\frac{2}{3}} + (2\,b\,y)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

d. i. de ontwondene van de ellips $\frac{4\,x^2}{a^2} + \frac{4\,y^2}{b^2} = 1$. Deze uitkomst was te voorzien. Want de loodlijn op het vlak der cirkels opgericht in een punt dezer ontwondene snijdt twee opvolgende gelijkzijdige hyperbolen en is dus raaklijn aan het oppervlak ter weerszijden van het vlak $X\,O\,Y$. De ruimtekromme van aanraking, waarvan de gevondene ontwondene de projectie is, is van den twaalfden graad. De cylinder van den zesden graad, waarvan deze ontwondene een rechte doorsnee is, snijdt het oppervlak 1) bovendien volgens een ruimtekromme van den vier-en-twintigsten graad.

6. Het gevonden beeldoppervlak 1) kan dienst doen bij verschillende onderzoekingen omtrent het stelsel S der cirkels van JOACHIMSTHAL. Zoo vindt men door het aantal snijpunten van dit oppervlak met een gelijkzijdige hyperbool, een parabool en een rechte lijn te bepalen, dat het stelsel S de kenmerkende getallen 4, 8, 16 heeft,

d. w. z. dat vier cirkels van S door twee gegeven punten gaan, acht cirkels van S door een gegeven punt gaan en een gegeven lijn aanraken, zestien cirkels van S twee gegeven lijnen aanraken. Zoo blijkt het stelsel S zestien cirkels te bevatten, die twee gegeven cirkels aanraken, enz.

7. Is in plaats van een ellips een parabool gegeven, dan gaan alle cirkels door drie conormale punten tevens door den top der parabool. Hier treedt voor het gevonden beeldoppervlak van den achtsten graad dus de kegel $x^2 + y^2 = z^2$ met den top der parabool $y^2 = 2px$ tot top in de plaats. En het geval van de hyperbool voert tot het oppervlak

$$\frac{4a^2 x^2}{(u^2 + a^2)^2} - \frac{4b^2 y^2}{(u^2 - b^2)^2} = 1$$

en is geheel analoog aan dat van de ellips.

Natuurkunde. — De Heer HAGA doet eene mededeeling namens Dr. C. H. WIND: „*Over helderheidsmaxima en -minima als gevolg van een gezichtsbedrog.*"

1. Wanneer van een vlak, waarop het oog is gevestigd, twee zones van onderling verschillende, doch elk op zich zelf gelijkmatige (objectieve) lichtsterkte zijn verbonden door een zone, waarvan de lichtsterkte doorloopend afneemt van die van de lichtste tot die van de donkerste zone, dan *schijnt* deze „overgangszone" van de lichtste zone te zijn gescheiden door een nog lichtere streep (helderheidsmaximum) en van de donkerste zone door een nog donkerder streep (helderheidsminimum).

2. Dit verschijnsel, dat zich overigens — gelijk uit het vervolg zal blijken — voordoet onder allerlei omstandigheden, heb ik voor het eerst waargenomen aan een door den Heer VAN GRIEKEN, firma VAN DE WEIJER alhier, op mijn verzoek en met zeer veel zorg en uitstekend succes langs lithografischen weg vervaardigde figuur. Deze figuur, waarvan fig. 1 een fotografische reproductie geeft, welke — hoewel niet goed geslaagd zijnde — toch nog eenigszins veroorlooft het verschijnsel waar te nemen, bestaat uit een groot aantal strepen van gelijke dikte, evenwijdig aan elkaar getrokken op afstanden van 1 m.M. in twee buitenzones, op afstanden van 0.4 m.M. in een middelzone, op doorloopend toenemende afstanden in de overgangszones tusschen de laatste en de twee eerstgenoemde. (De wet van toeneming van den onderlingen afstand der strepen is hier zoo gekozen, dat de dichtheid der streping lineair verandert in de overgangszone).

C. H. WIND. Over helderheidsmaxima en -minima als gevolg van een gezichtsbedrog.

Fig. 1.

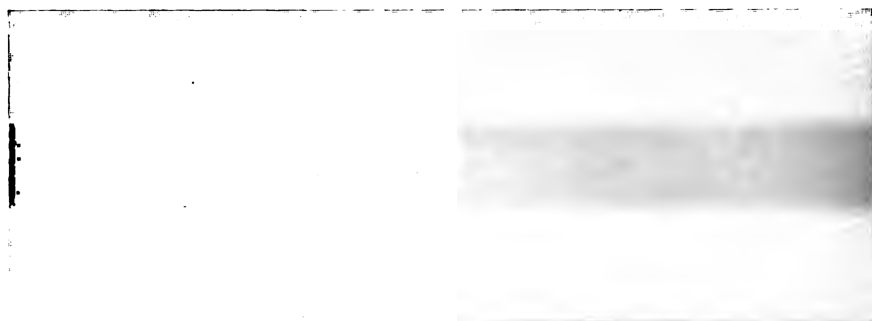


Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 5.



Fig. 6.



Fig. 7*a*.



Fig. 7*b*.



Fig. 8*a*.



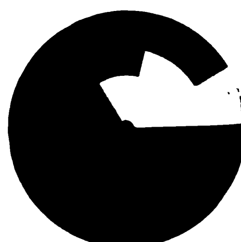
Fig. 9.



Fig. 10.



Fig. 8 *b*.



3. Duidelijker en op eenvoudiger wijze verkrijgt men het verschijnsel door, evenals in de physiologische leer van het licht zoo dikwijls geschiedt, gebruik te maken van draaiende schijven. Beplakt men een zwarte schijf met een stuk wit papier van geschikte begrenzing, dan kan men door de schijf zeer snel in haar vlak te laten ronddraaien een gewenschte *licht*verdeeling, waarbij de lichtsterkte van het beschouwde vlak slechts verschilt voor punten op verschillenden afstand van het draaiingsmiddelpunt gelegen, vergelijken met de daaraan beantwoordende waargenomen *helderheids*verdeeling. Ook kan men fotografieën van de schijven nemen, eenmaal terwijl zij in rust zijn, een andermaal terwijl zij worden rondgedraaid. De eerste fotografie levert dan een hulpfiguur, waaruit men de werkelijke lichtverdeeling op de door de tweede fotografie geleverde figuur kan leeren kennen.

De figuren 2, 3 en 4 stellen (op ± $1/_6$ der ware grootte) eenige der door mij gebruikte schijven voor; de begrenzingslijnen van het wit der schijven zijn daarbij, voorzoover het niet op het draaipunt toeloopende stralen zijn, bogen van Archimedische spiralen, bij welke — gelijk men weet — de veranderingen van den draaiingshoek en van de lengte van den voerstraal onderling evenredig zijn; bij snelle ronddraaiing van de door deze figuren voorgestelde schijven verkrijgt men dus, beantwoordende aan die gebogen begrenzingslijnen, overgangszones van lineair veranderde lichtsterkte. Vooral directe waarneming van deze schijven, terwijl zij worden rondgedraaid, doch ook beschouwing van naar de draaiende schijven vervaardigde fotografieën doet onmiddellijk de in 1. genoemde helderheids-maxima en -minima op de grenzen der overgangszones in het oog vallen. De figuren 5 en 6 zijn reproducties naar zulke fotografieën; fig. 5, behoorende bij fig. 3, geeft de bedoelde lichte en donkere strepen, hier cirkels, vrij duidelijk te zien, fig. 6, behoorende bij fig. 4, vertoont er nog een spoor van. De reproducties naar andere der door mij vervaardigde fotografieën zijn zoo slecht uitgevallen, dat zij moesten worden weggelaten; die, welke konden worden opgenomen, geven alle zonder uitzondering de verschijnselen, waarop het aankomt, op verre na niet zoo duidelijk te zien als de originalia [1]).

4. De vraag rijst, of dit optisch bedrog niet onder bekende verschijnselen is thuis te brengen. Zonder dat ik op deze vraag een beslist antwoord durf te geven, meen ik te dien opzichte melding te mogen maken van de volgende overwegingen.

Het is bekend, dat twee velden van verschillende lichtsterkte,

---

[1]) Prof. Haga heeft ter vergadering de door mij beschreven verschijnselen gedemonstreerd, zoowel met behulp van draaiende schijven als van daarnaar genomen fotografieën.

welke, onmiddellijk aan elkaar grenzende of zich op eenigen afstand van elkaar tegen een zelfden achtergrond bevindende, in een enkelen oogopslag worden beschouwd, een contrasteerenden invloed op elkaars waargenomen helderheid uitoefenen en wel in dien zin, dat het lichtere veld een vermindering van de helderheid van het andere teweegbrengt en omgekeerd. Verschillende psychologen, LEHMANN [1]), EBBINGHAUS [2]), HESS en PRETORI [3]), KIRSCHMANN [4]) e. a. hebben dit verschijnsel tot een punt van onderzoek gemaakt en reeds sommige regelmatigheden in zijn optreden aan het licht gebracht; de wetten, die het verschijnsel beheerschen, zijn nochtans ook door de zeer belangrijke onderzoekingen dier geleerden nog niet geheel volledig bekend geworden.

Nu ligt het voor de hand te vermoeden, dat de boven beschreven helderheidsmaxima en -minima kunnen worden teruggebracht tot de genoemde contrastwerkingen. Eenigszins vreemd kan het dan echter schijnen, dat (vgl. 5. sub 2°.) bij het verdwijnen van de overgangszone tusschen twee velden van gelijkmatige lichtsterkte volstrekt niet een versterking van de bedoelde strepen optreedt; men zou toch allicht verwachten, dat zich juist in dit geval aan de eene zijde der grens een sterk maximum, aan de andere zijde een sterk minimum zou vertoonen. Men ziet echter in dit geval elk der beide zones nagenoeg gelijkmatig helder (vgl. fig. 7*a*, welke de in fig. 7*b* in rust voorgestelde schijf bij draaiing afbeeldt), ofschoon niet te ontkennen valt, dat er in beide velden naar de zijde der grens flauwe helderheidsveranderingen in den te verwachten zin zijn te bespeuren. Dergelijke veranderingen komen iets duidelijker voor den dag in een zone van gelijkmatige lichtsterkte, welke aan de eene zijde door een lichtere, aan de andere zijde door een donkerder zone wordt begrensd — gelijk in fig. 8*a* (behoorende weer bij fig. 8*b*) voorkomt; doch moge ook al in dit geval de contrasteerende invloed van de naburige zones duidelijker zijn waar te nemen, het waargenomen verschijnsel blijft toch een geheel ander karakter vertoonen dan in het geval van de aanwezigheid van overgangszones.

5. Wij zullen over een mogelijke verklaring van het gezichtsbedrog aanstonds nog een enkel woord zeggen; vooraf is het echter noodig iets naders mee te deelen omtrent de omstandigheden, waaronder het optreedt en de wetten, waaraan het schijnt te gehoorzamen:

1° In het geval van een overgangszone van lineair veranderende lichtsterkte vertoonen zich het maximum en het minimum juist op

---

1) LEHMANN. Wundt's Philosophische Studien 3, S. 497, 1886.
2) EBBINGHAUS. Berl. Sitzungsber. 1887, S. 995.
3) HESS u. PRETORI. Von Graefe's Archiv f. Ophthalmologie 40, 4.
4) KIRSCHMANN. Wundt's Philosophische Studien 6, S. 417, 1891.

de grenzen der overgangszone; althans de afwijkingen, die er nog zouden kunnen zijn, schijnen binnen de fouten van de waarneming van de juiste plaats der strepen te vallen.

2⁰ Beschouwt men achtereenvolgens verschillende figuren, waarop een overgangszone voorkomt en welke alleen in dit opzicht verschillen, dat die overgangszone steeds smaller wordt, dan ziet men de lichte en de donkere streep steeds fijner worden, zonder dat deze strepen echter daarbij voortdurend aan duidelijkheid winnen; integendeel neemt bij zeer smalle overgangszones de duidelijkheid af en krijgt men daar meer en meer den indruk, alsof de steeds smaller wordende overgangszone ware een zone van nagenoeg constante lichtsterkte, naar beide zijden scherp afgegrensd tegen de naburige zones. (Het schijnt mij trouwens, dat men in 't algemeen geneigd is het middelste gedeelte eener overgangszone, zooals hier steeds wordt bedoeld, voor een zone van vrij wel gelijkmatige verlichting te houden).

Van dit verdwijnen van de strepen bij afnemende breedte der overgangszone, kan men zich o. a. zeer gemakkelijk overtuigen door het gat in het midden van de in fig. 7 *b* voorgestelde draaischijf, hetwelk dient om de schijf op de draaiingsas te bevestigen, in de richting van een der radiëele begrenzingen van het opgeplakte witte papier een weinig (b. v. $^1/_2$ cM.) te verlengen en nu aanvankelijk de schijf te laten draaien terwijl zij zooveel mogelijk excentrisch op de as is bevestigd, later bij telkens verminderde excentriciteit. Men krijgt op deze wijze steeds geringer breedte van de overgangszone, en de proef doet daarbij zeer duidelijk het zoo juist vermelde verdwijnen der strepen zien.

3⁰ De beide strepen treden niet alleen op, wanneer in de overgangszone de lichtsterkte *lineair* verandert in de richting loodrecht op de begrenzing der zone, doch ook bij geheel andere wetten van lichtsterkte-verandering; (dit kan reeds worden opgemaakt uit het feit, dat ook de fotografieën der draaiende schijven de strepen duidelijk vertoonen) zeer sterk b. v., wanneer de snelheid dezer verandering aan de lichtere grens oneindig groot is, om vandaar af eindig en steeds geringer te worden, totdat zij aan de andere grens een minimale (steeds eindige) grootte bereikt.

4⁰ Ook kunnen de strepen nog zeer duidelijk optreden, wanneer aan de grenzen der overgangszone de verandering van lichtsterkte doorloopend tot nul nadert.

5⁰ Eindelijk treden de strepen in sommige gevallen zelfs op, wanneer de zones van gelijkmatige lichtsterkte ter weerszijden van de overgangszone worden vervangen door zones van naar de over-

gangszone heen doorloopend af- resp. toenemende lichtsterkte. Het valt gemakkelijk te constateeren met behulp van een draaiende schijf, dat de helderheid ook dan nog tusschen de twee overgangszones twee maxima kan bezitten, gelijk in fig. 5, of twee minima, gelijk in fig. 6, wanneer de werkelijke lichtsterkte een flauw maximum, resp. een flauw minimum bezit in het midden tusschen de beide overgangszones.

6° Om nog eens terug te komen op de verklaring van het beschreven gezichtsbedrog, zoo schijnt het mij nog wel mogelijk, dat men die zal hebben te zoeken in de reeds in 4. genoemde contrastwerkingen, uitgaande b.v. van de onderstelling dat door elk element van het gezichtsveld in het algemeen een invloed wordt uitgeoefend op de waargenomen helderheid van elk bepaald beschouwd element van het gezichtsveld, een invloed, die dan op bepaalde wijze zal moeten afhangen van den afstand der beide elementen en van de lichtsterkte zoowel van het „induceerende" als van het „reageerende" element. Van dezen invloed zal men dan echter niet mogen aannemen — iets, waartoe men op het eerste gezicht wel zou kunnen geneigd zijn — dat hij steeds grooter wordt zoowel naarmate de afstand tusschen het induceerende en het reageerende element afneemt, alsook naarmate het verschil in lichtsterkte tusschen die beide elementen toeneemt. Met zulk een aard toch van dien invloed ware de in 5. sub 2° aangeduide eigenaardigheid van het optreden der strepen niet te rijmen. Trouwens de onderzoekingen van LEHMANN [1]) hebben reeds aan het licht gebracht, dat de contrastwerking een maximum bereikt bij een bepaalde waarde van de verhouding tusschen de lichtsterkten van het induceerende en het reageerende veld. Indien dit resultaat ook mag worden uitgebreid tot de contrastwerking tusschen twee willekeurige *elementen* van het gezichtsveld — waartegen wel geen bezwaar zal bestaan — en indien tevens uit verdere onderzoekingen mocht blijken, dat die „kritische" verhouding tusschen induceerende en reageerende lichtsterkte meer tot de eenheid nadert, naarmate de afstand der beide elementen geringer wordt, dan is het zeer goed denkbaar dat het hier beschreven gezichtsbedrog en de gewone contrastwerkingen onder dezelfde wetten zijn te brengen. Intusschen zouden nauwkeurige onderzoekingen, voornamelijk ook omtrent den invloed van den afstand tusschen twee contrasteerende velden op de grootte der contrastwerking, noodig zijn [2]), voordat men

---

[1]) LEHMANN l. c. S. 525.

[2]) KIRSCHMANN kondigt in zijn bovengenoemde verhandeling de aanstaande publicatie aan van reeds gedeeltelijk verrichte onderzoekingen over dien invloed van den afstand; doch het schijnt, dat die publicatie tot dusverre niet heeft plaats gehad.

tot een juiste formuleering van die wetten zou kunnen geraken.

7. Onder de methodes, door welke men het beschreven gezichtsbedrog kan teweeg brengen meen ik nog te moeten vermelden een zeer eenvoudigen weg, daarin bestaande, dat men een niet te nauwe spleet verlicht, den door die spleet doorgelaten lichtbundel laat vallen op een tweede spleet en eindelijk het daardoor heen gaande licht opvangt op een scherm. Neemt men de in de tweede plaats genoemde spleet *wijder* dan de eerste, dan zal op het scherm een middelste zone licht ontvangen van al de elementen der eerste spleet; zijdelings daarvan zullen zich overgangszones bevinden, welke van een steeds smaller wordend gedeelte der eerste spleet licht ontvangen, en daarop zullen weer volgen zones, welke door de spleet in 't geheel niet worden verlicht. Het lichtbeeld op het scherm vertoont dan buitengemeen fraai de in 1. genoemde heldere en donkere strepen. Ook op fotografieën, naar dat lichtbeeld vervaardigd, vallen die strepen onmiddellijk in het oog; de in fig. 9 geboden reproductie van zulk een fotografie vertoont ze eveneens, doch veel minder duidelijk.

Neemt men de tweede spleet niet al te weinig *nauwer* dan de eerste, zoo komt er wel geen strook op het scherm voor, welke door de geheele eerste spleet wordt verlicht, doch weer zal een middelste strook over haar geheele breedte maximaal verlicht worden; en ook verder krijgt het lichtbeeld op het scherm hetzelfde karakter als in het vorige geval. Ook kan men gemakkelijk, door de tweede spleet boven wijd en beneden nauw te nemen en dus schuin te laten toeloopen, op het scherm een lichtbeeld krijgen, waarop twee zoo goed als volkomen rechtlijnige heldere strepen voorkomen, die, parallel aan de randen der tweede spleet loopende, elkaar ergens snijden, doch zich ter weerszijden van dat kruispunt beide duidelijk voortzetten.

Laat men het van de eerste spleet komende licht op het scherm een schaduw werpen van een dunne naald of draad, dan verkrijgt men een schaduwbeeld met een middelzone van over haar geheele breedte gelijkmatig minimale lichtsterkte, opgevolgd door overgangszones van gelijkmatig toenemende lichtsterkte, welke weer naar buiten worden begrensd door gebieden van gelijkmatige maximale verlichting. De maxima en vooral de minima van helderheid, in 1. bedoeld, zijn hier weer zeer duidelijk te zien; zóó zelfs, dat men in sommige gevallen door het optreden der minima lichtelijk zou kunnen worden verleid tot het spreken van een verdubbeling van de schaduw der draad.

De diffractie speelt bij al deze gevallen, als de spleten wijd genoeg genomen worden, geen merkbare rol.

8. Laat men de eerste spleet bij de in het vorige nummer beschreven inrichting bestralen door een RÖNTGEN'sche buis in plaats van een lichtbron en vangt men de stralen niet op een scherm, doch op een gevoelige plaat op, dan krijgt men bij ontwikkeling negatieven, waarvan de positieve afdrukken volkomen overeen komen met de in 7. beschreven lichtbeelden. Fig. 10 geeft zulk een afdruk weer, betrekking hebbende op een soortgelijk geval als fig. 9.

Op fig. 10 ziet men een witten rechthoek over de figuur gedeeltelijk heengrijpende. Dit is verkregen door van het negatief, waarnaar de afdruk is gemaakt, een gedeelte met een stukje papier te bedekken tijdens het copieëren. Ik heb dit gedaan ten einde er op te kunnen wijzen, dat het wegnemen van de overgangszone — hetgeen hier op de bedoelde plaats althans voor het grootste gedeelte door dat stukje papier is geschied — voldoende is om de daarbij behoorende streep geheel te doen verdwijnen. Inderdaad ziet men langs het witte rechthoekje de heldere streep, die in de andere deelen der figuur, hoe onvolkomen deze ook is uitgevallen, toch nog wel te zien is, niet doorloopen, waardoor duidelijk de geheel fictieve aard van die streep aan den dag komt. Zelf kan men, ook bij fig. 9 b. v., de overeenkomstige proef doen door ergens de overgangszone (voor het grootste gedeelte) weg te nemen door een scherp afgesneden stukje papier. Dat het werkelijk het wegnemen van de overgangszone is, waardoor de streep daarbij verdwijnt, en niet b. v. door gewone contrastwerking ten gevolge van het overgeschoven stukje papier, blijkt o. a. daaruit, dat het verdwijnen van de streep even goed plaats grijpt, of men de overgangszone bedekt door een licht dan wel door een donker gekleurd stukje papier.

9. Mogen vooral de hier aangegeven methodes in staat zijn het beschreven gezichtsbedrog zeer duidelijk aan den dag te doen treden, zoo kan men het langs nog eenvoudiger weg toch ook dikwijls zeer goed waarnemen. Indien men zijn aandacht daarop vestigt, zal men in bijna alle gevallen, waarin men een kernschaduw begrensd ziet door een bijschaduw, een donkere en een lichte streep als onmiddellijke begrenzing van die bijschaduw waarnemen; men krijgt daarbij het gezichtsbedrog in al de boven beschreven variaties en nog meerdere terug.

10. Op zulke donkere en lichte strepen, optredende tegelijk met bijschaduwen, gelijk ook in 7. en 8. werden beschreven, heeft ook reeds SAGNAC gewezen. (Journal de Physique VI, p. 169, 1897). Uit de desbetreffende passage (p. 173) in zijn publicatie heb ik vroeger niet den indruk gekregen, dat hij die strepen slechts voor gezichtsbedrog hield, hoewel het mij thans zoo niet waarschijnlijk

dan toch wel mogelijk schijnt, dat dit het geval is geweest. Dat ik toch meen eenigszins uitvoerig mijne waarnemingen over dit punt te mogen meedeelen, ligt aan het niet geringe gewicht, dat m. i. aan het bedoelde gezichtsbedrog toekomt.

In de eerste plaats heeft het reeds meer dan eens natuurkundigen in den waan gebracht, dat zij diffractiestreepen of andere belangrijke strepen waarnamen in gevallen, dat er zeker geen reëele maxima of minima van lichtsterkte van eenige beteekenis aanwezig waren; in het bijzonder is het de oorzaak geweest van het waarnemen van donkere en lichte strepen in X-schaduwbeelden, wier waren aard men tot dusverre wel op verschillende wijzen heeft trachten te verklaren, doch nog niet volkomen afdoende had verklaard. (Bij een latere gelegenheid zal, naar ik hoop, op dit punt worden teruggekomen).

In de tweede plaats schijnt mij dit gezichtsbedrog onder omstandigheden te kunnen leiden tot waarneming van verdubbelingen van lichte of donkere strepen of banden, waar in werkelijkheid slechts een verbreeding dier strepen of banden plaats grijpt, gepaard gaande met een onscherp worden der randen (vgl. ook het in 5. sub 5° gezegde), iets wat o.a. kan voorkomen bij onnauwkeurige instelling (resp. accomodatie) van het optische stelsel, waarmee men die objecten beschouwt. Het is zelfs niet onmogelijk, dat reeds in sommige gevallen dit gezichtsbedrog moet worden aansprakelijk gesteld voor waargenomen verdubbelingen, die al of niet reeds een verklaring hebben gevonden.

In de derde plaats kan het gezichtsbedrog aanleiding geven tot een foutieve schatting omtrent de plaats der maxima en minima in een stelsel van lichte en donkere strepen, zoodra de lichtverdeeling in de nabijheid der strepen niet volkomen symmetrisch is met betrekking tot hunne middens.

In elk geval is zeker deze algemeene conclusie uit het voorafgaande gewettigd, dat men niet licht te veel kritiek kan oefenen bij het waarnemen van *helderheids*-maxima en -minima en men in vele gevallen zich zal hebben te overtuigen van het al of niet bestaan van daaraan beantwoordende maxima en minima van *lichtsterkte*.

Bacteriologie. — De heer BEIJERINCK doet eene mededeeling: „*Over zuurstofbehoefte bij obligaatanaëroben*".

De betrekking der levende cel tot de vrije zuurstof laat zich 't beste beoordeelen uit den invloed van dit gas op den groei en op de bewegelijkheid. Natuurlijk is alleen de eerste methode algemeen toepasselijk. Wat de bewegelijke mikroben betreft heb ik eenigen

tijd geleden den naam van „ademhalingsfiguren" gegeven [1]) aan de eigenaardige groepeeringen, welke in preparaten, voor het mikroskopeeren bestemd, ontstaan tengevolge van de toetreding van zuurstof langs den rand der onderzochte vloeistofdruppel en het verdwijnen daarvan in het midden van 't preparaat door de ademhaling. Daarbij laten zich drie typen onderscheiden al naarmate de mikroben de hoogste, een gemiddelde of de geringste zuurstofspanning in 't preparaat opzoeken en die ik aërobentype, spirillentype en anaërobentype heb genoemd.

Verder voortgezette onderzoekingen hebben geleerd, dat de anaërobentype, gekenmerkt door de ophooping der bewegende mikroben op die plaats van het preparaat, waar de zuurstofspanning 't geringste is, — gewoonlijk het midden, — alleen onder bijzondere omstandigheden zichtbaar wordt, maar als bijzondere type niet bestaat, en dat alle tot nu toe onderzochte obligaat-anaëroben, bij een juiste inrichting der proefneming, tot de spirillentype blijken te behooren, dat wil zeggen die plaatsen in het preparaat, waar nog een geringe zuurstofspanning bestaat niet alleen niet ontvlieden maar juist opzoeken. Deze voor de anaëroben weldadige zuurstofspanning is echter zeer gering, zoodat daarbij licht aan den rand van het preparaat meer zuurstof zal toetreden dan aan het zuurstofverbruik in het geheele preparaat beantwoordt, waardoor die spanning, welke het meest nabij de optimale komt in het midden zal heerschen. Juist in 't midden zal dan de ophooping der anaëroben plaats vinden en de schijn van een anaërobentype als afzonderlijk geval doen ontstaan. Het is duidelijk dat als deze voorstelling juist is bij rijkelijke zuurstoftoetreding de eigenlijke representanten van de tweede type, nl. de spirillen, ook tot een centrale ophooping, als waren het echte anaëroben, aanleiding moeten kunnen geven, en dit wordt ook werkelijk waargenomen, bijv. wanneer men slechts een matig getal spirillen in 't preparaat brengt, te weinig om al de toetredende zuurstof te absorbeeren.

Er is dus geen voldoende grond om de bewegelijke bacteriën naar hun verhouding tot vrije zuurstof in drie typen te verdeelen, gelijk ik dit vroeger gedaan heb, maar slechts in twee. Ook komt het mij voor, dat de door mij gekozen namen niet recht toepasselijk zijn en dat het beter is alle organismen, welke de hoogste zuurstofspanning opzoeken *aërophiel*, die welke aan een geringere spanning behoefte hebben *mikroaërophiel* te noemen. Tot deze laatste groep behooren dan de obligaatanaëroben en de aërobe spirillen. Ik ben verplicht hier van „aërobe-spirillen" te spreken, want ik heb vroeger aange-

[1]) Centralblatt für Bacteriologie Bd. 14, pag. 837, 1893.

toond, dat er ook een obligaatanaërobe spiril bestaat, nl. het organisme van de sulfaatreductie, *Spirillum desulfuricans.* Ofschoon deze laatstgenoemde soort snel bewegelijk is, is het mij niet gelukt daarvan genoeg materiaal bijeen te brengen om duidelijke ademhalingsfiguren te verkrijgen, — eene moeielijkheid, welke ook bij andere obligaatanaëroben in meer of minder mate bestaat.

De overtuiging van het feit, dat vrije zuurstof voor al wat leeft weldadig, waarschijnlijk op den duur noodzakelijk is, wordt verkregen door de waarneming van de betrekking van den groei der obligaatanaëroben tot dit gas, waarbij zoowel de bewegelijke als de niet bewegelijke vormen in aanmerking kunnen komen.

Eer ik echter de inrichting beschrijf van de proefnemingen, welke dienaangaande schijnen te beslissen, moet ik op de volgende omstandigheid opmerkzaam maken. Bij de alkoholgisten en de overige facultatiefanaëroben moet aangenomen worden, dat de mogelijkheid der anaërobiose daarbij bepaald wordt, door de aanwezigheid van een aan de cel gebonden zuurstofreserve, welke eenige celdeelingen ook zonder nieuw toetredende zuurstof mogelijk maakt. Dit zelfde schijnt voor de obligaatanaëroben te gelden, zoodat ook daarbij een zuurstofreserve over het getal celdeelingen, welke zonder aëratie mogelijk zijn, schijnt te beslissen. Er moet dus ook hier verschil zijn tusschen geaëreerde en niet geaëreerde cellen. Daar de zuurstofreserve in dit geval echter veel geringer moet wezen dan bij de biergist liet zich verwachten, dat hier meer ingrijpende maatregelen moeten getroffen worden om den zuurstofinvloed zichtbaar te doen worden. Hiertoe is het wenschelijk, wellicht in zekere gevallen zelfs noodzakelijk, het materiaal, dat voor de proefneming zal worden gebruikt te ontleenen aan kulturen, welke langdurig bij afsluiting van lucht zijn voortgezet en waarin de zuurstofreserve verminderd is. Sterk geaëreerde anaëroben zijn wat hun groei betreft voor zoover ik dit thans meen te kunnen beoordeelen aërophoob, d. i. zij groeien het beste daar waar de zuurstofspanning minimum of 0 is. Daar luchttoetreding zonder meer niet altijd voldoende is om tot aëratie aanleiding te geven, — sporen bijv. schijnen daarvoor minder geschikt dan vegetatieve cellen, — doen zich nu en dan verrassingen voor die het onderzoek bemoeielijken.

Wat nu de door mij gevolgde inrichting der groeiproeven betreft, deze is als volgt.

De te onderzoeken soort wordt na voorafgaande anaërobe kultuur, liefst als sporen in den kokenden stolbaren kultuurgrond gebracht en wel in zoo groot aantal, dat de kiemen, na zich tot koloniën ontwikkeld te hebben, dien grond sterk troebel en ondoorschijnend kunnen maken.

Bevindt zich een dergelijk materiaal, waaraan op een of andere wijze de vrije zuurstof volledig wordt onttrokken, in een diepe reageerbuis, waarin na het stollen de lucht alleen van boven toetreden kan, dan zal, indien de groei van de anaërobe door een bepaalde zuurstofspanning begunstigd wordt, juist ter plaatse van de optimale spanning een bacteriënniveau moeten ontstaan, waar de groei en dus de troebeling sterker is dan daarboven en daaronder.

De gemakkelijkste wijze om de zuurstof volledig te verwijderen is het gelijktijdig daarin uitzaaien van een aërophiele soort die niet storend werkt op de ontwikkeling en de waarneming van de anaërobe. Met 't oog daarop moet de aërophiele vooral aan de volgende eischen voldoen: de zuurstof moet volledig geabsorbeerd worden maar de daarmede gepaard gaande groei mag niet zoo sterk zijn, dat de troebeling van den kultuurgrond het zichtbaar worden der koloniën van de anaërobe onduidelijk maakt; bovendien moet een gemakkelijke herkenning in het mikroskopische preparaat en een eenvoudige scheiding van de aërobe en anaërobe mogelijk zijn. Bij het beproeven van allerlei mikrobensoorten is mij gebleken, dat sommige gistsoorten het meest aan 't doel beantwoorden, vooral bij het onderzoek der anaëroben van de eiwitrotting en de sulfaatreductie, omdat zij bij aanwezigheid van eiwitten of peptonen alléén, zonder koolhydraten, niet sterk groeien en mikroskopisch duidelijk herkenbaar zijn. Bovendien laten zij zich van de anaëroben der eiwitrotting gemakkelijk scheiden omdat de laatste sporen voortbrengen, welke op 90 à 100° C. kunnen verhit worden, waarbij de gist afsterft. Bij het onderzoek der anaëroben, welke de aanwezigheid van suiker in den voedingsbodem vereischen, bijv. de boterzuurfermenten, zijn blastomyceten, dat is niet gistende gistsoorten of niet sporenvormende aërobe bacteriën als zuurstofonttrekkers te verkiezen, voor zoover zij n.l. de gelatine niet doen versmelten en geen zure afscheidingsprodukten voortbrengen. Goede resultaten verkreeg ik met roode gist (uit tuinaarde afkomstig) en met *B. fluorescens* var. *liquefaciens*, welke aan de gestelde eischen voldoen.

Het is doelmatig (maar niet altijd noodzakelijk) de zoo voorbereide reageerbuizen in een exsiccator te plaatsen, welke gevacueerd wordt, waarvoor een waterstraalpomp met manometer voldoende is, zoodat tevens de luchtdrukking kan gemeten worden.

Een andere zeer geschikte wijze om den invloed van de zuurstof op den groei vast te stellen is het kultiveeren in de vochtige kamer op den objectdrager onder het dekglas in een niet te geringe hoeveelheid voedingsvloeistof, zonder dat het preparaat echter te dik wordt voor mikroskopie. Op deze wijze kan men in een en hetzelfde

preparaat eerst de ademhalingsfiguren en later den groei beoordeelen.

De door mij onderzochte anaëroben zijn de volgende.

Boterzuurferment (Granulobacter saccharobutyricum).

Deze anaërobe is uiterst algemeen in tuingrond. Geschikt materiaal voor het onderzoek der ademhalingsfiguren verkrijgt men op de volgende wijze. Water met een spoor kaliumphosphaat en magnesiumsulfaat en 5 à 10 pCt. glukose wordt in een kolfje opgekookt met zooveel fibrine, dat daardoor een dikke pap ontstaat. Tijdens het opkoken heeft infectie plaats met tuingrond, waarbij alleen bacteriënsporen levend blijven. In de broedstoof ontstaat nu eerst een aërobenvegetatie die door luchtonttrekking de boterzuurgisting inleidt. Soms ontstaat bij afwezigheid van aëroben, niettegenstaande de luchttoetreding in de fibrinemassa, toch boterzuurgisting. Is er eerst een aërobe opgekomen dan is overenting in een nieuwe kolf voldoende om deze aërobe te doen verdwijnen en ten slotte toch een nagenoeg reine boterzuurgisting te verkrijgen. Waren in 't infectiemateriaal zeer weinig sporen, dan kan een aërobe bacterie of een blastomyceet worden toegevoegd voor de zuurstofonttrekking.

Op deze wijze ontstaat een kultuur, welke alleen de „zuurstofvorm" van het boterzuurferment bevat, d. i. alleen bewegelijke staafjes en geen clostridiën. Hiermede kan een ademhalingsfiguur verkregen worden, welke uit een enkel fijn lijntje van snel bewegelijke staafjes bestaat op eenigen afstand van den dekglas- en meniskusrand van 't preparaat gelegen, die de mikroaërophilie buiten allen twijfel stelt.

Voegt men aan de gistende kolfjes zuiver caliumcarbonaat toe, dan wordt de groei der bacteriën door het neutraliseeren van 't zuur veel krachtiger, de staafjes maken plaats voor clostridiën, welke rijk zijn aan granulose en die ten slotte sporen voortbrengen. Hoezeer de troebeling door het krijt de zuiverheid der ademhalingsfiguren eenigszins benadeelt, laat zich toch ook met dit materiaal de beschreven proef met gelijk resultaat herhalen. Ook de clostridiën van het boterzuurferment zijn dus mikroaërophiel.

Met gekookte melk, welke in spontane boterzuurgisting was gekomen [1]), konden de beschreven waarnemingen eveneens gedaan worden. Dat ditzelfde geldt ten opzichte van 't vroeger door mij beschreven *butylferment* (*Granulobacter butylicum*) [2]) behoef ik hier

---

[1]) In niet al te ondiepe kolfjes kan gekookte melk somtijds in boterzuurgisting komen bij vrije luchttoetreding zonder de aanwezigheid van aëroben.

[2]) Daar het gebleken is dat deze bacterie veel meer normale propylalkohol dan butylalkohol voortbrengt, ware het beter geweest daaraan den naam van propylferment te geven.

wel nauwelijks aan toe te voegen, — juist door de voortgezette studie daarvan zijn de hier besproken verhoudingen voor mij helderder geworden.

Anaëroben van de eiwitrotting. De meest sprekende voorbeelden van obligaatanaëroben worden bij de rotting van pepton of, in 't algemeen van proteïnlichamen gevonden. Wenscht men de daarbij betrokken mikroben te isoleeren dan moeten afdoende maatregelen voor zuurstofonttrekking worden genomen en men overtuigt zich spoedig dat de hoeveelheden lucht, welke door deze fermenten kunnen verdragen worden zonder dat hun groei wordt benadeeld, zeker nog geringer moeten zijn dan bij 't boterzuurferment.

Hier vooral was dus de vraag of al of geen zuurstofbehoefte kon worden aangetoond belangrijk.

Vooraf een woord aangaande de verschillende soorten, welke bij de eiwitrotting betrokken zijn. Literatuur omtrent dit onderwerp bestaat zoo goed als in 't geheel niet.

Bacillus sputrificus coli van BIENSTOCK [1]) is een aërobe, die door niemand is teruggevonden en dus zeker niet typisch voor de eiwitrotting zijn kan. Bovendien leert reeds het nauwkeurig mikroskopisch onderzoek der preparaten, dat daarbij zeker meer dan één soort een hoofdrol speelt. Dat echter het getal typisch daarbij betrokken soorten zeer groot zou zijn, moet ik betwijfelen, en wel op den volgenden grond: Het verloop eener eiwitrotting is juist hetzelfde, wanneer het materiaal na infectie met tuinaarde vooraf kort verhit wordt op 90 à 100° C., als wanneer dit niet geschiedt. Hieruit volgt dat alleen sporenvormende mikroben typisch zijn voor het proces. Verder leert het onderzoek, dat luchtafsluiting eer gunstig dan nadeelig op het verloop der rotting werkt, zoodat alle aërobe mikroben daarbij onverschillig blijken te zijn, behalve voor zoover zij door zuurstofabsorptie de ontwikkeling der eigenlijke rottingsbacteriën begunstigen of mogelijk maken.

Door deze beide gegevens was het rottingsproces uit een bacteriologisch oogpunt zoozeer vereenvoudigd, dat er kans scheen de draden daarvan verder te ontwarren. Ofschoon ik daarin tot nu toe nog lang niet geheel geslaagd ben, meen ik toch reeds met eenige zekerheid het volgende te kunnen zeggen: Vooral drie soorten van obligaatanaëroben zijn bij de eiwitrotting betrokken, nl. vooreerst *Bacillus septicus*, ten tweede een groep van uiterst veranderlijke met de tetanusbacil verwante vormen, welke ik skatolbacteriën wil noemen, en ten derde een onbewegelijke, goed gekarakteriseerde soort, die ik

---

[1]) Zeitschrift für klinische Medicin, Bd. 8, pag. 1, 1884.

B. pseudopulcher noem. Voor de scheiding dezer soorten maakte ik gebruik van een kultuurgelatine van de volgende samenstelling: Gedestilleerd water, 10 pCt. gelatine, 3 pCt. pepton siccum, 0,05 pCt. dinatriumphosphaat, 0,05 pCt. magnesiumsulfaat en een gistsoort of een blastomyceet voor zuurstofonttrekking. In diepe reageerbuizen gebracht, ontwikkelen de anaëroben zich daarin ook bij vrije luchttoetreding.

B. septicus PASTEUR, is volgens mijn ondervinding een der meest verspreide bacteriënsoorten, overal aan te treffen waar dierlijke zelfstandigheden bederven en zeer algemeen in het stof en in den grond. Het is een goed kenbare en wel omschreven soort. Een virulente vorm ervan gaat in de duitsche literatuur onder den naam van *B. oedematis maligni* [1]). Het van de laatste in de laboratoriën voorkomende materiaal heb ik vergeleken, ook uit het oogpunt der zuurstofbehoefte, met de door mij bij herhaling geïsoleerde kultures van *B. septicus*, uit eiwit en fibrinrottingen, welke met tuinaarde geïnfecteerd waren, en geen verschil kunnen zien.

De skatolbacteriën zijn kenbaar aan de kogelronde sporen, welke in de opgezwollen uiteinden van dunne, meestal lange staafjes, in proteïnrottingen gevonden worden. Een der door mij geïsoleerde vormen behield ook in de reinkulturen aanvankelijk kogelronde sporen, terwijl bij andere isoleeringen de sporenvorm niet constant bleek te zijn. Ook de afmetingen der sporen en staafjes zijn uiterst variabel. Beweging is langzaam, in reinkulturen soms afwezig. Uit glukose ontstaan gistingsgassen. De koloniën doen kultuurgelatine meer verweeken dan vervloeien, zij zijn soms kleurloos, meestal echter door een bruinachtige aureool omgeven. De studie dezer soort is moeielijk wegens de groote veranderlijkheid in vorm en functies, die de proeven onzeker maakt en steeds aan infectie met verwante vormen doet denken, waartoe de algemeenheid daarvan in onze omgeving bijzondere aanleiding geeft.

Terwijl skatolbacteriën in rottende massa's nooit ontbreken, kan *B. septicus* daarin soms afwezig zijn en vervangen worden door de soort, welke ik *B. pseudopulcher* noem, wegens de gelijkenis ervan op een algemeene aërobe aardbacterie, die met *B. megatherium* verwant is en waaraan ik den naam *B. pulcher* geef [2]). Beweging wordt bij *pseudopulcher* nooit gezien; de sporen zijn langwerpig, grooter dan bij *B. septicus*, vaak in lange reeksen in de draden aan te treffen, meestal echter zitten zij in korte staafjes. De sterk vervloeiende

---

[1]) De door de medici aangenomen afzonderlijke soort *B. chauveaui* (der Franschen) of *B. emphysematos* (der Duitschers) is naar mijn gevoelen daarvan slechts een variëteit.

[2]) Tegenwoordig in den handel onder den naam van „alinit".

koloniën bezitten een gladde oppervlakte, waardoor zij gemakkelijk van *B. septicus* zijn te onderscheiden. Daarin vormt zich een zwaar bezinksel, dat uit staven en sporen bestaat. Dit bezinksel is anders of ontbreekt bij *B. septicus.* De reinkulturen ontwikkelen gassen maar niet veel stinkende produkten. In eiwit- of peptonhoudende massa's ontwaart men een duidelijke kaaslucht. De studie dezer bacterie is nog onvolledig en ik spreek er hier alleen over omdat zij met *B. septicus* verwisseld kan worden, zoolang men niet op haar aanwezigheid bedacht is.

Ik heb mij voor mijn doel vooral met *B. septicus* beziggehouden, omdat mij volstrekt geen aanwijzingen in de literatuur bekend zijn, welke daarbij aan zuurstofbehoefte doen denken. Bij de skatolbacteriën is dit laatste eigenlijk wel het geval, want zij zijn ongetwijfeld nauw verwant met de tetanusbacil en daarbij schijnen sommige schrijvers regelrecht aërobiose te hebben waargenomen. Bovendien is *B. septicus* een „goede soort", d. w. z. voor ieder herkenbaar.

B. septicus is sterk bewegelijk, bestaat meestal uit korte staafjes, die over de geheele oppervlakte met wimpers bezet zijn. Sporen, ontstaan uiterst gemakkelijk, vooral bij contact met lucht. Deze zijn meer langwerpig dan rond; zij zitten meestal in het eenigszins opgezwollen uiteinde der staafjes en zijn omgeven door een hof of holte. Hoezeer deze bacterie blijkbaar polair gebouwd is kan de bewegingsrichting hetzij met 't sporeneind of de staart vooruit zijn en plotseling omkeeren. Bij toetreding van een weinig lucht kunnen de staafjes tot lange draden uitgroeien en onbewegelijk worden; bij volledige zuurstofonttrekking is neiging tot clostridiumvorming zonder dat echter een scherp verschil ontstaat tusschen een „zuurstofvorm" en een „clostridiumvorm", zooals bij *Granulobacter butylicum.* Bij eiwit- of peptonvoeding ontstaan gistingsgassen, wier hoeveelheid door toevoeging van glukose eenigszins toeneemt. Uit fibrine en eiwit ontstaan vluchtige sulfiden, soms in groote hoeveelheid; ook merkaptanvorming vindt plaats onder niet nader bekende omstandigheden. De koloniën doen de kultuurgelatine van de bovengenoemde samenstelling vervloeien; hun oppervlakte is op een zeer karakteristieke wijze gepointeerd, blijkbaar doordat vele kleine uitloopers eenigszins in de gelatine indringen, eer het smelten begint, vergelijkbaar met wat bij anthrax wordt gezien, waar echter het smelten geheel uitblijft. Bij het uitzaaien zoowel van sporen als van vegatieve cellen komen meestal slechts zeer weinige kiemen tot ontwikkeling, de gebruikte voedingsmaterialen, — de gunstigste welke ik heb kunnen vinden, — werken dus in hooge mate „bactericid". De groei is zelfs bij broedtemperatuur langzaam, vergeleken met verwante aëroben.

Wat nu de zuurstofbehoefte betreft van *B. septicus* en de skatolbacterie, dienaangaande kon ik het volgende vaststellen.

B. septicus onderzocht ik zoowel wat betreft de ademhalingsfiguren als den groei. De mikroaërophilie liet zich volgens beide methoden met volkomen zekerheid vaststellen. Daar deze bacterie zeer sterk bewegelijk is en de sporen de bacteriënzwermen troebel en ondoorschijnend maken, is de waarneming der ademhalingsfiguren gemakkelijk. Een gering getal bacteriën vormen in de preparaten centrale opeenhoopingen en maken den indruk van aërophobie. Is echter het bacteriëngetal zeer groot dan ontstaat een kringvormige ophooping op eenigen afstand van den glasrand en den meniskus, de plaats aanwijzende, waar de zuurstofdruk optimum is. Onderzoekt men het veld binnen den bacteriënkring, dat is dus daar waar de zuurstof geheel ontbreekt, dan vindt men ook daar ter plaatse alles in beweging, maar deze beweging is veel langzamer, meer waggelend en onzeker dan in de randophooping, en ik heb den indruk gekregen, dat de aldaar aanwezige bacteriën aanhoudend vernieuwd worden door individuen uit de ophooping, en dat zij dan later weer naar de ophooping terugkeeren als ware het om een nieuwe zuurstoflading op te nemen. Buiten de ophooping, dus nabij den rand waar de zuurstofdruk toeneemt, neemt het getal bacteriën zeer snel af, eveneens de beweglijkheid der daar nog aanwezige. Dicht bij den rand is alles in volkomen rust, en de rustende individuen komen niet in beweging als hun omgeving zuurstofvrij wordt gemaakt. Ik heb echter geen reden om ze als dood te beschouwen en geloof zelfs, dat zij als zuurstoffilter dienst doen en daardoor de meer naar binnen geplaatste beschermen.

Brengt men in de preparaten, waaraan de ademhalingsfiguren bestudeerd worden, eenige fibrinkorreltjes en plaatst ze bij kamertemperatuur in een vochtige ruimte, dan kan daarin gemakkelijk een zeer belangrijke vermeerdering der bacteriën plaats vinden. Volgt men daarbij den gang mikroskopisch en makroskopisch, dan blijkt de groei bijna uitsluitend tot de randophooping bepaald te blijven, die vooral door de sporenvorming dichter en dichter wordt, terwijl het middelgedeelte even helder blijft als in den aanvang. Ook wat den groei betreft beschouw ik daarom de zuurstofbehoefte van *B. septicus* als bewezen.

Bij deze gelegenheid wensch ik een fout te herstellen, die ik gemaakt heb bij gelegenheid van mijn beschrijvingen van *Spirillum desulfuricans*. Ik heb geheel ten onrechte gezegd [1]), dat *Spirillum*

[1]) Archives Neerlandaises. T. 29, pag. 272.

tenue, die de type is voor mikroaërophilie wat de bewegelijkheid betreft, ook uit het oogpunt van den groei mikroaërophiel is en dus in een geschikten kultuurgrond uitgezaaid niet aan de oppervlakte, maar op zekeren afstand daarvan maximum groei vertoont. Dit is gebleken op trophotropie te berusten en slechts dan voor te komen, wanneer het uitzaaien in ongunstige kultuurgronden heeft plaats gehad, die spoedig zijn uitgeput, en moet juist door de aërophilie verklaard worden. Hierdoor toch zal de groei aan de oppervlakte tot een snelle uitputting aanleiding geven. Indien nu het voedsel niet rijkelijk voorhanden is en slechts langzaam uit de diepte naar de plaats van verbruik toe diffundeert, dan zal niet de oppervlakte zelve, maar een dieper gelegen laag, onder den gezamenlijken invloed van zuurstof en van voedsel het meest gunstig voor den groei en vermenigvuldiging geplaatst zijn. Feitelijk is *Spirillum tenue* dus aërophiel wat betreft den groei, en mikroaërophiel wat betreft de bewegelijkheid.

Naast deze eigenaardige vorm van trophotropie bij den groei, moet men ook bij de studie der ademhalingsfiguren bedacht zijn op een geheel overeenkomstig verschijnsel, dat trophotaxis kan worden genoemd en niet tot groei maar tot ophooping van de bewegelijke mikroben aanleiding geeft, welke door het voedsel meer worden aangetrokken dan door de zuurstof. Ik heb dit inderdaad waargenomen bij een aërobe soort, die ik *Bacillus perlibratus* heb genoemd en waarbij de trophotaxis zoo sterk kan worden, dat daardoor mikroaërophilie wordt nagebootst en door mij ook verkeerdelijk als zoodanig is beschreven [2]). Bij overmaat van voedsel is echter van deze verschijnselen niets te zien, waardoor bij aandachtige waarneming mikroaërophilie steeds scherp te herkennen is.

Ik keer nu terug tot de anaëroben der eiwitrotting en wel tot de tweede daarbij in aanmerking komende vorm, de skatolbacterie. Ik onderzocht van deze polymorphe soort een zeer na met tetanus verwante bacil, die streng anaërobie is en wellicht als de meest karakteristieke rottingsbacterie moet beschouwd worden. Ik heb verschillende ondervaräiteiten daarvan geisoleerd en door middel van groeiproeven de mikroaërophilie kunnen vaststellen; de bewegelijkheid was bij mijne variëteiten te gering om voor ademhalingsfiguren in aanmerking te kunnen komen. Bij het gebruik van de bovengenoemde peptongelatine als voedingsbodem en van *Saccharomyses apiculatus* voor zuurstofabsorptie, heb ik zeer overtuigende, lichtbruin gekleurde niveau's met belangrijken groei

---

[2]) Centralblatt für Bacteriologie, Bd. 14, pag. 839, 1893.

in diepe reageerbuizen zien ontstaan, op zekeren afstand van de oppervlakte, terwijl juist in deze oppervlakte zelve de doorschijnende, waterheldere koloniën der apiculatusgist tot sterke ontwikkeling waren gekomen. Naarmate dit niveau zich meer en meer met sporen aanvulde, ging daarmede een verweeking en ten slotte een vervloeiing van de gelatine gepaard; deze vervloeiing werd in de diepte eerst veel later, aan de oppervlakte in 't geheel niet merkbaar.

Ik wil dit overzicht der door mij bestudeerde obligaatanaëroben eindigen met de opmerking, dat ook bij *Spirillum desulfuricans*, die in tegenstelling tot *S. tenue*, streng anaërobe is en tot een geheel andere groep behoort dan de boterzuurfermenten en de rottingsbacteriën, hetgeen zoowel uit de vibrio- (of spiril)vorm als uit het gemis aan sporen duidelijk is [1]), door groeiproeven in pepton gelatine met Mohr'szout en een aërobe waterbacterie (*B. termo*) voor zuurstofabsorptie in diepe reageerbuizen mikroaërophilie kon worden aangetoond. Deze werd zichtbaar doordat een zwart niveau van zwavelijzer het eerst op eenigen afstand onder de oppervlakte ontstond, en dat zich vandaar eerst langzamerhand naar de diepte en ook naar boven uitbreidde. Bij 't mikroskopisch onderzoek bleek dit niveau ook het rijkste aan reduceerende spirillen te zijn, zoodat blijkbaar niet de reductiefunctie op zich zelve, maar de bacteriëngroei door de aldaar heerschende geringe zuurstofspanning begunstigd wordt.

Hier schijnt de plaats te zijn nog enkele opmerkingen te maken ten aanzien van de verhouding der facultatiefanaëroben tot de vrije zuurstof. Het volgende is mij dienaangaande gebleken. Verreweg het meerendeel der facultatieven is aërophiel. Als voorbeelden noem ik *Mucor racemosus*, alle alkoholgisten, *Bacterium coli commune*, *B. lactis aërogenus*, *Granulobacter polymyxa*, *B. prodigiosus*, de tuberkelbacil [2]). Is de vorming der ademhalingsfiguren mogelijk, dan is daarin vooral bij de gistende soorten, zooals *coli* en *aërogenes*, en ook soms bij niet gistende, zooals de tuberkelbacil, de breedte van de bewegende bacteriënzone zelfs in zeer dichte bacteriënzwermen groot, hetgeen wijst op een langzaam zuurstofverbruik.

Mikroaërophiel zijn onder de facultatieven, voorzoover ik dit thans meen te kunnen beoordeelen, alleen de echte melkzuurfermenten,

---

[1]) Naar ik meen tot nu toe het eenige goed beschreven voorbeeld van een sporenvrije obligaatanaërobe.

[2]) De bewegelijkheid van de tuberkelbacil is 't eerst waargenomen door den Heer Mac Gillavry. Ademhalingsfiguren ontstaan moeielijk en alleen met zeer jonge kulturen, bijv. van vleeschagar, niet ouder dan 24 uur.

welke tot twee groepen kunnen gebracht worden, waarvan de meest belangrijke representanten zijn *Bacterium lactis* (uit karnemelk) en *Bacillus longus* (uit kaas en uit de gistindustrie). Daar deze vormen onbewegelijk zijn en slechts zeer weinig materiaal bij het groeien voortbrengen, is de proefneming daarmede moeilijk en aan eenigen twijfel onderhevig. Zaait men echter in een geschikten vasten kultuurgrond, welke door calciumcarbonaat troebel is gemaakt, in een diepe reageerbuis, dan kan men zich onder gunstige omstandigheden overtuigen, dat op zekere diepte onder het oppervlak de zuurvorming het krachtigst is, en dat dit berust op het daar ter plaatse aanwezig zijn van een buitengewoon bacteriënrijk niveau. Weldra ontstaan echter ook vele koloniën aan de oppervlakte en in de diepte, waardoor de mikroaërophilie onduidelijk wordt, zonder evenwel in aërophilie over te gaan.

Resumeerende en onder toevoeging van eenige nog niet genoemde voorbeelden, kom ik tot de volgende slotsom.

Aërophiel zijn: Alle aërobe bacteriën uitgezonderd de spirillen, de meeste facultatiefanaëroben, waarschijnlijk alle weefselcellen van hoogere dieren en planten, de meeste infusoriën.

Mikroaërophiel zijn: De weinige tot nu toe onderzochte obligaatanaëroben, waartoe ook de chromatiën en andere zwavelbacteriën behooren, alsmede *Spirillum desulfuricans*, van de facultatieven waarschijnlijk alle melkzuurfermenten; eindelijk sommige (wellicht vele) soorten van monaden en enkele infusoriën.

Aërophiel ten opzichte van den groei, *mikroaërophiel ten opzichte van de beweging zijn*: De meeste echte spirillen, wellicht ook sommige monaden.

Ofschoon het niemand verwonderen zal, dat ik op grond van het voorgaande geloof, dat alle levende organismen, welke wij thans kennen vrije zuurstof voor hun voortbestaan vereischen, is het ver van mij om aan te nemen, dat ik daarvan het volledig bewijs heb geleverd. Zelfs kan gevraagd worden of ik wel het recht heb in den titel van dit opstel van „zuurstofbehoefte" te spreken, en of ik mij niet tot de uitdrukking „zuurstofverbruik" had moeten bepalen?

Ten opzichte van de onderzochte obligaatanaëroben heb ik alleen aangetoond, dat sporen van vrije zuurstof hun groei en bewegelijkheid bevorderen, maar nog niet, dat zij op den duur zonder vrije zuurstof te gronde zouden gaan [1]). Ik moet er evenwel op wijzen,

---

[1]) Proefnemingen in die richting genomen hebben nog geen zeker resultaat gegeven en alleen bewezen dat bij afdoende schijnende voorzorgen de anaërobiose zonder lucht-

dat dit laatste zeer beslist het geval is bij de aërophiele facultatieve anaëroben, zooals de alcoholgisten, *B. coli commune* etc.; wordt daaraan de gelegenheid ontnomen om een „zuurstofreserve" aan te leggen, waarop geteerd kan worden als dit gas ontbreekt, dan houdt spoedig de groei, weldra, ook bij de gunstigste voeding, het leven op [1]). Dit feit is zeer zonderling, want de uiterst kleine hoeveelheden zuurstof die hier in 't spel komen, hebben niets te beteekenen uit het oogpunt van de energieontwikkeling. Het is dus raadselachtig waarom de gebonden zuurstof, die in het voedsel overvloedig voorhanden is, hier niet de rol van de vrije zuurstof kan vervullen. Bij de onbekende beteekenis van de laatste is het wel is waar geheel onzeker of er een minimumgrens moet bestaan, beneden welke de mogelijkheid van het leven geheel en al uitgesloten is, maar omdat deze grens bij de facultatieven feitelijk bestaat, is men bij analogie geneigd het bestaan daarvan overal, dus ook bij de obligaatanaëroben aan te nemen, dat is ook daarvoor vrije zuurstof als noodzakelijke levensvoorwaarde te erkennen. Men wordt in deze opvatting versterkt nu het gebleken is hoe gemakkelijk zich laat aantoonen, dat ook zij vrije zuurstof niet alleen verdragen en verbruiken, maar dat zij die zoo mogelijk opzoeken, en dat daardoor zelfs zulke belangrijke levensfuncties als groei en bewegelijkheid kunnen begunstigd worden. In elk geval wijst dit op iets meer dan „verbruik", ook al is de term „behoefte" daarvoor misschien nog te ver reikend. Daar het evenwel een feit is, dat de obligaatanaëroben duizenden nieuwe generaties kunnen voortbrengen, zonder vernieuwd contact met vrije zuurstof, vereischt de hypothese het aannemen van een geheel op zichzelf staande, katalytische werking van de zuurstofsporen, die als reserve in het bacteriënlichaam zijn opgehoopt. Deze werking is niet vergelijkbaar met bijv. die van het kalium, het magnesium of de andere slechts in geringe hoeveelheid voor het leven noodzakelijke elementen, vooreerst omdat deze laatste in hoeveelheden van andere orde moeten aanwezig zijn, reusachtig vergeleken bij die van de zuurstofreserve, en ten tweede en vooral omdat die elementen aan de meest verschillende chemische verbindingen kunnen worden onttrokken. Juist in de noodzakelijk-

---

toetreding langdurig kan voortgaan. Zoo kon ik zeven butylalcoholgistingen zonder luchttoevoer op elkander laten volgen, maar bij de zevende gisting ontstond twijfel of de bacteriën veranderd waren, of dat er een infectie van buiten met boterzuurfermenten had plaats gevonden.

[1]) Ik heb daarom vroeger voorgeslagen deze organismen "temporair anaërobe" te noemen, maar nu ik meer en meer tot de conclusie kom, dat ook de "obligaten" slechts tijdelijk zonder vrije zuurstof kunnen leven hecht ik aan die term geen waarde meer.

heid van het vrij zijn van de zuurstof, ligt de moeielijkheid om zich een bepaalde voorstelling van de hierbij betrokken werking te maken. Eenig licht zou daarover opgaan indien zich liet bewijzen, dat in het voedsel een los gebonden zuurstofvorm kan voorkomen, welke voor de anaërobieën toegankelijk is, en reeds PASTEUR heeft de hypothese opgesteld, dat de zuurstof, welke in bierwort voorkomt, en daaruit niet door pompen of koken kan worden verwijderd, de anaërobiose van den biergist mogelijk maakt. De feiten zijn daar mede echter niet in overeenstemming en men is, wat de biergist en de andere facultatiefanaëroben betreft, gelijk reeds vroeger is gezegd, gedwongen tot het aannemen van de vrije zuurstofreserve in de cel zelve, die op een tot nu toe onverklaarbare wijze tijdelijk anaërobiose mogelijk maakt; de analogie, gesteund door de bovenbeschreven feiten leidt tot hetzelfde besluit met betrekking tot de obligaatanaëroben.

Physiologie. — De Heer HAMBURGER spreekt over: *„De invloed van zoutoplossingen op het volumen van dierlijke cellen, tevens een bijdrage tot de kennis harer structuur"*.

Mijn onderzoekingen over het verband tusschen de wateraantrekkende kracht van zouten en hun vermogen, kleurstof uit de roode bloedlichaampjes te doen treden, leidden tot de onderstelling, dat er voor ieder zout een oplossing zou kunnen gevonden worden, waarin de roode bloedlichaampjes hetzelfde volumen behouden als zij in hun eigen serum bezitten. Inderdaad bleek die onderstelling juist te zijn en bleek bovendien, dat die oplossingen, welke het volumen onveranderd lieten, juist een gelijk wateraantrekkend vermogen vertegenwoordigden.

Bedoelde experimenten, in 1884 verricht, naar aanleiding van den klassieken arbeid van onzen landgenoot HUGO DE VRIES, over een analyse der turgorkracht bij plantencellen, zijn voor mij zelf en ook voor anderen het uitgangspunt geworden voor een reeks van onderzoekingen, welke bij physiologen en pathologen in klimmende mate belangstelling hebben gewekt voor de nieuwe leer der osmotische drukking. Hiertoe heeft de theorie der electrolytische dissociatie van VAN 'T HOFF en ARRHENIUS in den laatsten tijd het hare bijgedragen. En in vereeniging met elkander zijn beide theorieën reeds op weg, menig duister punt op physiologisch gebied op te helderen. Men zou nu geneigd zijn te vermoeden, dat in het verloop van 14 jaren, op analoge wijze als de roode bloedlichaampjes, ook andere dierlijke cellen onderzocht zijn. Dit is echter niet het geval. Wel

is voor verschillende doeleinden het wateraantrekkend vermogen van vloeistoffen, zooals bloedvocht, lymph, waterachtig vocht, melk, bestudeerd, wèl heeft men aan sereuse vliezen en slijmvliezen vloeistoffen van verschillende osmotische drukking ter opslorping aangeboden, om uit de verandering dier osmotische drukking gegevens af te leiden voor de kennis van het resorptie-proces, doch den invloed van zoutoplossingen op andere geisoleerde cellen dan de roode bloedcellen, heeft men tot dusverre niet nagegaan. En toch is dit om meer dan een reden gewenscht. Vooreerst ter controleering van de gevolgtrekkingen, welke men uit de bij de roode bloedlichaampjes gedane waarnemingen heeft gemaakt, en ter beslissing van meeningsverschillen daaromtrent; maar ook met het oog op vragen, voor welker oplossing de roode bloedcellen niet bruikbaar zijn, omdat zij, zooals bekend is, gemakkelijk hun kleurstof verliezen.

Het was dan ook reeds voor jaren mijn wensch, mijn onderzoekingen in bedoelde richting te kunnen uitbreiden, doch ik stuitte bij dit in beginsel uiterst eenvoudige plan op de moeilijkheid, een zóó groote hoeveelheid geisoleerde cellen te verkrijgen, dat met de toen beschikbare hulpmiddelen, een volumebepaling daarvan mogelijk zoude zijn. Dit bezwaar is thans opgeheven, doordien ik gebruik kan maken van de buisjes, welke ik het vorige jaar heb vervaardigd om het volumen van de bacteriën in twee culturen te kunnen vergelijken, en welke veroorloven met geringe quantiteiten te experimenteeren [1]).

Tot dusverre hebben wij 4 soorten van cellen onderzocht: witte en roode bloedlichaampjes van verschillende dieren, spermatozoa van den kikvorsch en darmepithelium van paard en varken.

Over het darmepithelium zullen wij bij een volgende gelegenheid handelen. Verschijnselen van bijzonderen aard, welke zich bij de studie daarvan hebben voorgedaan, maken een voortgezet onderzoek noodig.

I. *Witte bloedlichaampjes.*

Deze werden verkregen door paardenbloed, dat in een gesloten flesch met glasstukjes gedefibrineerd was, aan zichzelf over te laten. De roode bloedlichaampjes bezinken dan voor verreweg het grootste gedeelte, terwijl de witte nog alle in de bovenstaande vloeistof gesuspendeerd blijven. Het aantal daarvan is betrekkelijk gering. Om nu een vloeistof te verkrijgen, welke rijk is aan witte bloedlichaampjes, werd $^1/_2$ L. der troebele vloeistof gecentrifugeerd, 470 cc. van het

[1]) Vergel. Verslag der Verg. der Kon. Akad. v. Wetensch. 21 April 1897.

heldere serum verwijderd en het bezinksel in het overgebleven vocht gelijkmatig verdeeld. Van deze vloeistof nu werd in een fijn pipetje ongeveer $^1/_4$ cc. afgemeten en gebracht in reageerbuisjes met 15 cc. van verschillende zoutoplossingen. Na herhaald vermengen werd dan na een half uur of langer 5 cc. of meer in de zooeven genoemde trechtervormige buisjes gebracht en gecentrifugeerd, totdat het niveau bij onveranderde omdraaiingssnelheid der centrifuge, gedurende 15 minuten constant bleef.

Vloeistoffen.	Volumen van het bezinksel.
Na Cl-oplossing 0.7 pCt.	46.25
Serum (isotonisch met Na Cl 0.9 pCt.)	41
Na Cl-oplossing 1 pCt.	39.25
Na Cl-oplossing 1.5 pCt	33.5

Men ziet een geregelde afdaling van het volumen.

Intusschen waren tusschen de witte bloedlichaampjes ook tal van roode aanwezig. In het onderhavige geval werden geteld 569 roode op 109 witte en het was nu de vraag of, en anders in hoever, de roode voor dit resultaat aansprakelijk moesten gesteld worden. Om een denkbeeld te verkrijgen van het aandeel, dat beide hadden aan het volumen, stelle men zich een oogenblik voor, dat de diameter der witte bloedlichaampjes het dubbele bedraagt van die der roode en bovendien de laatste geen schijfjes maar bolletjes zijn. In dat geval zouden de roode bloedlichaampjes een volumen vertegenwoordigen van 569, terwijl dat der witte 872 zou bedragen. Ongetwijfeld ligt deze rekening in het voordeel der roode bloedlichaampjes, aangezien de middellijn der witte *meer* dan het dubbele bedraagt dan die der roode, terwijl ook de gedaante der laatste een ingedeukt schijfje is en geen bol.

Om nu te onderzoeken welk aandeel in de inkrimping en uitzetting aan den invloed der roode bloedlichaampjes moest toegekend worden, werd de bovenstaande proef ook verricht alléén met roode bloedlichaampjes.

Brengen wij de verkregen cijfers, benevens de procentische volumeveranderingen, welke daaruit voortvloeien, in een tabelletje, dat tevens bevat de zooeven verkregen uitkomsten, dan blijkt een treffende overeenkomst.

Vloeistoffen.	Volumen van het bezinksel der roode bloed-lichaampjes.	Volumen van het bezinksel der witte en roode te zamen (zie vorige tabel).	Procentische volume-vermeerdering, berekend ten opzichte van het volumen in serum.	
			Roode bloed-lichaampjes.	Mengsel van roode en witte.
Na Cl-opl. van 0.7°/₀.	43.5	46.25	+ 13°/₀	+ 12.8°/₀
Serum (isot. met Na Cl. 0.9°/₀.)	38.5	41	—	—
Na Cl-opl. 1°/₀.	36.75	39.25	— 4.54°/₀	— 4.2°/₀
Na Cl-opl. 1.5°/₀.	31.75	33.5	— 17.5°/₀	— 18.3°/₀

Uit deze tabel blijkt, dat de volume-veranderingen van de roode bloedlichaampjes volkomen gelijk zijn aan die, welke het mengsel van witte en roode vertoont, waaruit volgt, dat de roode en witte bloedcellen, caeteris paribus, in gelijke mate uitzetten en inkrimpen.

Deze merkwaardige uitkomst, welke zooals aanstonds blijken zal, door vele andere experimenten werd bevestigd, is het uitgangspunt geworden van het thans volgende onderzoek.

Hoewel het, zooals uit de inleiding blijken kan, aanvankelijk in mijn bedoeling lag, den invloed van oplossingen van *verschillende* zouten op het volumen van cellen te bestudeeren, heb ik mij tot dusverre slechts beziggehouden met Na Cl-soluties en met mengsels van serum en water, als geheel voldoende voor de beantwoording van de vraag, die mij voorloopig het meest interesseerde: waardoor ontstaat de gelijkheid van uitzetting en inkrimping bij de roode en witte bloedlichaampjes? een vraag, welke weer terstond leidde tot een andere n.l.: waardoor zwellen de cellen door hypisotonische en krimpen zij in door hyperisotonische oplossingen?

Nu kan men met Schwarz den celinhoud (de kern niet meegerekend) beschouwen als een homogene massa, of met Remak, Kupffer, Flemming, Bütschli en veel anderen als een protoplasmatische massa, waartusschen zich vloeistof bevindt. Wat zal dan in het eerste geval moeten gebeuren, wanneer men een cel, welker homogene inhoud in wateraantrekkend vermogen overeenkomt met een NaCl-oplossing van 0.9°/₀, legt in een NaCl-solutie van 1.8°/₀? Dan zal die massa tot de helft moeten inkrimpen. Wordt zij gebracht in een Na Cl-oplossing van 1½ °/₀, dan zal de uitzetting moeten bedragen $\frac{1.5-0.9}{0.9} \times 100 = 66°/_0$. Brengt men haar daarentegen in een NaCl-oplossing van 0.7°/₀, dan zal de uitzetting moeten bedragen $\frac{0.9-0.7}{0.9} \times 100 = 22°/_0$. Wat is echter gebleken? Dit

zoowel de inkrimping als de uitzetting veel minder bedragen, n. l. resp. 17.5 en 13°/₀ (vergel. de vorige tabel). Dit leidt tot de conclusie, dat er in de roode en witte bloedlichaampjes een substantie moet aanwezig zijn, welke aan het wateraantrekkend vermogen geen of een geringer aandeel heeft dan het andere bestanddeel, en worden wij thans geplaatst voor de vraag, hoe wij ons de beide substanties gerangschikt moeten voorstellen.

Van de verschillende hypothesen, welke te dien aanzien voor cellen in het algemeen zijn uitgesproken [1]), is er slechts één, welke ons, ook met het oog op de tot dusverre bij de roode bloedlichaampjes bekend geworden physiologische feiten, bevredigend heeft toegeschenen, de hypothese, die wij dan ook vroeger reeds hebben aangenomen en welke door de hiervolgende onderzoekingen een krachtigen steun verkrijgt, n. l. de hypothese van BÜTSCHLI. Volgens deze hypothese bestaan de cellen uit een protoplasmatisch net, waarvan de afgesloten mazen bij wijze van een honigraat tegen elkander liggen en welker inhoud een vloeistof is. Op grond van het feit, dat het gehalte van den celinhoud aan wateraantrekkende stoffen, ondanks de inwerking van zoutoplossingen van verschillende sterkte, onveranderd blijft, kan men zich voorstellen, dat het protoplasmatisch net voor zouten niet [2]), doch alleen voor water permeabel is. Verder stellen wij ons voor, dat alleen de vloeibare inhoud het wateraantrekkend vermogen der cel vertegenwoordigt. Het is m. a. w. dus alleen de vloeibare inhoud, die de uitzetting en inkrimping der cel door hypisotonische en hyperisotonische oplossingen tot stand brengt.

Is deze voorstelling juist, dan moet ook in het bedrag van de uitzetting en inkrimping der cellen in haar geheel een maat gelegen zijn voor het betrekkelijk volumen der beide celbestanddeelen, en dan moet ook het resultaat in ruime mate onafhankelijk zijn van de concentratie der gebruikte zoutoplossingen.

Door deze gedachte geleid zijn wij begonnen een aantal bepalingen te verrichten van het volumen der netwerksubstantie in witte bloedlichaampjes.

De hiervoor gebruikte witte bloedlichaampjes waren zoo goed als geheel vrijgemaakt van roode, door eenvoudig de volgens de be-

---

1) Vergel. BÜTSCHLI, Untersuchungen über mikroskopische Schäume und das Protoplasma. Leipzig 1892. S. 102.

2) Worden de bloedlichaampjes wel als permeabel voor zouten beschouwd, dan moet er een wisseling plaats hebben in isotonische verhouding; immers alleen daardoor is de onveranderlijkheid der wateraantrekkende kracht van den mazeninhoud gewaarborgd. Voor hetgeen thans volgt is het echter onverschillig, welke van beide voorstellingen de juiste is. De in den tekst genoemde is zeker de eenvoudigste.

schreven methode verkregen leucocytenrijke vloeistof een uur aan zichzelf over te laten. De roode waren dan bezonken en in de bovenstaande vloeistof bevonden zich alleen witte.

Laten wij de eerste proevenreeksen eenigszins nader bespreken.

Gelijke hoeveelheden witte bloedlichaampjes zijn vermengd met NaCl-oplossingen van 0.7, 0.94 (isotonisch met het serum) en 1.5 pCt. Na centrifugeering van gelijke quantiteiten dier oplossingen, blijkt het volumen der witte bloedlichaampjes resp. te bedragen 41, 35.5 en 29.5. Om uit de twee laatste cijfers het volumen van het protoplasmatisch net te berekenen, kan men aldus redeneeren: Stel het volumen van het protoplasma der netwerk-substantie p, dan bedraagt het volumen der intracellulaire vloeistof resp. $(35.5-p)$ en $(29.5-p.)$ Aangezien wij moeten aannemen, dat het gehalte aan wateraantrekkende stoffen in het intracellulaire vocht onveranderd blijft, moet de volgende vergelijking gelden:

$$(35.5-p)\ 0.94 = (29.5-p)\ 1.5$$
$$p = 19.4$$

Uit de cijfers, verkregen met de NaCl-oplossingen 0.7 en 1.5% volgt de vergelijking:

$$(41-p)\ 0.7 = (29.5-p)\ 1.5$$
$$p = 19.5.$$

Het blijkt dus, dat de hoeveelheid van het protoplasmatisch netwerk in beide gevallen nagenoeg gelijk wordt gevonden. Het gemiddelde is 19.45.

Neemt men nu in aanmerking, dat het totaal volumen der witte bloedlichaampjes in de met serum isotonische oplossing van 0.94, 35.5 bedroeg, dan vindt men een procentgehalte van

$$\frac{35.5 - 19.45}{35.5} \times 100 = 54.5\%,$$

ingenomen door het protoplasmatisch netwerk.

Van dezelfde witte bloedlichaampjes werd het netwerk-volumen onderzocht met behulp van mengsels van serum en verschillende hoeveelheden water.

	Vol. der w. bll.
(1) in onverdund serum	35.75
(2) in serum vermengd met 20 % water	39
(3) " " " " 40 " "	41.75
(4) " " " " 50 " "	43.5

Uit (1) en (2) volgt de vergelijking.

$$120\ (35.75-p) = 100\ (39-p)$$
$$p = 19.5$$

Uit (1) en (3) volgt de vergelijking:

$$140\,(35.75-p) = 100\,(41.75-p)$$
$$p = 20.6$$

Uit (1) en (4) volgt de vergelijking:

$$150\,(35.75-p) = 100\,(43.5-p)$$
$$p = 20.3$$

Men ziet, dat voor p cijfers worden gevonden, welke goed met elkander overeenstemmen. Het gemiddelde is $\frac{19.5 + 20.6 + 20.3}{3} = 20.04$, d. i. berekend op 35.75: $\frac{20\ 04}{35.75} \times 100 = 56^0/_0$, een getal, dat met het door NaCl-oplossingen verkregene zeer goed overeenstemt.

Men zou de opmerking kunnen maken, dat de getallen 54.5 of 56 het juiste volumen van het protoplasmatisch net niet *kunnen* aangeven, aangezien men door centrifugeeren slechts het bezinksel en niet het eigenlijk volumen der bloedlichaampjes bepaalt. Het is mij echter door experimenten gebleken, dat dit geen merkbaren invloed heeft op het procentgehalte der netwerksubstantie. Men kan dit o. a. duidelijk waarnemen, wanneer men door krachtige versnelling der centrifuge de bezinksels een weinig meer samendrukt. Het procentgehalte van p verandert daardoor niet of nauwelijks. Men bedenke trouwens, 1°. dat alle vloeistoffen voor één proef tegelijk gecentrifugeerd worden en 2°. om bij de cijfers van het laatste experiment te blijven, wanneer de getallen 39, 41.75 en 43.5 een weinig grooter zijn dan overeenkomt met het eigenlijk volumen der cellen, omdat er tusschen de lichaampjes nog vloeistof aanwezig is, hetzelfde het geval is voor het getal 35.75, ten opzichte waarvan toch het procentgehalte berekend is.

Er kan nog een tweede opmerking gemaakt worden, namelijk dat bij de berekening is verwaarloosd de invloed van het volumen van de in de intracellulaire vloeistof opgeloste vaste bestanddeelen. Hierdoor zou wellicht het cijfer, dat verkregen is voor het volumen van het protoplasmatisch net, eenigszins gewijzigd moeten worden.

Het schijnt mij bezwaarlijk met juistheid aan te geven, welke graad van nauwkeurigheid bij onze bepalingen bereikt wordt. De *absolute* waarden hebben echter voor ons doel weinig beteekenis. Intusschen is, gelijk men zal opmerken, de overeenkomst tusschen de verkregen cijfers treffend; het zou mij verwonderen, indien zij veel van de juiste afweken.

Wij laten thans een tabel volgen, waarin eenige experimenten gelijk de zooeven beschrevene zijn saamgevat en waarin het procentisch volumen van p op de aangegeven wijze is berekend.

I.	II.	III.		IV.	V.
Vloeistoffen.	Waargenomen volumen der witte bloedlichaampjes.	Volumen van het protoplasma-netwerk (p)	berekend uit	Gemiddeld volumen van het protoplasma-netwerk.	Gemiddeld procentgehalte der witte bloedlichaampjes aan protoplasmatisch netwerk.
a. Na Cl-opl. 0.7°/o	49.25				
b. „ „ 0.93°/o	42.75	23.9	*a* en *c*	24.1	56.3°/o
c. „ „ 1.5°/o	35.75	24.3	*b* en *c*		
a. Na Cl-opl. 0.5°/o	40 25	(19.4)	*a* en *c*		(63.6 °/o)
b. „ „ 0.7°/o	35	16.7	*b* en *d*	16.55	54.3 °/o
c. „ „ 0.94°/o	30.5	16.4	*c* en *d*		
d. „ „ 1.5°/o	25.25				
a. Na Cl-opl. 0.25°/o	3.05	20.46	*a* en *d*	(20.46)	(88 °/o)
b. „ „ 0.5°/o	29.25	(15.8)	*b* en *d*	(15.8)	(67.9 °/o)
c. „ „ 0.7°/o	26.50	12.4	*c* en *e*	12.5	53°/o
d „ „ 0.9°/o	23.25	12.6	*d* en *e*		
e „ „ 1.5°/o	19				
a. Na Cl-opl. 0.25°/o	37 75	(18.72)	*a* en *d*	(18.72)	(75 °/o)
b. „ „ 0.5°/o	30.25	(16.18)		(16 18)	(63 2 °/o)
c. „ „ 0.7°/o	27.25	13.2	*c* en *e*	13.35	55.6 °/o
d. „ „ 0.9°/o	24	13.5	*d* en *e*		
e. „ „ 1.5°/o	19.75				
a. serum.	34.75				
b. serum + 20°/o water	37.75	19.75	*a* en *b*	19.73	56 7 °/o
c. serum + 40°/o water	40.75	19.70	*a* en *c*		
d. serum + 50°/o water	42.25	19.74	*a* en *d*		
a. serum.	33				
b. serum + 20°/o water	36	18	*a* en *b*	17.83	54 °/o
c. serum + 40°/o water	39	18	*a* en *c*		
d. serum + 50°/o water	40.75	17.5	*a* en *d*		

Uit deze tabel volgt:

1. Dat het volumen van het netwerk p. zich beweegt tusschen 56.7 en 53.3°/o van het geheele celvolumen.

2. Dat, waar een oplossing van Na Cl. van 0.5% gebruikt wordt, een oplossing, die bij paardenbloed uit een deel der roode bloedlichaampjes kleurstof doet treden, het cijfer voor het netwerk grooter gevonden wordt dan daar waar soluties tusschen 0.7 en 1.5 worden aangewend.

Wat voor Na Cl. 0.5 geldt, blijkt in nog sterker mate het geval te zijn, wanneer een Na Cl-solutie van 0.25 pCt. gebezigd wordt. In de tabel zijn de hierop betrekking hebbende getallen met kleine cijfers aangegeven.

Deze uitkomst laat zich aldus verklaren:

Door een zeer zwakke zoutsolutie neemt het volumen der intracellulaire vloeistof zóó aanzienlijk toe, dat tengevolge van de groote spanning het protoplasma permeabel wordt en den inhoud doorlaat. Hierdoor kan de zwelling niet zoo aanzienlijk worden als *volgens de berekening* een Na Cl-oplossing van 0.5 of 0.25 die zou moeten tot stand brengen en moet dus de vergelijking een te groote *p* opleveren. Bij deze opvatting bestaat er een volkomen analogie met hetgeen men bij de *roode* bloedlichaampjes waarneemt; daar is het uittreden van den vloeibaren celinhoud zichtbaar door vrije haemoglobine.

Wat nu betreft de wijze, waarop protoplasma en intracellulaire vloeistof in de witte bloedlichaampjes gerangschikt zijn, daaromtrent leeren de medegedeelde proeven niet veel. Immers, men kan de verschijnselen verklaren, door de cel te beschouwen als te bestaan uit een protoplasma-net van gesloten mazen, maar men kan haar ook opgebouwd denken uit een gesloten omhulsel, waarbinnen zich bevindt een vloeistof verdeeld tusschen protoplasmabalkjes, welke *geen* gesloten mazen vormen. Men moet in het laatste geval echter aannemen, dat het uitwendige omhulsel alleen voor water permeabel is (vergel. overigens de noot op blz. 36).

Om nu tusschen beide voorstellingen een keuze te doen, heb ik twee gelijke hoeveelheden witte bloedlichaampjes afgemeten en daarvan ééne hoeveelheid gedurende een uur krachtig geschud met een ruime quantiteit scherpe stukjes glas. Hierdoor kon een aanzienlijke hoeveelheid witte bloedlichaampjes gelaedeerd en verscheurd worden. Werden nu van de gelaedeerde en niet-gelaedeerde witte bloed lichaampjes gelijke deelen behandeld met verschillende zoutoplossingen, dan bleek de inkrimping en de uitzetting voor beide soorten caeteris paribus nagenoeg gelijk. Om hier niet te uitvoerig te worden, zal ik te dezer plaatse geen tabellarisch overzicht der experimenten geven.

De verkregen uitkomst laat zich, voorzoover ik zien kan, niet anders verklaren dan door aan te nemen, dat ieder willekeurig deel van het witte bloedlichaampje, weer op zich zelf bestaat uit een gesloten

mazennet. Eenvoudige histiologische waarnemingen, waarop ik hier niet zal ingaan, leeren hetzelfde.

II. *Roode bloedlichaampjes.*

Dezelfde proeven, welke voor de witte bloedlichaampjes werden verricht, — de kneuzingsproeven natuurlijk niet — voerden wij ook uit voor de roode.

Wij kunnen volstaan met het weergeven van eenige der experimenten in een tabel.

PAARDENBLOED.

I.	II.	III.		IV.	V.
Vloeistoffen.	Waargenomen volumen der roode bloedlichaampjes.	Volumen van het protoplasmatisch netwerk.		Gemiddeld volumen van het protoplasmat. netwerk.	Gemiddeld procentgehalte der roode bloedlichaampjes aan protoplasmatisch netwerk.
		berekend uit			
a. Na Cl-opl. 0.7°/o	41.75	*a* en *c*	19.7	19.8	55°/o
b. 〃 〃 0.94°/o	36	*b* en *c*	19.9		
c. 〃 〃 1.5°/o					
a. Na Cl-opl. 0.7°/o	43.5	*a* en *c*	20.6	19.98	53.3°/o
b 〃 〃 0.94°/o	37.5	*b* en *c*	19.9		
c. 〃 〃 1.5°/o	31				
a. Na Cl-opl. 0.7°/o	42	*a* en *c*	19.7	20.15	54.5°/o
b. 〃 〃 0.9°/o	37	*b* en *c*	20.6		
c. 〃 〃 1.5°/o	30.25				
a. serum.	34.5	*a* en *b*	18.25	18.51	53 6°/o
b. serum + 20°/o water.	37.75	*a* en *c*	18.8		
c. 〃 〃 40°/o 〃	40.75	*a* en *d*	18.5		
d. 〃 〃 50°/o 〃	42.50				
a. serum.	35.75	*a* en *b*	19.5	19.93	55°/o
b. serum + 20°/o water.	39	*a* en *c*	20.1		
c. 〃 〃 40°/o 〃	42	*a* en *d*	20.24		
d. 〃 〃 50°/o 〃	43.5				
a. serum.	36	*a* en *b*	19.75	19.83	55°/o
b. serum + 20°/o water.	39.25	*a* en *c*	19.75		
c. 〃 〃 40°/o 〃	42.5	*a* en *d*	20		
d. 〃 〃 50°/o 〃	44				

Ook hier blijkt, dat de procentische verhouding tusschen protoplasma en intracellulaire vloeistof in de verschillende experimenten weinig afwijking vertoont en op treffende wijze overeenstemt met hetgeen bij de witte bloedlichaampjes van dezelfde diersoort werd gevonden.

Het interesseerde ons nu verder te weten, welke resultaten de bloedlichaampjes van het konijn zouden geven.

Wij namen bloed uit het oor en defibrineerden het. Na nauwkeurig affiltreeren van de fibrine werd het op gelijke wijze als de bloedlichaampjes van het paard met zoutoplossingen vermengd.

In de volgende tabel vindt men eenige der verkregen resultaten. Deze hebben betrekking op het geheele bloed. Intusschen is het aantal witte bloedlichaampjes na defibrineeren zoo gering, dat men bijna recht heeft de uitkomst als uitsluitend van roode bloedlichaampjes afkomstig te beschouwen.

KONIJNENBLOED.

Vloeistoffen.	Waargenomen volumen der bloedlichaampjes.	Volumen van het protoplasmatisch netwerk.		Gemiddeld volumen van het protoplasmat.-netwerk.	Gemiddeld procentgehalte der bloedlichaampjes aan protoplasmatisch netwerk.
		berekend uit			
a. Na Cl-opl. 0.7°/o	43	*a* en *c*	20.2		
b. „ „ 0.85°/o (isot. met bloedserum).	39	*a* en *d*	19.6	19.9	51°/o
c. Na Cl-opl. 1.2°/o	35.5	*b* en *d*	19.3		
d. „ „ 1.5°/o	30.5				
a. Na Cl-opl. 0.7°/o	44.25	*a* en *c*	19.6		
b. „ „ 0.87°/o (isot. met bloedserum).	40	*a* en *d*	19.9	19.5	48.7°/o
c. Na Cl opl. 1.2°/o	34	*b* en *d*	19.1		
d. „ „ 1.5°/o	31.25				
a. Na Cl-opl. 0.7°/o	40.5	*a* en *c*	17.7		
„ „ 0.86°/o (isot. met bloedserum).	36.25	*a* en *d*	18	17.93	49.4°/o
Na Cl-opl. 1.2°/o	31	*b* en *d*	18.1		
d. „ „ 1.5°/o	28.5				

Deze proeven geven voor het protoplasmatisch netwerk een geringer volumen aan dan bij het paard werd gevonden.

In de derde plaats deelen wij nog enkele bepalingen mede met bloedlichaampjes van den kikvorsch.

KIKVORSCHBLOED.

Vloeistoffen.	Waargenomen volumen der roode bloedlichaampjes.	Volumen van het protoplasmatisch netwerk.		Gemiddeld volumen van het protoplasmat.-netwerk.	Gemiddeld procentgehalte der roode bloedlichaampjes aan protoplasmatisch netwerk.
		berekend uit			
a. Na Cl-opl. 0.35 %	44.5	*a* en *d*	28.7		
〃 〃 0.6 %	38	*b* en *d*	29.25	28.78	75.7 %
c. 〃 〃 0.7 %	36.75	*a* en *c*	28.9		
d. 〃 〃 1 %	34.5				
a. Na Cl opl. 0.35 %	41.75	*a* en *d*	27.9		
b. 〃 〃 0.6 %	36	*b* en *d*	27.8	27.5	76.4 %
c. 〃 〃 0 7 %	34.25	*a* en *c*	26.8		
d. 〃 〃 1 %	32.75				
a. Na Cl-opl. 0.35 %	45.5	*a* en *e*	27		
b. 〃 〃 0.6 %	37.5	*b* en *d*	27.5	27	72 %
c. 〃 〃 0.7 %	36	*a* en *c*	26.5		
d. 〃 〃 1 %	33.5				
a. Na Cl-opl. 0.35 %	40.5	*a* en *d*	25.14		
b. 〃 〃 0.6 %	34.25	*b* en *d*	24.83	25.16	73.4 %
c. 〃 〃 0.7 %	33	*a* en *c*	25.5		
d. 〃 〃 1 %	30.5				

Vergelijkt men het volumen van het protoplasmatisch net bij het paard en konijn aan den eenen en den kikvorsch aan den anderen kant, dan moet het treffen, dat bij den kikvorsch het volumen van het net zoo aanzienlijk is.

Bij nadere beschouwing intusschen sluit deze toestand zich aan bij hetgeen ik in 1886 heb waargenomen. Het bleek toen, dat terwijl men paardenbloedserum met 60 à 70 % water verdunnen kan alvorens kleurstof uittreedt, kikvorschbloedserum 200 en meer procent water verdraagt. Dit zou niet mogelijk zijn, indien er zooveel intracellulaire vloeistof in de bloedlichaampjes voorkwam als

bij het paard; immers dan zou de zwelling al spoedig veel te sterk geworden zijn.

III. *Spermatozoa van den kikvorsch.*

Ten slotte wil ik nog enkele proeven vermelden, welke dienden om voorloopig na te gaan of cellen, waarvan de kern de hoofdmassa uitmaakt, zich gelijk de reeds onderzochte cellen zouden gedragen. De tijd bood juist een uitnemend object, namelijk onrijpe spermatozoa van den kikvorsch; slechts enkele bewogen zich.

Vloeistoffen.	Waargenomen volumen der roode bloedlichaampjes	Volumen van het protoplasmatisch netwerk.		Gemiddeld volumen van het protoplasmat.-netwerk.	Gemiddeld procentgehalte der spermatozoa aan protoplasmatisch netwerk.
a. Na Cl-opl. 0.35°/o	69	*a* en *d*	48.2		
″ ″ 0.6°/o	61	*b* en *d*	47.25	48.13	78.8°/o
c. ″ ″ 0.7°/o	59	*a* en *c*	49		
d. ″ ″ 1°/o	55.5				
a. Na Cl-opl. 0.35°/o	70	*a* en *d*	42.3		
″ ″ 0.6°/o	58.5	*b* en *d*	42.2	42.83	73.2°/o
c. ″ ″ 0.7°/o	57	*a* en *c*	44		
″ ″ 1°/o	52				
a. Na Cl-opl. 0.35°/o	62	*a* en *d*	44.3		
b. ″ ″ 0.6°/o	55.5	*b* en *d*	43	44.1	79.4°/o
c. ″ ″ 0.7°/o	53.5	*a* en *c*	45		
d. ″ ″ 1°/o	50.5				
a. Na Cl opl. 0.35°/o	72	*a* en *d*	44.3		
b. ″ ″ 0.6°/o	60.5	*b* en *d*	44.2	44.5	73.5°/o
c. ″ ″ 0.7°/o	58.5	*a* en *c*	45		
d. ″ ″ 1°/o	54				

Men ziet dus, dat de spermatozoa ongeveer hetzelfde cijfer geven als de bloedlichaampjes van den kikvorsch.

In hoeverre er overeenkomst zal blijken te bestaan tusschen de quantitatieve verhouding van protoplasma en intra-cellulaire vloeistof

bij verschillende cellen van een en hetzelfde individu, zullen nadere onderzoekingen nog moeten leeren. Eveneens zal het aandeel der kern door voortgezette experimenten vastgesteld moeten worden.

CONCLUSIE.

1. Behalve de roode bloedlichaampjes vertoonen ook de witte bloedlichaampjes en de spermatozoa inkrimping door hyperisotonische en zwelling door hypisotonische oplossingen.

2. De waarneming, dat het bedrag dier zwelling en inkrimping veel geringer is dan het zoude zijn indien bedoelde cellen uit één homogene massa bestonden, leidt tot de conclusie, dat die cellen moeten bestaan uit twee substanties, eene, welke het wateraantrekkend vermogen der cel vertegenwoordigt, en een andere, welke aan het wateraantrekkend vermogen geen of slechts een gering aandeel heeft.

3. Door de quantitatieve bepaling der uitzetting en inkrimping, welke de cellen ondergaan onder den invloed van Na Cl -oplossingen van verschillende concentraties, of van serum, verdund met verschillende hoeveelheden water, heeft men een middel om de procentische verhouding tusschen beide celbestanddeelen vast te stellen.

Uit de tot dusverre verrichte experimenten is gebleken, dat bij de witte bloedlichaampjes van het paard, het volumen der protoplasmasubstantie bedraagt: 56.7%—53%

Voor de roode bloedlichaampjes	van het paard	55 %—53.3%
„ „ „ „	van het konijn	51 %—48.7%
„ „ „ „	van den kikvorsch	76.4%—72 %
„ „ spermatozoa	van den kikvorsch	79.4%—73.2%

4. Laedeert men de witte bloedlichaampjes langs mechanischen weg, dan blijkt de uitzetting en inkrimping onder den invloed van zoutoplossingen nagenoeg onveranderd. De verkregen resultaten laten zich bezwaarlijk anders verklaren dan door de voorstelling, dat deze cellen bestaan uit een netwerk van protoplasma, waarvan de gesloten mazen een vloeistof bevatten, welke uitsluitend het wateraantrekkend vermogen van de cel vertegenwoordigt.

Hierdoor krijgt BÜTSCHLI's theorie van de „Wabenstructur" der cellen, door physiologische experimenten een krachtigen steun, welke niet overbodig schijnt tegenover de bezwaren van histiologischen aard, die tegen de bewijskracht harer gronden zijn in het midden gebracht.

Natuurkunde. — De Heer P. ZEEMAN biedt voor het Verslag der Vergadering een opstel aan: „*Over eene asymmetrie in de verandering der spectraallijnen van ijzer bij straling in een magnetisch veld*".

(Zal in het Verslag der volgende Vergadering verschijnen).

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens den schrijver aan: „*Mededeeling N°.* 41 *uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden:* Dr. E. VAN EVERDINGEN JR. *Het verschijnsel van* HALL *in Electrolyten.*"

1. De onderzoekingen over het verschijnsel van HALL en de magnetische weerstandstoename in bismuth, waarover mededeelingen aan de Akademie zijn gedaan in de Zittingen van 30 Mei 1896, 21 April en 26 Juni 1897 [1]), en die sedert uitvoeriger zijn behandeld in mijn dissertatie, gaven aanleiding tot het stellen van de vraag, in hoeverre deze verschijnselen een keuze kunnen rechtvaardigen tusschen verschillende theorieën over het wezen van den electrischen stroom en den weerstand der metalen. Een eerste stap ter beantwoording van deze vraag was het opstellen van een formule voor het verschijnsel van HALL in electrolyten, met behulp van vereenvoudigende onderstellingen. Immers bij electrolyten neemt men algemeen aan dat de electrische stroom bestaat in een overbrenging van ladingen door de ionen; de snelheden, bij die beweging voorkomende, zijn in vele gevallen bekend, zoodat gegevens voor de berekening voorhanden zijn. Nu dit onderzoek, reeds aangevangen in Hoofdstuk VIII der dissertatie, voorloopig is afgesloten wensch ik in 't kort de resultaten hier mede te deelen.

2. Verscheidene onderzoekers hebben getracht het verschijnsel van HALL in vloeistoffen waar te nemen. Het gelukte inderdaad, in oplossingen van zink- en kopersulfaat, welke door stroomen doorloopen werden, in een magneetveld potentiaalverschillen waar te nemen, welke van teeken veranderden wanneer de richting van het magneetveld of van den stroom werd omgekeerd. Terwijl echter bij de meeste metalen het HALL-effect evenredig is zoowel aan de sterkte van den stroom als aan die van het magneetveld, en bij alle metalen het potentiaalverschil onmiddellijk bij het aanbrengen van het magneetveld optreedt, neemt bij de vloeistoffen dit verschil langzamer toe

[1]) Communications from the Phys. Lab. at the Univ. of Leiden. N°. 26, 37 en 40.

dan de magneetkracht, sneller dan de stroomsterkte en groeit na het aanbrengen van het magneetveld langzaam aan tot een maximumwaarde. Voornamelijk op grond van deze laatste bijzonderheid weigerden ROITI [1]), FLORIO [2]) en CHIAVASSA [3]) in de, ook door hen waargenomen, potentiaalverschillen bewijzen te zien voor het bestaan van een HALL-effect in vloeistoffen, en schreven die veeleer toe aan ponderomotorische krachten, door de magneetkracht op de zoutdeeltjes uitgeoefend, aan concentratie- of aan temperatuurverschillen. Terwijl de beide eersten zich er toe bepaalden proeven te nemen, waarbij dergelijke storingen vermeden werden, en dan werkelijk het HALL-effect zagen verdwijnen, heeft CHIAVASSA ook het bestaan van temperatuur- en concentratieverschillen bewezen, den invloed dezer verschijnselen op het waargenomen potentiaalverschil nagegaan en aangetoond, dat in een niet homogeen magnetisch veld wervelbewegingen optreden in de vloeistof, welke op dezelfde wijze van stroomsterkte, magneetkracht enz. afhangen als het waargenomen schijnbare HALL-effect.

BAGARD [4]) daarentegen meende bij zijn proeven alle storingen vermeden te hebben en geloofde daarom aan het werkelijk bestaan van het HALL-effect in vloeistoffen.

De waarnemingen van CHIAVASSA zijn op dezelfde wijze verricht als die van BAGARD en het is dus wel zeer waarschijnlijk, dat een groot deel van BAGARD's potentiaalverschil door storingen is veroorzaakt. Bij de controleproeven evenwel, die moesten bewijzen dat zonder storingen in 't geheel geen potentiaalverschil ontstaat, werden altijd sterk geconcentreerde oplossingen gebezigd; de mogelijkheid bleef dus bestaan, dat in de verdunde oplossingen waarmede BAGARD werkte ook bij afwezigheid van storingen nog een gedeelte van het waargenomen effect zou overblijven. Experimenteel is dus de vraag nog niet beslist.

3. Gaan we nu over tot de theorie van het verschijnsel. We houden ons voorloopig alleen bezig met den toestand in het inwendige van de vloeistof, d. w. z. ver van de zijdelingsche begrenzingen. Is het potentiaalverval in de richting der X-as E_x, en zijn de snelheden

---

[1]) Atti della R. Acc. dei Lincei 12 p. 397, 1882; Journ. de Phys. 1883.

[2]) Il nuovo Cimento, Ser. 4, T. 4, p. 106, 1896.

[3]) Elettricista 6, 1897.

[4]) C. R. T. 123, p. 77 en 1270, 1896. Journ. de Phys. Sér. 3, T. 5, p. 499, 1896.

der ionen voor een electromotorische kracht van 1 c. g. s. eenheid per cM. U en V, dan zijn de snelheden thans

$$E_x U \quad \text{en} \quad E_x V$$

respectievelijk in de richtingen der positieve en negatieve X-as.

We nemen nu met LORENTZ [1]) aan, dat op een ion, dat zich met de snelheid v in een magneetveld H beweegt, per eenheid van lading een kracht wordt uitgeoefend voorgesteld door het vectorproduct $[v. H]$. In practisch voorkomende gevallen is de numerieke waarde van dit product klein vergeleken met de eenheid; de richtingsverandering bij de beweging is dan gering; we kunnen dus aannemen dat deze kracht voortdurend werkt in een richting loodrecht op de X-as. Is de magnetische kracht gericht volgens de Y-as, dan krijgen de ionen een bijkomende snelheid in de richting der Z-as [2]).

Deze snelheden zullen aanleiding geven tot het optreden van potentiaal- en concentratie-verschillen Is het evenwicht bereikt, dan behoeven de snelheden niet nul te zijn, maar is het voldoende wanneer:

1°. De snelheden van positieve en negatieve ionen gelijk zijn.

2°. Evenveel opgeloste stof in den vorm van moleculen terugdiffundeert als in den vorm van ionen tengevolge der genoemde snelheden verplaatst wordt.

Ter voltooiing van het beeld, dat we ons op deze wijze vormen, moeten we ons voorstellen dat aan de grenzen der vloeistof, of tenminste buiten de thans beschouwde ruimte, aan de eene zijde moleculen zich splitsen in ionen, aan de andere zijde ionen zich weer tot moleculen verbinden. Voorloopig denken we ons de reactiesnelheden bij deze processen oneindig groot.

We zullen nu de beide voorwaarden in formule brengen.

Noemen we het potentiaalverval in de richting der Z-as E_z, dan krijgen de ionen snelheden in de richting der Z-as

$$(U H E_x + E_z) U \quad \text{en} \quad (V H E_x - E_z) V.$$

Stellen we verder de concentraties der beide ionen c_1 en die van

---

[1]) Zie o. a. Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.

[2]) Een berekening waarbij de onregelmatige warmtebeweging der ionen in aanmerking genomen wordt leidt tot dezelfde resultaten.

het zout c_2, dan kunnen we de diffusiesnelheden der ionen voorstellen door

$$\frac{A}{c_1}\frac{dc_1}{dz} \,.\, U \quad \text{en} \quad \frac{A}{c_1}\frac{dc_1}{dz} \,.\, V$$

en die van het zout door $\frac{B}{c_2}\frac{dc_2}{dz} \,.\, U$, waarin A een constante is, die in nauwe betrekking staat tot de diffusieconstante van totaal gedissocieerde electrolyten, terwijl B een dergelijke beteekenis heeft voor de diffusie van een niet gedissocieerd zout.

De eerste voorwaarde luidt nu:

$$\left(U H E_x + E_z - \frac{A}{c_1}\frac{dc_1}{dz}\,.\right) U = \left(V H E_x - E_z - \frac{A}{c_1}\frac{dc_1}{dz}\,.\right) V \quad . \ (1)$$

de tweede:

$$\frac{B}{c_2}\frac{dc_2}{dz} \,.\, U c_2 = \left(U H E_x + E_z - \frac{A}{c_1}\frac{dc_1}{dz}\right) U c_1 \quad . \quad . \ (2)$$

Nemen we in aanmerking dat de concentratieverschillen zeer gering zullen zijn en dat we een oneindig groote reactiesnelheid ondersteldden, dan zullen we $c_1 = k c_2$ mogen stellen, waar k constant is.

Voor (2) kunnen we dan schrijven

$$\frac{B}{c_1}\frac{dc_1}{dz} = \left(U H E_x + E_z - \frac{A}{c_1}\frac{dc_1}{dz}\right) k.$$

dus

$$\frac{1}{c_1}\frac{dc_1}{dz} = \frac{(U H E_x + E_z)\, k}{B + A k}$$

Substitueeren we dit in (1), terwijl we $\frac{Ak}{B + Ak} = a$ stellen.

$$(U H E_x + E_z)\ (1 - a)\, U = \{(V H E_x - E_z) - a\,(U H E_x + E_z)\} V.$$

$$E_z \{U + V - a\,(U - V)\} = - E_x H \{U^2 - V^2 - a\,(U^2 - U V)\}$$

$$\frac{E_z}{E_x} = - H\,(U - V)\,.\,\frac{U(1-a) + V}{U(1-a) + V(1+a)}$$

Hieruit volgt weer

$$\frac{1}{c_1}\frac{dc_1}{dz} = E_x H \,.\, \left\{U - (U - V)\,.\,\frac{U(1-a) + V}{U(1-a) + V(1+a)}\right\}\frac{a}{A}\,.$$

De beide grensgevallen zijn $k = 0$ en $k = \infty$.
Eerste geval (zeer weinig gedissocieerd) $a = 0$

$$\frac{E_z}{E_x} = -H(U - V) \qquad \frac{dc_2}{dz} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Tweede geval (totaal gedissocieerd) $a = 1$

$$\frac{E_z}{E_x} = -\frac{H}{2}(U - V) \qquad \frac{1}{c_1}\frac{dc_1}{dz} = E_x H \, . \, \frac{U + V}{2A} \; . \; . \; . \quad (4)$$

Deze beide resultaten had men ook direct kunnen afleiden. Wanneer c_1 tot nul nadert, kunnen geen concentratieverschillen der vrije ionen ontstaan en moeten de snelheden gelijk worden alléén door de werking der electromagnetische en der electrische kracht. De vergelijking

$$(E_x U H + E_z) U = (E_x V H - E_z) V$$

geeft onmiddellijk de betrekking (3).

In een totaal gedissocieerde oplossing daarentegen kunnen geen zoutmoleculen terugdiffundeeren, dus moeten de snelheden der ionen in de richting der Z-as beide $= 0$ worden. Dit geeft dus

$$E_x U H + E_z - \frac{A}{c_1}\frac{dc_1}{dz} = 0 \quad \text{en} \quad E_x V H - E_z - \frac{A}{c_1}\frac{dc_1}{dz} = 0$$

waaruit men onmiddellijk de betrekkingen (4) kan afleiden.

In werkelijkheid zijn de reactiesnelheden niet oneindig groot. Dat echter hierdoor de uitkomst niet sterk kan veranderen ziet men in door de reactiesnelheid $= 0$ te stellen. Dan zijn er geen ontledingen of verbindingen; de concentratie der zoutmoleculen verandert niet, deze hebben dus in 't geheel geen invloed op het verschijnsel. Men vindt dus in dat geval, onafhankelijk van den werkelijken dissociatiegraad, dezelfde uitkomst als in het geval van volledige dissociatie.

Het is dus zeer waarschijnlijk dat men in 't algemeen voor het HALL-effect in vloeistoffen zal kunnen schrijven

$$\frac{E_z}{E_x} = -\mu H(U - V)$$

waar μ tusschen 1 en $\frac{1}{2}$ in ligt.

Deze waarde zou dus voorstellen de draaiing der equipotentiaallijnen in de vloeistof zelf. Het is nu nog de vraag, of wat men bij de proeven meet hiermede zal overeenstemmen. Men neemt nl. waar het potentiaalverschil tusschen twee metalen electroden; wanneer deze electroden in aanraking zijn met vloeistof van verschillende concentratie, zal daardoor een nieuw potentiaalverschil ontstaan, waarvan men de grootte kan schatten met behulp van de formule van HELMHOLTZ [1])

$$V_2 - V_1 = \frac{2\,p_0}{\varepsilon} \cdot \frac{V}{U+V} \cdot l\,\frac{c_2}{c_1}$$

Hierin is p_0 de osmotische druk bij een concentratie van 1 gram-ion per cM^3., ε de lading in electromagnetische eenheden van een gram-ion.

Kiezen we daarvoor een bepaald geval, een oplossing van kopersulfaat met de concentratie $c_1 = 3.10^{-5}$, de laagste waarde welke we bij KOHLRAUSCH [2]) aantreffen voor dit zout. We zullen aannemen dat voor dit geval de formule voor totaal gedissocieerde oplossingen geldt.

$$U = 218.10^{-14} \qquad V = 373.10^{-14}$$

dus $-(U - V) = 155.10^{-14}$. Stellen we $E_x = 1$ volt dus 10^8, $H = 10^4$, dan wordt $E_z = 0{,}78$.

Dit is dus het potentiaalverschil in c.g.s. eenheden tusschen twee punten op de Z-as met afstand 1 cM.

Het concentratieverschil wordt bepaald uit

$$\frac{1}{c_1} \cdot dc_1 = E_x\,H \cdot \frac{U+V}{2\,A}.$$

A blijkt, wanneer we onze formule voor de diffusiesnelheid vergelijken met die van NERNST [3]), gelijk te zijn aan $\frac{p_0}{J}\,\frac{u}{U}$ waarin $\frac{J}{u} =$ kracht noodig om aan een gram-ion met bewegelijkheid u de snelheid 1 cM. per sec. te geven.

$$l\frac{c_2}{c_1} = l\left(1 + \frac{dc_1}{c_1}\right) = \frac{dc_1}{c_1} - \dots.$$

---

[1]) Wied. Ann. 3 p. 201, 1878. In dezen vorm vindt men de formule bij NERNST, Zeitschr. f. ph. Chem. 4 p. 129, 1889.

[2]) Wied. Ann. 50, p. 404, 1893.

[3]) Zeitschr. f ph. Chem. 2 p. 619, 1888.

We behouden alleen den eersten term, dus

$$l\frac{c_2}{c_1} = E_x H \cdot \frac{U+V}{2A}$$

$$V_2 - V_1 = \frac{2p_0}{\varepsilon} \cdot \frac{V}{U+V} \cdot E_x H \cdot \frac{U+V}{2p_0 u} \cdot J \cdot U \cdot = \frac{E_x H}{\varepsilon} \cdot J \frac{UV}{u}$$

$$= \frac{10^8 \cdot 10^4}{10^4} \cdot 0{,}89.10^{10} \cdot \frac{110}{10^8} \cdot 373.10^{-14} = 3{,}6$$

Deze berekeningen zijn voldoende om aan te toonen, dat dit potentiaalverschil van dezelfde orde is als het HALL-effect.

Plaatst men de electroden, zooals bij de proeven veelal geschiedde, in bakjes, die door lange buizen met de punten op de Z-as verbonden zijn, dan is er aan de electroden geen concentratieverschil en vervalt dus ook dit potentiaalverschil.

4. Vergelijking van theorie en waarnemingen.

Voor deze vergelijking kiezen we de waarnemingen van BAGARD met een kopersulfaat oplossing welke ½ gram-molecuul per Liter bevatte.

We vinden voor deze oplossing $V - U = 11.10^{-13}$ [1]).

De waarnemingen van BAGARD daarentegen geven in een veld van 385 c.g.s. eenheden voor $\frac{E_z}{E_x} : H$ een waarde 13.10^{-7}.

Neemt men de oplossing $\frac{1}{16}$ normaal en het sterkste veld, 962, dan geeft de theorie 14.10^{-13}, de waarneming 35.10^{-7}.

Bedenkt men hierbij, dat zelfs het teeken van het schijnbare effect, dat hier overeenstemt met de theorie, bij de proeven van CHIAVASSA met zinksulfaat niet altijd hetzelfde was, dan zal het niet gewaagd schijnen de conclusie te trekken, dat de tot nu toe waargenomen galvanomagnetische potentiaalverschillen in vloeistoffen *niet* door het verschijnsel van HALL zijn veroorzaakt.

---

[1]) In de dissertatie is verzuimd den factor 10^{-8} (herleiding van volt tot c.g.s. eenheid) in rekening te brengen. Daar bovendien de nauwkeurige onderzoekingen van CHIAVASSA toen nog niet verschenen waren, is destijds aan de waarnemingen van BAGARD meer vertrouwen geschonken dan ze thans blijken te verdienen. Ook de heer F. G. DONNAN te Holywood (Ierland) heeft de vergissing opgemerkt en was zoo vriendelijk mij daarvan in een schrijven kennis te geven.

Veel nauwkeuriger onderzoekingen dan tot heden zijn verricht [1]) zouden moeten uitmaken, of het zwakke theoretische effect kan worden waargenomen. Het is echter wel twijfelachtig, of men de storingen, die zulke groote waarden kunnen aannemen, ooit geheel zal kunnen vermijden.

5. Het resultaat van dit onderzoek is dus: van de verschijnselen bij electrolyten kan men voorloopig nog geen gebruik maken om beter inzicht te krijgen in het wezen van den electrischen stroom in metalen. Voor dit doel is waarschijnlijk meer te verwachten van onderzoekingen, zooals RIECKE [2]) onlangs gepubliceerd heeft onder den titel „Zur Theorie des Galvanismus und der Wärme", waarbij betrekkingen worden gezocht tusschen de verschillende thermische, galvanische, thermo-magnetische en galvano-magnetische verschijnselen in bismuth. Onder meer berekent RIECKE daar onder zekere onderstellingen de U en V voor bismuth, waarvoor hij vindt

$$U = 0{,}05.10^{-5} \qquad V = 7{,}21.10^{-5}.$$

Binnenkort hoop ik de uitkomsten bekend te maken van metingen der verschillende verschijnselen bij éénzelfde bismuthplaatje, en die uitkomsten met de theorie van RIECKE te vergelijken.

De vergadering wordt gesloten.

---

[1]) Het kleinste nog waarneembare potentiaalverschil was bij de proeven van CHIAVASSA 5.10^{-4} volt. Het grootste hier berekende effect zou bij een potentiaalverschil van 1 volt per cM. in een veld van 10000 c.g.s. $1{,}4.10^{-8}$ volt geven.

[2]) Gött. Nachr. 1898.

(8 Juni 1898).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 25 Juni 1898.

Voorzitter: de Heer H. G. van de Sande Bakhuyzen.
Secretaris: de Heer J. D. van der Waals.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Brief van den Heer Simon Newcomb te Washington met

dankzegging voor zijne benoeming tot buitenlandsch lid der Akademie.

2°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken met verzoek om advies over een request van den Heer F. C. SMITS, gepensionneerd kapitein van het N.-I. leger, ondersteuning vragende voor de uitgave van een standaardwerk over den kwadratuur van den cirkel. Deze missive vergezeld van twee door den Heer SMITS uitgegeven brochures werd in handen gesteld van de Heeren SCHOUTE en KLUIJVER om daarover advies uit te brengen.

3°. Brief van den Heer P. DROSTE te Haarlem, houdende bericht dat de som van *f* 600.— als tweejaarlijksche uitkeering voor een prijs tot bevordering der kruidkunde, dit jaar weder door het P. W. KORTHALS-fonds wordt beschikbaar gesteld.

Van dezen brief zal mededeeling gedaan worden aan de botanische leden der Afdeeling.

4°. Programma van de Physikalisch-ökonomische Gesellschaft te Koningsbergen, berichtende dat ter gelegenheid van het 100-jarig bestaan een prijsvraag is uitgeschreven voor een arbeid op het gebied der dierlijke- en der plantenphysiologie. De uitgeloofde prijs bedraagt 4000 Mark.

Alvorens tot de werkzaamheden over te gaan, neemt de Voorzitter het woord om in herinnering te brengen dat dezer dagen herdacht is, dat vóór 25 jaar in het licht verscheen de dissertatie van den Secretaris: „*Over de continuiteit van den gas- en vloeistoftoestand.*" Hij wijst op het groote belang van dat geschrift voor de ontwikkeling der natuur- en scheikunde, en dankt den Heer VAN DER WAALS voor wat door hem in het belang der wetenschap en der Akademie is verricht.

Graadmeting. — Rapport van de Commissie, benoemd in de vergadering van 28 Mei 1898, der Natuurkundige Afdeeling van de Kon. Akademie van Wetenschappen om te dienen van advies over het schrijven van den Minister van Binnenlandsche Zaken in zake de tiendeelige indeeling van den tijd en den cirkelomtrek.

Door den Minister van Binnenlandsche Zaken is bij renvooi van 7 Mei j.l., N°. 1135, Afd. K. en W., aan de K. A. v. W., om bericht toegezonden een schrijven van zijnen ambtgenoot van Buiten-

landsche Zaken, van 2 Mei j.l., 1e Afdeeling, N⁰. 4756, waarbij deze verzoekt, het gevoelen der Kon. Akademie van Wetenschappen te vernemen over de door de Fransche regeering gestelde vraag, of het door eene Fransche Commissie overwogene vraagstuk der tiendeelige verdeeling van den dag en van den cirkelomtrek, rijp is om in eene internationale bijeenkomst van deskundigen besproken te worden.

Uwe Commissie heeft deze zaak rijpelijk overwogen. De voor- en nadeelen der verschillende stelsels, die in plaats van het tegenwoordig in gebruik zijnde sexagesimale stelsel aangenomen zouden kunnen worden, zijn in het bijgevoegde Fransche Rapport, onderteekend door den beroemden wiskundige POINCARÉ, duidelijk uiteengezet.

Het stelsel, dat de Fransche Commissie het meest toelacht, is:

1⁰ de tegenwoordige verdeeling van den dag in 24 uren te behouden, maar de uren decimaal te verdeelen,

2⁰ den cirkelomtrek in 400°, en deze verder decimaal te verdeelen, zooals trouwens reeds eene eeuw geleden in de werken van LAPLACE gedaan is, en zoo als de Fransche geodeten bij hunne trigonometrische opneming van Frankrijk gedurende deze geheele eeuw gedaan hebben.

Uwe Commissie, de groote voordeelen van het decimale stelsel inziende, is echter niet blind voor de moeielijkheden, die de invoering van een nieuw stelsel met zich sleept, zoowel door het gelijktijdig bestaan van werken waarin dezelfde grootheden door verschillende getallen zullen worden uitgedrukt, als door de noodzakelijkheid, alle uurwerken en alle cirkels van meetinstrumenten van eene andere verdeeling te moeten laten voorzien, maar een congres heeft juist ten doel, deze moeielijkheden casu quo tot een minimum te herleiden; zij aarzelt dus niet, de gestelde vraag bevestigend te beantwoorden en stelt voor, Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken in overweging te geven, om, indien de bedoelde internationale bijeenkomst wordt samengeroepen, Nederland daarop te doen vertegenwoordigen.

J. A. C. OUDEMANS.
J. C. KAPTEYN.
H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Utrecht, *Groningen* en *Leiden*,
Juni 1898.

De conclusie van het rapport, dat in afschrift aan den Minister zal worden toegezonden, wordt goedgekeurd.

Wiskunde. — De Heer KLUIJVER brengt, ook namens den Heer SCHOUTE, het volgende rapport uit over een in hunne handen gesteld request aan den Minister van Binnenlandsche Zaken van den Heer F. C. SMITS, ondersteuning vragende voor de uitgave van een standaardwerk: „*Over de kwadratuur van den cirkel.*" Het luidt als volgt:

De ondergeteekenden, na kennis genomen te hebben van het request van den gepensionneerden kapitein van het Ned.-Ind. leger, den Heer F. C. SMITS, hebben bevonden, dat diens studie over de kwadratuur van den cirkel tot eene uitkomst leidt, die ten eenenmale in strijd is met de reeds door ARCHIMEDES voor de waarde van π aangegeven grenzen.

Wijl de schrijver tot zijn resultaat komt door beschouwingen, die den toets der critiek niet kunnen doorstaan, komt het den ondergeteekenden wenschelijk voor aan de Akademie voor te stellen om Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken te adviseeren *niet* tot ondersteuning der uitgave van het, door den Heer SMITS bedoelde, werk over te gaan.

Amsterdam,
25 Juni 1898.

P. H. SCHOUTE.
J. C. KLUIJVER.

De conclusie van het rapport wordt goedgekeurd.

Scheikunde. — De Heer BEHRENS doet, ook namens den Heer H. BAUCKE, eene mededeeling getiteld: „*Chemisch en mikroskopisch onderzoek van antimoonhoudende kussenblokmetalen.*"

Door de directie der Holl. IJz. Spoorweg Mij. werden in 1897 verscheidene kussenblokken van Babbits-metaal (82 % Sn, 9 % Sb, 9 % Cu) voor chemisch en mikroscopisch onderzoek beschikbaar gesteld. Eene dergelijke alliage valt bij geleidelijke bekoeling der gesmoltene massa uiteen in eene tinrijke, nagenoeg amorphe moederloog, in teerlingvormige kristallen (waarschijnlijk kuboïde rhomboëders) eener door zoutzuur weinig aangetaste alliage van tin en antimoon en in stralige groepen van brooze staafjes, die uit zeszijdige plaatjes van witachtig geel brons opgebouwd zijn. Het chemisch onderzoek dezer splitsingsproducten is door den heer H. BAUCKE, technoloog te Amsterdam, uitgevoerd, gedeeltelijk langs analytischen, gedeeltelijk langs synthetischen weg, terwijl het mikroskopisch en mechanisch onderzoek mij te beurt viel.

Voor de scheiding der splitsingsprodukten werd in de eerste plaats persen in brijachtigen toestand tusschen heete platen toegepast, daarna

behandeling met geconcentreerd zoutzuur en natronloog. Persing van heet Babbits-metaal levert eene moederloog van tin, waarin 3 % Cu en 3 % Sb opgelost zijn, en eenen perskoek, die in hoofdzaak uit de hierboven genoemde kristallen samengesteld is. Eene alliage van 90 % tin en 10 % *koper* gaf na éénmaal heet persen een hard residu, dat na uittrekken met zoutzuur en natronloog en na wegspoelen van poedervormig koper de samenstelling Cu 35.1, Sn 64.8 vertoonde, terwijl de formule Cu Sn 34.9 Cu en 65,1 Sn vereischt. Bij herhaling van het heet persen staat het brons telkens tin af, zich hierin bij wijze van sommige waterhoudende zouten gedragende.

Veel vaster is de binding van het tin in zijne alliages met *antimoon*. Eene alliage met 10 % Sb gaf na driemaal heet persen een residu, dat bijna uitsluitend uit de teerlingvormige kristallen bestond, hierin met de alliage uit 70 Sn en 30 Sb overeenkomende. Door uittrekken met zoutzuur en uitspoelen van poedervormig antimoon werd eene alliage verkregen, die aan de formule $Sb\,Sn_2$ beantwoordde. Gevonden: 33.7 Sb, 66.3 Sn; berekend: 33.8 Sb, 66.2 Sn. Wordt het gehalte aan antimoon tot 42 % opgevoerd, zoo vertoonen zich tusschen zeer groote teerlingen der verbinding $Sb\,Sn_2$ zuilvormige kristallen, waaraan een hooger smeltpunt toekomt. Persen en behandeling met zoutzuur leidde tot eene alliage van de samenstelling: Sb 50.35, Sn 49 65, beantwoordende aan de formule Sb Sn, die 50.37 Sb, 49.63 Sn vereischt. Verhooging van het antimoongehalte tot 80 % heeft uitkristalliseeren van nagenoeg zuiver antimoon ten gevolge. De antimoonkristallen zijn omhuld door eene in prismatischen vorm kristalliseerende verbinding van tin en antimoon, waarvan de samenstelling, denkelijk aan de formule Sb_2Sn beantwoordende, nog niet vastgesteld is kunnen worden.

Het *mikroskopisch* onderzoek van kussenblokken, die onder spoorwegwagens dienst gedaan hadden, leerde al spoedig, dat heet loopen in een nauw verband staat met schrale ontwikkeling, soms met afwezigheid der teerlingen van tin-antimoon-alliage, dus met fouten bij het gieten der blokken. Door deskundige technici wordt beweerd, dat voor het gieten van goede blokken de alliage niet ver over haar smeltpunt mag verhit worden, dat men kort voor het gieten flink moet omroeren en den vorm op ongeveer 100° verwarmen. Verhit men Babbitsmetaal totdat het oppervlak spiegelend geworden is, zoo verkeeren de teerlingen van $Sb\,Sn_2$ en de bronsstaafjes grootendeels nog in vasten toestand; giet men nu, zonder omroeren, zoo vloeit *tin* met ongeveer 4 % koper en antimoon in den vorm en in den smeltpot blijft eene harde sponsachtige massa, die pas bij zinksmelt-

hitte vloeibaar wordt. Koelt men Babbitsmetaal, dat geheel vloeibaar gemaakt is, plotseling af, door het tusschen twee koude ijzeren platen te gieten, zoo verkrijgt men een nagenoeg amorph, helder klinkend metaal, dat door vijlen en afdraaien bijzonder glad wordt, maar niettemin, zelfs na ruime bedeeling met olie, aan de as kleeft, en dat door verhitten tot beginnende smelting tot rekristallisatie kan gebracht worden, d. w. z. tot afscheiding van vaste kristallen in eene vloeibare moederloog van nagenoeg zuiver tin. Aangezien het vertinnen en kleven der assen verhitting tengevolge *moet* hebben, en deze op hare beurt tot afscheiding van vloeibaar tin leiden moet, dat door de drukking tegen de as uitgeperst wordt, is door deze waarnemingen de aanvankelijk raadselachtige ophooping van teerlingen om de as heen in een der heet geloopene blokken in voldoende mate opgehelderd. Verdere opheldering werd door loopproeven met kussenblokjes verkregen, die onder verschillende omstandigheden gegoten waren en waarin eene gepolijste stalen as met 1600 omwentelingen per minuut onder willekeurig te veranderen drukking ronddraaid werd, terwijl de temperatuur der in hout beslotene blokjes kon nagegaan worden. Blok I was in een door koud water afgekoelden, blok II in een op 100°, blok III in een tot 400° verwarmden vorm gegoten.

Het onderstaande tabelletje geeft de rijzing der temperatuur in eene minuut en de belasting in kilogr. p. cm².

Kgr.	0.3	0.6	1.2	3.0
I	0.50	1.12	1.50	3.80
II	0.64	0.74	0.75	1.64
III	0.65	0.72	2.62	4.64

Blok I was na de proef met 3 kgr. onregelmatig gegroefd, tengevolge van kleven en vreten; blok II vertoonde een duidelijk relief der teerlingen, deze waren glad, de fond daartusschen fijn gestippeld of gedeukt.

Op blok III deden zich de verschijnselen van I en II gecombineerd voor.

Een verrassend resultaat leverde het mikroskopisch onderzoek van het metalliek bezinksel uit de gebruikte smeerolie. Naast fijn poeder

werden aangetroffen: in bezinksel van I: krulletjes, draadjes en hoekige brokjes, in bezinksel van II: bolronde en eironde lichaampjes, op kwikdruppeltjes gelijkende, groot 0.08—0.1 mm.; in bezinksel van III: bolletjes naast hoekige brokjes en krullen.

De geringe verhitting van blok II kan op grond van deze waarnemingen verklaard worden door gelijkmatige smering, tengevolge van het eigenaardige relief, en door het ontstaan van een *kogelleger*, waarbij rollende wrijving in de plaats van schurende gebracht werd. Soortgelijke bolletjes als die van blok II werden bij proeven met blokken van magnoliametaal (77.8 Pb, 16.3 Sb, 5.9 Sn) en van aluminiummessing verkregen, maar niet met blokken van gewoon messing en van grauw gietijzer. Ook is vastgesteld kunnen worden dat zij voortkomen uit kubische kristallen, indien deze in eene zachtere metaalmassa verspreid zijn en wanneer tevens een hard en scherp schuurmiddel aanwezig is, waardoor de harde lichaampjes losgemaakt en afgerond worden.

Hiermede is de mechanische beteekenis der drie splitsingsprodukten van Babbitsmetaal afgebakend. De harde teerlingen van $SbSn_2$ worden door middel van bronspoeder, dat uit de brokkelige staafjes ontstaat, tot bolletjes omgewerkt, op een wijze, die veel overeenkomst heeft met de wijze van ontstaan van rolsteentjes in rivieren, het tin eindelijk doet dienst als bindmiddel; misschien heeft zijn poeder ook eene gunstige uitwerking, door verdikking der smeerolie. Is het metaal zeer grof kristallijn, zoo valt de schuring ongelijkmatig uit en de vorming van bolletjes treedt op den achtergrond, dewijl de meeste teerlingen gekrast en verbrokkeld worden. Verder door te redeneeren heeft geen doel, nu men vertrouwen mag, dat voortgezet onderzoek in de hierboven aangeduide richtingen spoedig meer licht verspreiden zal.

Scheikunde. — De Heer C. A. Lobry de Bruyn doet eene mededeeling over: *„De toestand van in water onoplosbare stoffen in gelatine gevormd."*

De toestand der stof die men de colloïdale noemt, biedt in meerdere richtingen belang aan. De physioloog, de physicus, de chemicus interesseeren zich elk op hun gebied voor de eigenaardige eigenschappen der colloïden. De levensprocessen toch spelen zich voor een belangrijk deel in een colloïdale middenstof of tusschen colloïden af; de rol der colloïdale lichamen bij osmose is algemeen bekend; elk chemicus kent een zeker aantal voorbeelden waarbij sommige stoffen in de colloïdalen, tusschen vloeibaar en vast-amorph gelegen toestand optreden of als z. g. colloïdale oplossing voorkomen.

Eene uitgebreide studie der eigenschappen van colloïdale mengsels of oplossingen, voornamelijk in physisch-chemische richting, hebben wij reeds sinds vele jaren aan den heer van Bemmelen te danken. Bij deze belangrijke onderzoekingen heeft de heer van Bemmelen naast andere eigenschappen, quantitatief de veranderingen bestudeerd die een met water bereid colloïdaal mengsel (een hydrogel) ondergaat bij verandering der temperatuur of bij wisselenden vochtigheidstoestand van den omgevenden atmosfeer.

De waarnemingen waarover ik verlof vraag een kort overzicht te geven, hebben nu niet in de eerste plaats betrekking op veranderingen van een colloïdaal mengsel zelf, maar op den invloed die een hydrogel uitoefent op den physischen toestand van amorphe, onoplosbare lichamen die in het hydrogel als middenstof ontstaan. Die waarnemingen zijn ten deele ontsproten aan ervaringen vroeger reeds opgedaan in den dagelijkschen praktijk van het laboratorium, zooals het uitblijven van praecipitaten indien bij een qualitatief onderzoek bijv. op metalen tevens stoffen zooals gom aanwezig zijn; het niet-praecipiteeren in gelatine-oplossing van zilverchromaat enz. Dergelijke waarnemingen zijn, naar 't mij voorkomt, niet voldoende scherp omschreven door de voorstelling dat de gevormde lichamen in suspensie blijven.

Ervaringen zooals de juist genoemde werden in mijne herinnering teruggeroepen door eene mededeeling van Dr. Ernst Cohen in eene vergadering van 't Amsterdamsch Genootschap. Door Gaedicke was in een photographisch tijdschrift beweerd, dat, indien men aequivalente hoeveelheden van $Ag\,NO_3$ en $K\,Br$ [dit laatste iets in overmaat] in gelatine-oplossing van 5 pCt. samenmengt, deze twee zouten zich slechts ten deele omzetten, terwijl die reactie in water, wegens de buitengewoon geringe oplosbaarheid van Ag Br, totaal verloopt. Deze bewering van Gaedicke zal niemand vreemd voorkomen die deze reactie uitvoert; men ziet n. m. geen praecipitaat van Ag Br ontstaan, alleen eene zwakke opalescentie, terwijl in water een sterke troebeling optreedt. Gaedicke steunde zijne bewering op de waarneming (aan Dr. Cohen onjuist gebleken) dat bij het plaatsen van de gemengde, vast geworden Ag Br-gelatine in water in dit laatste Ag Br vlokken optraden; hij schreef de vorming daarvan toe aan het diffundeeren van niet omgezet K Br en $Ag\,NO_3$ uit de gelatine in het water, waar dan de omzetting plaats vindt en 't gewone vlokkige Ag Br verschijnt.

De opvatting van Gaedicke kwam den heer Cohen direct onwaarschijnlijk voor; dat ze onjuist is heeft hij aangetoond door bepaling van het geleidingsvermogen van de gelatine-oplossingen vóór en na

de menging. De redeneering was eenvoudig; heeft de omzetting volledig plaats, dan moet het geleidingsvermogen van de (in vloeibaren toestand bij 30° onderzochte) gelatine-oplossing gelijk zijn aan dat van $K\,NO_3$; had geen omzetting plaats gevonden, dan moest het geleidingsvermogen grooter zijn en wel des te meer de som de geleidbaarheden van $Ag\,NO_3$ en K Br naderen, hoe onvolkomener de omzetting had plaats gevonden. De proef besliste in den eerst aangegeven zin; de geleidbaarheid was gelijk aan die van $K\,NO_3$ alleen en de bijna niet zichtbare omzetting had toch volledig plaats gevonden; het Ag Br is niet in ionen gesplitst geleidt dus niet.

Men heeft hier dus eenige voorbeelden van verschijnselen voor zich die den chemicus wel moesten treffen; het schijnbaar niet optreden van omzettingen; het uitblijven van neerslagen bij aanwezigheid van gelatine in gevallen waarin men in water alleen rijkelijk praecipitatie waarneemt. Ik heb nu deze waarnemingen verder uitgebreid over een groote reeks van reacties die onder vorming van neergeslagen verloopen. Het is hierbij gebleken dat, wat onder bijzondere omstandigheden voor zuiver waterige oplossingen in verschillende gevallen is waargenomen, n. m. het interessante verschijnsel dat sommige lichamen (kiezelzuur, titaanzuur, chroom- en ijzerhydroxyde, zwavelarseen, — antimoon, — koper, zilver, goud, seleen) colloïdaal in oplossing kunnen blijven, voor oplossingen in waterige gelatine regel is. Het colloïdale milieu houdt amorphe-lichamen die men er in doet ontstaan, colloïdaal opgelost. Zulks geldt bijv. voor de halogeenverbindingen van zilver, de sulfiden en vele hydroxyden der zware metalen, voor metallisch zilver, goud en kwik, voor zilverchromaat, berlijnsch blauw, koperferrocyanide, loodjodide, mangaanperoxyde enz. Zij allen geven doorzichtige gelatinen die bij afkoeling vast worden, hunne doorzichtigheid behouden maar dikwijls bij opvallend licht een inwendig reflex of fluorescentie vertoonen. Vooral voor de gekleurde lichamen, die ik in de eerste plaats hier heb aangehaald, is het verschijnsel in zooverre nog opmerkenswaard omdat men, juist door het optreden van de kleur omtrent het plaats vinden van de omzetting niet (zooals bij Ag Cl of Ag Br) in twijfel behoeft te zijn en zich dus niet door bepaling van het geleidingsvermogen van het plaats vinden dier omzetting behoeft te overtuigen.

De wijze van opereeren is voor alle gevallen ongeveer dezelfde; wijzigingen in de concentratie van sommige der zoutoplossingen, noodig door het optreden van vlokkige afscheidingen in de gelatine, verraden zich van zelf. Er werd uitgegaan van eene 10 pCt. gelatine-

oplossing, die warm door een zeeftrechter was gefiltreerd [1]), hiermee werd door toevoeging van een gelijk volume der te mengen zoutoplossingen (die meestal $^1/_{10}$ à $^1/_{20}$ normaal waren) oplossingen verkregen die 5 pCt. gelatine bevatten met het zout als $^1/_{20}$ à $^1/_{40}$ normaal. Deze nog vloeibare oplossingen (temp. ± 30°) werden onder sterk roeren gemengd en snel tot vastworden afgekoeld. Men verkrijgt dan volkomen doorschijnende al naar de concentratie en de dikte der laag min of meer opalesceerende massa's, die het opvallend licht inwendig reflecteeren en naar het mij voorkomt ook fluorescentie vertoonen. De vorming van het colloïdale zilver, dat zooals bekend door Carey Lea in waterige oplossing voor 't eerst is bereid, geschiedt reeds in de gelatine met $Ag\,NO_3$ alleen vooral onder den invloed van 't licht; in zeer geconcentreerden toestand treedt het op na toevoeging van wat formaldehyde; het is dan zwart-bruin, in dunne lagen nog volkomen doorschijnend en bij de sterkste vergrooting homogeen; alleen aan de glaswand zet het zich zeer langzaam als metaalspiegel af.

Zonder de verschillende gevallen meer in 't bijzonder na te gaan zij alleen nog opgemerkt, dat het mij niet gelukt is stoffen die kristallijn praecipiteeren of althans zeer spoedig kristallijn worden, in een milieu van gelatine colloïdaal opgelost te houden. Calcium-oxalaat, barium-sulfaat, ammonium-magnesium-phosphaat en eenige andere stoffen vormen zich in gelatine als mikroskopische goed gevormde kristallen of als deeltjes die een kristallijn voorkomen hebben. In 't algemeen schijnt het mij, dat uit de vele gevallen die ik heb waargenomen de conclusie mag worden getrokken dat het zichtbaar praecipiteeren van amorphe lichamen door gelatine wel, dat van kristallijne niet of minder gemakkelijk wordt verhinderd.

Welke is nu de graad van verdeeling der stof, de grootte der deeltjes die door hun ontstaan in een colloïdaal milieu verhinderd worden zich samen te voegen tot zichtbare massa's? Het geldt hier m. i. niet een verschijnsel van suspensie of emulsie; deze termen past men toe op mikroskopisch zichtbare deeltjes; ik heb daarom ook van colloïdale oplossingen in een colloïd gesproken. De afmetingen van de deeltjes ligt zonder twijfel ver buiten den grens van het mikroskopisch zichtbare en omvat dus het groote gebied dat gelegen is tusschen die der moleculen zelve en der met de sterkste vergrooting nog zichtbare partikels. Men mag hier al naar den aard der stoffen en de wijze van opereeren (concentratie der

---

[1]) De gelatine bevat een weinig chloor (± 0,1 pCt. HCl) en wat zwavelzuur. Hiermee moet bij sommige reactie's, bijv. bij de vorming van $Ag_2\,Cr\,O_4$, rekening gehouden.

gelatine en der zouten enz.) zeer verschillende dimensie's verwachten. Picton en Lindner, die o. a. voor de waterige colloïdale oplossing van arseensulfide hebben aangetoond, dat het geleidingsvermogen buitengewoon klein is, nemen een viertal verschillende graden van verdeeling dezer stof aan [1]). Scherpe onderscheidingen zullen hier echter wel niet kunnen gemaakt worden; continu veranderende overgangen in de afmetingen der deeltjes zijn veel waarschijnlijker.

De studie van het verschijnsel der inwendige lichtreflexie of der fluorescentie dat in verschillende mate bij meerdere der in gelatine gevormde stoffen optreedt kan allicht tot een nader inzicht voeren; men vindt deze optische verschijnselen terug bij lichamen zooals melkglas, dat ook onzichtbare, buitengewoon fijne bijmengsels bevat. Andere echter der colloïdale oplossingen in gelatine zijn niet alleen geheel doorzichtig maar vertoonen geen lichtreflex of fluorescentie; men mag dus aannemen, dat de verdeeling der stof in de gelatine die van opgeloste lichamen in water nadert. Tegenover verschijnselen als de hier genoemde schijnt het begrip van opgelost zijn, zijne scherpte te verliezen.

Interessant zijn nog de chemische reactie's die men door diffusie met de in gelatine gevormde stoffen kan uitvoeren en waarbij men de eene in de andere kan overvoeren. Indien men een Na Cl-gelatine omgeeft met een $Ag_2\,Cr\,O_4$-gelatine, dan diffundeert het Na Cl uit de eerste gelatine in de tweede, het aanwezige colloïdale $Ag_2\,Cr\,O_4$ is n. m. niet (of slechts zeer weinig) diffusiebel, terwijl men weet (bijv. door proeven van Graham en Hugo de Vries) dat de in ionen gesplitste zouten in gelatine even snel diffundeeren als in water. Bij het indringen nu van de Na en Cl ionen wordt het steenroode $Ag_2\,Cr\,O_4$ omgezet in Ag Cl dat eveneens colloïdaal in oplossing dus doorzichtig blijft en zich als een ring uitbreidt.

Sterrenkunde. — De Heer van de Sande Bakhuyzen doet, namens Dr. E. F. van de Sande Bakhuyzen, eene mededeeling getiteld: „*De beweging der Aardpool volgens de waarnemingen van de jaren* 1890—1896".

1. Bij de bewerking der meridiaanwaarnemingen, welke in de laatste 20 jaren te Leiden verricht zijn, was het noodig tot eene zoo juist mogelijke kennis te komen van de verandering der poolshoogte gedurende die periode, en alvorens de Leidsche waarnemingen

---

[1]) Journ. Chem. Soc. **61**, 137, **67**, 63, **71**, 568.

zelven in dit opzicht te onderzoeken, scheen het wenschelijk te trachten eerst uit andere bronnen gegevens daaromtrent af te leiden.

Sedert in 1891 door CHANDLER de 14-maandelijksche periode in de beweging der aardpool gevonden was, zijn daarover door hem een groot aantal berekeningen en onderzoekingen verricht. Andererzijds werden in 1894 door H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN [1]) de voornaamste waarnemingsreeksen der laatste 50 jaren aan een streng en samenvattend onderzoek onderworpen, waarbij de uitkomsten uit de Leidsche waarnemingen van de jaren 1864—1874 door de uitvoerige onderzoekingen van den Heer WILTERDINK [2]) verkregen, ook ten opzichte van die der overige sterrenwachten een aanzienlijk gewicht in de schaal bleken te leggen.

Intusschen was men begonnen, speciale waarnemingsreeksen te ondernemen bepaaldelijk met het doel om het vraagstuk der poolshoogte te onderzoeken en weldra werden door de vrijwillige samenwerking van een aantal sterrenkundigen belangrijke uitkomsten verkregen. Reeds eenige malen zijn door Prof. ALBRECHT in de verslagen van de „Internationale aardmeting" mededeelingen omtrent die uitkomsten gedaan, en nu laatstelijk is door hem een uitvoerig verslag gegeven omtrent den stand van het vraagstuk in December 1897 [3]), waarin hij de geheele reeks der verkregen uitkomsten door eene samenhangende kromme voor de poolbeweging vereffende.

Eerst een klein deel van deze uitkomsten kon door H. G. v. d. S. BAKHUYZEN gebruikt worden, en wel zijn door CHANDLER ook hieromtrent reeds vele berekeningen verricht, doch vaak ontbreekt het daarbij aan de noodige kritiek op de gebruikte waarnemingen. Het kwam mij dus voor, dat ook na dit alles een nieuw onderzoek wenschelijk was, dat nu het geheele tijdvak van 1890 tot 1897 kon omvatten. Daar de uitkomsten waartoe ik daarbij kwam, misschien ook eenig belang kunnen hebben afgescheiden van het bijzondere doel waartoe ik mijn onderzoek ondernam, veroorloof ik mij ze hier in het kort mede te deelen.

2. ALBRECHT kon over de waarnemingen van 19 sterrenwachten beschikken: n.l. *Tokio*, *de Kaap*, 10 sterrenwachten in *Europa*, 6 in *Amerika* en eindelijk *Honolulu* waar in 1891—92 een tijdelijk waarnemings-station opgericht was. Op weinige uitzonderingen na

---

[1]) Verslag der Verg. Akad. Amsterdam, Febr. 1894, en ook Astr. Nachr. Bd. 136 en 137.

[2]) Verslag der Verg. Akad. Amsterdam, Dec. 1892.

[3]) TH. ALBRECHT, Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation im December 1897.

zijn de waarnemingen volgens de Horrebow-methode verricht. Op geene enkele plaats echter omvatten zij het gehcele tijdvak en dus moest ALBRECHT omvangrijke berekeningen ondernemen, om in opvolgende benaderingen voor iedere plaats de gemiddelde poolshoogte af te leiden, en alle uitkomsten met elkander te verbinden tot een samenhangend stelsel van coördinaten, waardoor de oogenblikkelijke plaatsen der pool ten opzichte eener gemiddelde worden voorgesteld. ALBRECHT koos als coördinatenassen den meridiaan van *Greenwich* en een 90° westwaarts, welke midden over Amerika gaat, en hij geeft ten slotte, nevens eene kromme voor de poolbeweging, voor ieder tiende deel 's jaars van 1890.0 tot 1897.5 de bedoelde coördinaten x en y.

De kromme van ALBRECHT is vrij samengesteld, en dus mag men aannemen, dat door zijne, ongetwijfeld met groote zorg uitgevoerde, vereffening aan de waarnemingen weinig geweld gedaan is. Ik meende daarom voor mijne verdere berekeningen het omslachtige werk van een teruggaan tot de oorspronkelijke waarnemingen te kunnen ontgaan, en mij met gerustheid van de x- en y-coördinaten van ALBRECHT te mogen bedienen. Ten slotte heb ik echter mijne uitkomsten ook nog met de oorspronkelijke waarnemingen vergeleken.

Ik heb nu, terwijl het wel vaststaat dat de poolbeweging ten minste in hoofdzaak saamgesteld is uit eene 14-maandelijksche en eene jaarlijksche,

1e, onderzocht de 14-maandelijksche beweging;

2e, de jaarlijksche beweging;

3e, nagegaan in hoeverre de waarnemingen kunnen worden voorgesteld door de combinatie eener *standvastige* 14-maandelijksche en jaarlijksche beweging.

3. *Veertienmaandelijksche beweging.*

Daar ik voor mijne berekening de uitkomsten 1897.0—1897.5 buiten beschouwing liet, had ik over 70 x- en 70 y-coördinaten te beschikken. Als lengte der periode voorloopig 432 dagen aannemende, vindt men dat 6 perioden = 7 jaren + 35 dagen zijn. Het materiaal laat dus eene goede scheiding van beide bewegingen toe, doch aan de onderlinge meetbaarheid is niet zoo nauwkeurig voldaan, dat men daarop eene gemakkelijke bepaling der elementen van beide nevens elkander kan gronden. Ik begon dus met de jaarlijksche beweging in 1e benadering af te leiden, en gebruikte dan de daarvan bevrijde x- en y-coördinaten ter bepaling der 14-maandelijksche.

De berekening der x en der y geschiedde onafhankelijk van elkander, en, onder aanneming der periodeduur van 432 dagen, vereenigde ik beide malen de 70 waarden tot 8 middentallen, die dan

aan de berekening van periodieke formules ten grondslag werden gelegd.

Zoo verkreeg ik:

$$x = + 0''.151 \cos 2\pi \frac{t - 2412439}{432}$$

$$y = - 0''.143 \sin 2\pi \frac{t - 2412438}{432}$$

waarin de epochen uitgedrukt zijn in Juliaansche datums.

Daardoor worden mijne 8 middentallen als volgt voorgesteld:

x waarn.	$W-R$	y waarn.	$W-R$
+ 0″.127	— 0″.017	— 0″.046	— 0″.003
+ 076	+ 7	— 115	+ 13
— 040	+ 7	— 118	+ 18
— 145	— 10	— 085	— 22
— 164	— 21	+ 036	— 12
— 056	+ 10	+ 157	+ 28
+ 059	+ 7	+ 141	+ 7
+ 120	— 15	+ 042	— 21

en

$$\sqrt{\frac{\Sigma \Delta x^2}{n}} = \pm 0''.013 \qquad \sqrt{\frac{\Sigma \Delta y^2}{n}} = \pm 0''.017$$

ALBRECHT neemt als midb.fout zijner coördinaten 0.″04 aan, waarnaar die van het midden van 9 waarden, waarmede wij hier te doen hadden, 0.″013 zou bedragen.

Men ziet dat de gevonden amplituden in x en y op weinig na gelijk zijn en dat het phaseverschil op slechts 1 dag na 90° bedraagt. De beweging blijkt dus met groote benadering *cirkelvormig* te zijn, en wel *rechtloopend* d. i. met de aardrotatie mede, van west naar oost.

Ter bepaling van de lengte der periode, moeten deze uitkomsten

met die van vroegere waarnemingen verbonden worden. Ik gebruikte daartoe niet het geheele door H. G. v. d. S. Bakhuyzen saamgestelde material, doch koos alleen de meest zekere uitkomsten uit nl. die uit Leiden 1864—1874 en uit Pulkowa 1882—1892, waarvoor de M. f. verreweg het kleinst zijn. Zoo verkreeg ik als maximumepochen der x, = maximumepochen der poolshoogte voor Greenwich:

				W—R	W—Ch
Leiden	1864—68	Fundam. Sterren	2403394	+ 2	— 19
»	1864—74	Polaris	2403386 [1])	— 6	— 27
		Gemiddeld	2403390	— 2	— 23
Pulkowa	1882—92	Vertik. Cirkel	2410298	+ 8	— 7
Waarn.	1890—96	Samenst. Albrecht	2412439	— 6	+ 13

Gevende aan de 3 uitkomsten gelijke gewichten, zoo volgt:

Maximum-epoche 2408565
Periode . . . 431.11 dagen.

waarmede de hier boven in de voorlaatste kolom opgegeven fouten overblijven.

De nu gevonden maximumepoche valt 4 dagen vroeger dan die naar de uitkomsten van H. G. v. d. Sande Bakhuyzen, terwijl door hem voor de lengte der periode eerst 431.22, later 431.55 gevonden was. Had ik zijne gemiddelde maximumepoche met mijne uitkomst verbonden dan zou voor de periodelengte 430.36 gevonden zijn.

De gevonden uitkomst is dus weder in goede overeenstemming met de onderstelling dat de lengte der periode gedurende de laatste 35 jaren onveranderd is gebleven. Zij kan gedurende dat geheele tijdvak niet aanmerkelijk van 431 dagen hebben verschild, en eene zoo sterke veranderlijkheid, als Chandler aanneemt, wordt reeds nu door de waarnemingen weersproken. Dit blijkt vooreerst uit de verschillen: Waarn.—Ch., die ik in de laatste kolom van bovenstaand tabelletje opnam. In de tweede plaats echter leidde de overweging, dat juist in de allerlaatste jaren de epochen volgens beide onderstellingen sterk van elkander gaan afwijken, mij er nog toe de 3 laatste jaren uit de samenstelling van Albrecht afzonderlijk te onderzoeken. Ik

---

[1]) Deze getallen wijken resp. 3 en 4 dagen af van die in de samenstelling van H. G. B., daar ik de uitkomsten van Wilterdink een weinig anders opvatte.

bewerkte alleen de x coördinaten en bepaalde daaruit de epoche op dezelfde wijze als te voren. De uitkomst, hoewel noodzakelijk minder zeker, daar nu ook eene fout in de aangenomen jaarlijksche beweging van invloed is, stemt echter bijna volkomen overeen met die uit de 7 jaren te zamen.

Ik vond nl.:

Ep. v. Max.	W—R	W—Ch.
2413299	— 8	+ 27

De fout der CHANDLER'sche hypothese is dus in 1895 reeds vrij aanzienlijk.

Beschouwen wij nu de amplitude. Wanneer wij mijne uitkomsten uit de x en y naar de gewichten vereenigen en daaraan eenige vroeger gevonden waarden toevoegen, zoo heeft men:

			Amplitude
Leiden	1864—68	Fundam. sterren.	0".156
»	1864—74	Polaris	0 .158
Pulkowa	1882—92		0 .139
Einduitk. H. G. B.	1860—92		0 .168
Uitkomst	1890—96		0 .148

Hierbij is op te merken, dat de uitkomst uit Pulkowa waarschijnlijk te klein is, wegens de ongelijkmatige verspreiding der sterren, waarvoor bij de bewerking der Leidsche waarnemingen door WILTERDINK eene verbetering aangebracht werd.

Eene verandering in de amplitude sedert 1860 is dus evenmin nu waarschijnlijk, als zij dat te voren aan H. G. v. d. SANDE BAKHUYZEN voorkwam. Daarentegen mag men, zooals ook hij reeds opmerkte, de waarnemingen vóór 1860, zeker wat de amplitude en misschien ook wel wat de phase betreft, niet met de latere verbinden. Dit zou kunnen samengaan met de opvatting der 431-daagsche periode als een eigen slingertijd der aarde, wanneer men aanneemt[1]) dat van tijd tot tijd plotselinge oorzaken den onderlingen stand van omwentelings- en traagheidsas kunnen veranderen.

---

[1]) Zie ook GYLDEN Astr. Nachr. Bd. 132. N^0. 3157.

Ten slotte zou ik als waarschijnlijkste elementen der 431-daagsche beweging sedert 1860 willen aangeven:

Doorgangstijd door de posit. x-as	2408565
Periode	431.1 dag
Amplitude	0''.155

en dus

$$x = + 0''.155 \cos 2\pi \frac{t - 2408565}{431.1}$$

$$y = - 0''.155 \sin 2\pi \frac{t - 2408565}{431.1}$$

4. *Jaarlijksche beweging.*

Aan de oorspronkelijke x's en y's van ALBRECHT werden de waarden volgens de afgeleide 431-daagsche beweging aangebracht, om uit de residuen de jaarlijksche beweging in 2e benadering af te leiden. Ik gebruikte daarbij echter waarden die een weinig van de boven als waarschijnlijkst genoemde afweken. Als amplitude nam ik nl. aan 0.''151, als periode 431.0 en als epoche, die welke uit ALBRECHT alleen volgde, 2412439 (of 2408560).

De overeenkomstige waarden voor de verschillende jaren middelende, verkreeg ik voor de x en voor de y 10 middentallen, waaruit periodieke formules, alleen met de enkele hoeken, afgeleid werden, even als bij de 1e benadering geschied was.

De uitkomsten voor de 7 jaren te zamen gevonden weken slechts weinig af van die, welke de 1e benadering had opgeleverd, doch ik had nu ook gelegenheid het tijdvak in tweeën te splitsen en uit iedere helft afzonderlijk de jaarlijksche beweging af te leiden. Dit scheen wenschelijk daar het a priori zeer goed mogelijk was dat deze waarschijnlijk door meteorologische invloeden veroorzaakte beweging in de verschillende jaren merkbaar kan uiteenloopen.

Ik vond dan:

	Uit de x	Uit de y
1890—96	$x = + 0''.116 \cos 2\pi \frac{t-261}{365}$	$y = + 0''.067 \cos 2\pi \frac{t-143}{365}$
1890—92	$x = + 0''.123 \cos 2\pi \frac{t-252}{365}$	$y = + 0''.087 \cos 2\pi \frac{t-126}{365}$
1893—96	$x = + 0''.113 \cos 2\pi \frac{t-269}{365}$	$y = + 0''.058 \cos 2\pi \frac{t-163}{365}$

De maximum-epochen zijn hier uitgedrukt in dagen sedert den aanvang des jaars; drukt men ze uit in datums, zoo zijn zij:

t_0 = Sept. 18	t_0 = Mei 23
Sept. 9	Mei 6
» 26	Juni 12

Door de formule voor het geheele tijdvak worden de gebruikte middentallen aldus voorgesteld:

x waarn.	$W-R$	y waarn.	$W-R$
− 0″.034	− 0″.009	− 0″.060	− 0″.008
− 085	+ 2	− 011	+ 6
− 117	− 2	+ 032	+ 8
− 107	− 7	+ 060	+ 4
− 061	− 15	+ 054	− 13
+ 025	0	+ 051	− 1
+ 089	+ 2	+ 024	+ 7
+ 109	− 6	− 017	+ 7
+ 089	− 11	− 058	− 2
+ 045	− 1	− 067	0

$$\sqrt{\frac{\Sigma \Delta x^2}{n}} = \pm\ 0''.007 \qquad \sqrt{\frac{\Sigma \Delta y^2}{n}} = \pm\ 0''.007$$

De middelbare afwijkingen, die bij toetsing der middentallen voor de halve tijdvakken gevonden worden, zijn nagenoeg van dezelfde grootte.

Zoowel voor het geheele tijdvak, als voor de beide helften blijken de amplituden in x en y aanmerkelijk verschillend te zijn, terwijl het phaseverschil duidelijk afwijkt van 90° = 91 dagen; het bedraagt in de 3 gevallen 117°, 124° en 105°. De baan der jaarlijksche poolbeweging is dus eene vrij excentrische ellips, wier hoofdassen schuin gericht zijn ten opzichte van den meridiaan van Greenwich. Zij wordt met groote benadering volgens eene enkelvoudig periodieke bewe-

ging doorloopen. De middelbare afwijkingen der waarnemingen zijn hier zelfs aanmerkelijk geringer dan in het geval der 431-daagsche beweging.

Om deze elliptische beweging nader te onderzoeken, heb ik in de 3 gevallen de coördinatenassen zoover gedraaid, dat zij samenvielen met de hoofdassen der ellipsen. Daarbij bleek vooreerst dat de groote assen der ellipsen *oostelijk* van den meridiaan van Greenwich vallen en daarmede de volgende hoeken maken:

ellips	1890—96	19°	Oost.
»	1890—92	29°	»
»	1893—96	10°	»

Verder werd als bewegingscomponenten volgens de nieuwe coördinatenassen, dus volgens de hoofdassen, gevonden:

$$1890-96 \quad x = +\,0''.121 \cos 2\pi \frac{t\text{–Sept. }28}{365} \quad y = -\,0''.057 \sin 2\pi \frac{t\text{–Sept. }28}{365}$$

$$1890-92 \quad x = +\,0''.136 \cos 2\pi \frac{t\text{–Sept. }23}{365} \quad y = -\,0''.065 \sin 2\pi \frac{t\text{–Sept. }23}{365}$$

$$1893-96 \quad x = +\,0''.114 \cos 2\pi \frac{t\text{–Oct. }1}{365} \quad y = -\,0''.055 \sin 2\pi \frac{t\text{–Oct. }1}{365}$$

De beweging is dus *rechtloopend*, even als de 431-daagsche, en de tijden t_0 drukken de doorgangstijden uit door de positieve helften der groote assen. De voor de twee halve tijdvakken gevonden bewegingen wijken niet zooveel van elkander af, dat zich de realiteit van het verschil tusschen beide waarborgen laat. Voorloopig is dus, naar ik meen, als waarschijnlijkste baan voor de jaarlijksche poolbeweging gedurende het geheele tijdvak een ellips aan te nemen, wier groote as 19° oostelijk ligt van den meridiaan van Greenwich en wier halve assen 0.″12 en 0.″06 bedragen.

Reeds in 1894 was door CHANDLER voor de jaarlijksche componente een excentrische baan gevonden [1]), en ik kan dus zijne uitkomst in het algemeen volkomen bevestigen. Zijne ellips heeft echter eene grootere helling (45° oost van den merid. van Greenwich) en ook wat grootere excentriciteit (halve assen 0.″16 en 0.″05) dan de mijne.

De uitkomsten van absolute bepalingen van zenitsafstanden kunnen zoozeer den invloed ondervinden van systematische storingen van jaarlijksche periode, dat ik niet geloof dat zij zullen kunnen bijdragen tot een nauwkeuriger kennis van den jaarlijkschen term der

[1]) Astron. Journal, No. 323, 329 en 402.

poolbeweging. Ook uitkomsten naar de Horrebow-methode verkregen zijn zeker niet geheel vrij van zulke storingen, en bepaaldelijk is daarbij den invloed van een hellenden stand der luchtlagen, hetzij in of buiten het waarnemingslokaal, te vreezen (zie o. a. ALBRECHT „Bericht enz." pag. 11—12). Toch geloof ik dat, vooral ook wegens de goede onderlinge overeenstemming der uitkomsten 1890—92 en 1893—96, waartoe gedeeltelijk verschillende sterrenwachten hebben meegewerkt, de gevonden uitkomsten in hoofdzaak betrouwbaar zullen zijn.

Ook H. G. v. d. SANDE BAKHUYZEN gebruikte ter afleiding van den jaarlijkschen term alleen de toenmaals bekende uitkomsten van Horrebow-waarnemingen, nl. de waarnemingsreeksen te Berlijn, Potsdam, Praag en Straatsburg verricht in de jaren 1889—1892. Natuurlijk kan daaruit alleen de x-coördinaat afgeleid worden en doet men dit, door, ter reductie voor de kleine lengteverschillen, de beweging als cirkelvormig aan te zien, dan wordt zijne uitkomst:

$$x = + 0''.112 \cos 2\pi \frac{t - \text{Sept. } 12}{365}$$

in merkwaardige overeenstemming met hetgeen nu uit het zooveel vollediger materiaal afgeleid werd.

Gaan wij ten slotte na wat zich over de beteekenis der gevonden uitkomsten zeggen laat. In 1890 vestigde RADAU [1]) er het eerst de aandacht op, dat, door samenwerking van periodieke massa-verplaatsingen van het jaargetijde afhankelijk met de eigen periode der aardas, die toenmaals op ongeveer 304 dagen gesteld werd, bewegingen der traagheidsas ten gevolge der genoemde verplaatsingen, sterk vergroot op de rotatieas kunnen overgaan. Wegens het betrekkelijk geringe verschil tusschen de periode der storende werking en de eigen periode, heeft men met verschijnselen te doen, die als resonantie kunnen opgevat worden en daardoor ontstaat de mogelijkheid, dat de betrekkelijk kleine massa-verplaatsingen, welke meteorologische invloeden kunnen teweeg brengen, eene vrij aanzienlijke beweging der rotatieas veroorzaken. Kort daarna werd de zaak nader onderzocht door HELMERT [2]), die aantoonde dat de algemeene elliptische beweging van de traagheidspool bewegingen van de rotatiepool veroorzaakt in banen, die in de verschillende gevallen alle vormen kunnen bezitten van den cirkel met rechtloopende beweging af, door al meer en meer excentrische ellipsen en den rechten lijn heen, tot aan ellipsen met

---

[1]) Bulletin astron. T. VII, pag. 352.
[2]) Astron. Nachr. Bd. 126, N°. 3014.

retrograde beweging en ten slotte den retrograden cirkel. In het gunstigste geval (eene rechtloopende cirkelvormige beweging van de traagheidspool) gaat de beweging 6 maal vergroot, in het ongunstigste (een retrograde cirkel) tot ongeveer de helft verkleind over. Is de beweging der traagheidspool niet eene elliptische, maar wordt zij algemeener uitgedrukt door eene reeks van periodieke termen, dan gaan deze, naarmate men tot hoogere termen komt, al meer en meer verkleind op de rotatiepool over. In het algemeen zullen dus onregelmatigheden in de beweging der eerste veel minder merkbaar zijn in die der tweede.

Dit alles blijft niet alleen in beginsel doorgaan, wanneer men aanneemt dat de eigen-periode der aardas 431 dagen bedraagt, maar ook de getallenwaarden blijven nagenoeg dezelfde [1]). Het was dus mogelijk en van belang na te gaan, welke beweging van de traagheidspool moet aangenomen worden, om de door mij gevonden jaarlijksche beweging van de rotatiepool te verklaren. Voert men daartoe mijne eind-uitkomsten voor 1890—96 in de algemeene formules in, dan vindt men als coördinaten der *traagheidspool* op de gewijzigde assen:

$$x = + 0''.055 \cos 2\pi \frac{t\text{—Sept. } 28}{365}$$

$$y = + 0''.084 \sin 2\pi \frac{t\text{—Sept. } 28}{365}$$

d. i. de beweging, moet *terugloopend* zijn, de hoofdassen hebben dezelfde richting als die der rotatiepool, doch zijn in grootte verwisseld en de beweging der traagheidspool is slechts weinig kleiner dan die der rotatiepool. Om eene sterkere verhouding te verkrijgen, moest de ellips der laatste minder excentrisch zijn.

Voor de verklaring van het verschijnsel is dus ten slotte nog weinig gewonnen. Alleen kan men misschien beter begrijpen dat de jaarlijksche beweging der rotatiepool vrij regelmatig zijn kan, al is voor de traagheidspool a priori het tegendeel waarschijnlijk.

5. *Vergelijking der waargenomen beweging met de som der beide aangenomen termen.*

Vooreerst zijn de x en y van ALBRECHT met de berekende waarden vergeleken. Ik nam daarbij voor de 431-daagsche beweging dezelfde elementen aan, die gediend hebben voor de afleiding der jaarlijksche, en voor de jaarlijksche mijne einduitkomsten uit het geheele tijdvak.

Zoo vond ik de navolgende verschillen tusschen waarneming en rekening uitgedrukt in honderdste deelen van secunden.

[1]) Zie ook NEWCOMB Monthl. Not. 1892, Maart.

x Albrecht — x berekend.

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
1890	−10	−6	−2	+1	+2	+2	+1	−1	−6	−7
91	−8	−4	−1	0	+3	+3	+1	0	+2	+5
92	+6	+6	+1	−3	−5	0	+3	+2	−1	−2
93	−1	+1	+2	+2	0	+4	+1	−1	−2	0
94	+2	+4	+6	+7	+4	+2	0	−2	0	+3
95	+4	0	−7	−10	−10	−8	−3	−2	−2	0
96	+1	+1	−1	−3	−4	−3	−2	+1	+2	+3
97	+6	+5	+6	+3	−2	−6				

y Albrecht — y berekend.

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
1890	−4	+5	+9	+8	+4	+2	−1	−2	−3	−6
91	−7	−3	+1	+7	+4	−3	−9	−11	−6	+1
92	+7	+8	+2	−5	−8	−1	+4	+6	+1	0
93	0	+1	0	−2	−4	−1	−2	−1	0	−1
94	0	0	+3	+5	+1	−1	−2	−2	−1	0
95	−1	−5	−6	−7	−8	−6	+6	+6	+5	+1
96	−1	−2	−3	−2	+2	+8	+9	+9	+2	+4
97	+1	−4	−1	−3	−4	−1				

$$\sqrt{\frac{\Sigma \Delta x^2}{n}} = \pm 0''.040 \qquad \sqrt{\frac{\Sigma \Delta y^2}{n}} = \pm 0''.045\ ,$$

terwijl ALBRECHT als M. f. zijner coördinaten aanneemt ± 0″.04, d. i. nagenoeg even groot. De gevonden verschillen vertoonen echter meermalen een systematisch karakter.

In de tweede plaats werden de oorspronkelijke waarnemingsresultaten — gewoonlijk maandmiddentallen — zooals ALBRECHT die mededeelt, met mijne formule vergeleken en werd voor iedere sterrenwacht [1]) de middelbare afwijking van zulk eene uitkomst opgemaakt;

[1]) Bestaan voor één sterrenwacht meerdere gescheiden waarnemingsreeksen, dan tel ik die evenals ALBRECHT afzonderlijk; verder gebruik ik ook als hij slechts de waarnemingen tot 1896.5. Zoo komt men, wanneer men 4 zeer korte weglaat, tot 27 reeksen. De waarnemingen, welke ALBRECHT verwierp wegens duidelijk blijkende systematische fouten, zijn ook door mij buiten rekening gelaten.

door ALBRECHT zelven was reeds de vergelijking der waarnemingen met zijne kromme uitgevoerd. Verder werden voor iedere sterrenwacht de afwijkingen zoowel van ALBRECHT als van mij tot halfjaarlijksche middentallen (voor zomer- en winterhalfjaar) vereenigd, en eindelijk werden ook hieruit middelbare afwijkingen opgemaakt; daarbij werden de middentallen welke uit slechts ééne uitkomst gevormd waren buiten rekening gelaten.

Het zou te veel ruimte vorderen deze vergelijkingen hier uitvoerig mede te deelen, en ik zal mij dus bepalen tot enkele uitkomsten die daaruit afgeleid zijn.

Noemt men de *middelbare* afwijkingen der enkele waarnemingsuitkomsten van ALBRECHT en van mij, voor iedere sterrenwacht opgemaakt, Δ_A en Δ_B en de overeenkomstige grootheden voor de halfjaarlijksche middentallen Δ'_A en Δ'_B, dan vind ik, wanneer ik uit de 27 waarden voor ieder dezer grootheden: gemiddelden vorm:

Δ_A gemidd. $= \pm$ 0''.061 $\quad$ Δ'_A gemidd. $= \pm$ 0''.033

Δ_B gemidd. $= \pm$ 0 .071 $\quad$ Δ'_B gemidd. $= \pm$ 0 .048

Onder de 27 reeksen is Δ_B 5 maal kleiner dan Δ_A (Pulkowa 2e reeks, Berlijn 1e r., Kaap, Potsdam 2e r. en Lyon) en 22 maal grooter; voor de Δ' zijn de overeenkomstige aantallen ook 5 en 22.

Gebruik ik alleen de 18 reeksen met de kleinste midb. afwijkingen van ALBRECHT, dan vind ik:

Δ_A gemidd. $= \pm$ 0''.051 $\quad$ Δ'_A gemidd. $= \pm$ 0''.029

Δ_B gemidd. $= \pm$ 0 .061 $\quad$ Δ'_B gemidd. $= \pm$ 0 .041

Dat de Δ_B in het algemeen grooter zijn dan de Δ_A, kan toegeschreven worden aan werkelijke afwijkingen van mijne formule en aan systematische fouten der waarnemingen, die voor een deel in de kromme van ALBRECHT zullen zijn overgegaan.

Als middelbare waarden van de som dier invloeden (afwijkingen van mijne formule en gedeeltelijke invloed der systematische fouten) vindt men, uit alle sterrenwachten gezamenlijk:

$$\sqrt{\frac{\Sigma(\Delta_B^2-\Delta_A^2)}{27}} = \pm\ 0''.037 \qquad \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta'_B{}^2-\Delta'_A)^2}{27}} = \pm\ 0''.036$$

en uit de 18 nauwkeurigste reeksen alleen:

$$\sqrt{\frac{\Sigma(\Delta_B^2-\Delta_A^2)}{18}} = \pm\ 0''.033 \qquad \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta'_B{}^2-\Delta'_A)^2}{18}} = \pm\ 0''.033.$$

Het blijkt dus nu: 1°. dat de gezamenlijke invloed der beide omstandigheden zeer merkbaar is, 2°. dat invloeden in het spel zijn, die gedurende vrij langen tijd standvastig werken, 3°. dat zij in mindere mate optreden is bij de nauwkeurigste waarnemingsreeksen. Zeker zijn dus óók systematische fouten in het spel, zooals trouwens reeds te voren in vele gevallen gebleken was (zie boven).

Hoe groot is nu echter het aandeel dier systematische fouten? Hieromtrent kunnen ons alleen de afwijkingen der verschillende sterrenwachten, voor een zelfde tijdvak onderling vergeleken, eenige aanwijzing, geven en men kan daartoe de halfjaarlijksche middentallen gebruiken. Beschouwt men deze nader, dan vindt men vaak aanzienlijke verschillen tusschen nabij elkander gelegen sterrenwachten, die dus aan systematische fouten te wijten zijn, maar daar nevens toch ook somtijds kenteekenen dat werkelijke afwijkingen van mijne formule aanwezig kunnen zijn. Om het eerste aan te toonen heb ik voor de 4 sterrenwachten, Potsdam, Straatsburg, Karlsruhe en Lyon, die gedurende 6 opvolgende halfjaren waarnemingen geleverd hebben, door de uitkomst van elke te vergelijken met het midden der 4, de middelbare waarde afgeleid der totale waarnemingsfout in het halfjaarlijksch middental eener sterrenwacht, en daarvoor gevonden $\pm 0''.049$, dus een aanzienlijk bedrag en dat juist overeenstemt met de boven gevonden $\Delta' B$.

Een geval dat op eene werkelijke afwijking van mijne formule schijnt te wijzen biedt de zomer van 1895. Hieronder volgen daarvoor voor de Europeesche sterrenwachten de afwijkingen zoowel van ALBRECHT als van mij:

	$W-A$	$W-B$
Kasan	$+\ 0''.025$	$-\ 0''.022$
Praag	$+\ 10$	$-\ 48$
Potsdam	$+\ 33$	$-\ 30$
Karlsruhe	$-\ 104$	$-\ 170$
Straatsburg	$-\ 26$	$-\ 90$
Lyon	$+\ 17$	$-\ 37$

Wordt hierdoor eene werkelijke afwijking aangetoond, dan zou dit bewijzen, dat de combinatie eener standvastige 431-daagsche en eener *standvastige* jaarlijksche beweging nog niet geheel aan de werkelijkheid beantwoordt. Dat de laatstgenoemde in de verschillende jaren verschillend zijn kan is dan ook a priori niet onwaarschijnlijk. Het moet aan verdere waarnemingen, die zoo mogelijk nog zorgvuldiger van systematische fouten vrij gehouden zijn, overgelaten blijven hieromtrent zekerheid te verschaffen.

Natuurkunde. — De Heer HAGA biedt voor het Verslag der vergadering een opstel aan: *„Over een 5-vleugeligen kwadrant-electrometer en met dezen verrichte metingen van stroomsterkte."*

In de laatste jaren was ik herhaaldelijk genoodzaakt de sterkte van een standvastigen stroom van ongeveer 10 ampère met nauwkeurigheid te meten. Van de vele methoden, die hiervoor in aanmerking kwamen, koos ik die, waarbij het potentiaalverschil gemeten wordt tusschen de uiteinden van een in den stroomkring ingevoegden bekenden weerstand. Daar deze methode bij uitstek eenvoudig is, geschikt stroomen van zeer verschillende sterkte met een nauwkeurigheid van $^1/_{10}$ procent te meten, komt het mij wenschelijk voor op deze methode de aandacht te vestigen.

Noodzakelijk is een goede kwadrant-electrometer.

In 1893 beschreef HIMSTEDT [1]) een viervleugeligen kwadrant-electrometer; de vleugels waren opgehangen aan een verzilverden kwartsdraad; de demping werd verkregen door onder aan het stangetje, dat de vleugels draagt, twee vertikale magneetjes, met de polen naar tegenovergestelde zijden, draaibaar op te hangen binnen eene ringvormige ruimte in een stuk rood koper. Daar de magneten echter geen *volkomen* astatisch stelsel vormden, bleef er steeds eene geringe richtkracht over, waardoor HIMSTEDT verplicht was den geheelen toestel om een vertikalen as draaibaar te maken.

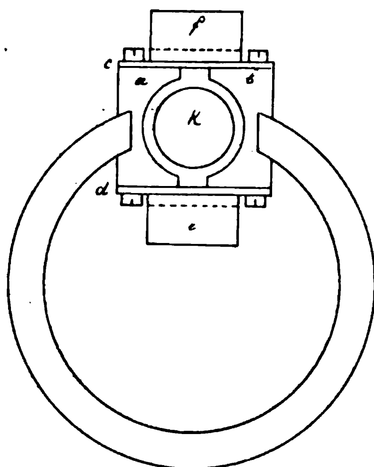
Het kwam mij voor dat dit bezwaar te voorkomen was door de HIMSTEDT'sche dempingsmethode om te keeren en dus een roodkoperen cilindermantel in een magnetisch veld draaibaar op te hangen [2]). Een vijfvleugelige kwadrant-electrometer met deze demping werd in de werkplaats van het natuurkundig laboratorium te Groningen vervaardigd. Eene afbeelding van het voornaamste deel van dezen toestel ziet men in fig. 1; de geelkoperen cilinder om de kwadranten en het cilindervormig huisje om den afleesspiegel zijn verwijderd. De voet van het instrument is een 5 mm. dikke geelkoperen plaat op drie stelschroeven; op de plaat staan, door glazen zuiltjes geïsoleerd, de vier kwadranten; één dezer is micrometrisch verschuifbaar. De verbindingsklemmetjes bevinden zich onder aan de voetplaat, om ze zooveel mogelijk tegen stof te beveiligen; door eboniet, glas en schellak zijn ze van de plaat volkomen geïsoleerd.

---

1) Wied. Ann. Bd. 50, p. 752, 1893.

2) Beiblätter. Bd. 19, p. 896, 1895.

Fig. 2, 1/2 ware grootte.



Ook de inrichting voor demping is geheel onder tegen de voetplaat bevestigd; ze bestaat uit een 3 cM. hoogen cirkelvormigen magneet (fig. 2), voorzien van twee poolschoenen *a* en *b*; in deze zijn gleuven gevijld, waarin de polen van den magneet vastsluitend passen; twee geelkoperen platen *c* en *d* verbinden de poolschoenen en maken van deze met den magneet één geheel. Twee andere geelkoperen platen *e* en *f* zijn rechthoekig omgebogen; de vertikale deelen zijn gesoldeerd aan *c* en *d*; de horizontale deelen dienen tot bevestiging tegen de ondervlakte der voetplaat. De ondervlakte der poolschoenen is ook door een geelkoperen plaat bedekt (zie fig. 1) waarin een koperen buisje gesoldeerd is, waarin de ijzeren kern *k* (fig. 2) veerend past. In de ringvormige ruimte tusschen de buitenzijde van de ijzeren kern en de binnenzijde der poolschoenen *a* en *b* kan de roodkoperen cilindermantel zich bewegen; in het midden der voetplaat is eene opening even groot als de ruimte tusschen de poolschoenen, zoodat aan het beneden uiteinde van het aluminium staafje, waaraan de vleugels bevestigd zijn, een aluminium busje geschoven kan worden, dat een ebonieten staafje draagt, hetwelk geschroefd is op het deksel van den cilindermantel. Deze hangt dus geheel gecentreerd in het magnetisch veld, terwijl luchtstroomingen afgesloten worden door de koperen platen om de poolschoenen.

De toestel is verder voorzien van torsiekop en inrichting om de vleugels in vertikale richting te kunnen verplaatsen zonder dat de vleugels ontladen worden.

De lengte van den ophangdraad is 17 cM.; de afstand tusschen voetplaat en bovenplaat 13,5 cM.

Wat de gevoeligheid van den electrometer betreft, zoo hangt deze voor een groot deel af van den ophangdraad. Met een verzilverden kwartsdraad van 55 μ middellijn gaf, bij eene lading der vleugels op 180 volt, een Clark-element bij commuteeren eene uitwijking van 760 millimeter; afstand van den schaal 2 meter. In ongeveer een halve minuut was de evenwichtsstand bereikt na 3 schommelingen.

Daar echter het totale gewicht, dat de draad te dragen had, 20 gram is (de roodkoperen cilindermantel woog 10 gram) kan ook een kwartsdraad van 24 μ gebruikt worden, waardoor de uitwijking ruim

16 maal vergroot, de schommeltijd echter verviervoudigd zou worden.

Is deze zeer groote gevoeligheid niet noodig, dan verdient een in een kaarsvlam uitgegloeide platinadraad [1]) den voorkeur om het grootere gemak in de behandeling; ook is de nawerking niet merkbaar, gelijk uit de hieronder medegedeelde waarnemingen blijkt. De door HERÄUS geleverde Wollastondraad van 25 μ kan slechts 4 gram dragen; een platinadraad van 50 μ ruim 30 gram; met dezen werden de meeste metingen in den laatsten tijd genomen; de schommeltijd (½ periode) is ongeveer 12 sec. en daar de demping meest zóó geregeld was dat na drie slingeringen de vleugels in rust waren, duurde het slechts 36 sec. dat eene aflezing kon geschieden.

Ten einde de demping goed te kunnen regelen, wordt de roodkoperen cilindermantel zoolang dunner gedraaid of verkort tot, bij geheel ingeschoven ijzeren kern, de beweging juist aperiodisch is; door de kern naar beneden te schuiven, kan men de gewenschte demping verkrijgen; bij iederen draad zal natuurlijk ook een ander roodkoperen cilindermantel als de meest geschikte behooren.

Van veel belang is bij den kwadrant-electrometer de ladingsbatterij; behoeft men slechts korten tijd metingen te doen, dan kan men met ZAMBONI's zuil of waterelementjes, bestaande uit kleine reageerbuisjes met water gevuld, waarin koper en zinkstaafjes gestoken zijn, volstaan. Moet de ladingsbatterij echter eenige maanden steeds gereed staan, dan voldoen deze inrichtingen niet meer; ook is het mij niet gelukt door het water te vervangen door gipsbrei of door gelatine met carbol, dit doel te bereiken. Zeer goed hebben mij voldaan 300 kleine LECLANCHÉ-elementen door de firma P. J. KIPP & ZONEN, J. W. GILTAY opvolger, geleverd. Bij onderstaande metingen was de positieve pool dezer batterij met de vleugels verbonden, de negatieve met de aarde.

Tabel I bevat de vergelijking van een zestal CLARK-elementen, vervaardigd volgens de voorschriften door KAHLE aangegeven in Wied. Ann. Bd. 51, p. 203, 1894, met een normaal CLARK-element geleverd door R. FUESS in Steglitz bij Berlijn en in de Physikalisch-Technische Reichsanstalt gecontroleerd.

Dit element is genoemd N, terwijl de hier vervaardigde gemerkt zijn: A, B, C, D, E en F.

De negatieve pool der elementen bleef met de aarde verbonden, de positieve met het eene kwadrantenpaar, terwijl het andere op potentiaal nul gehouden werd, de evenwichtsstand werd afgelezen; door commuteeren werden deze beide verbindingen omgekeerd en daarmede voortgegaan tot 5 aflezingen werden verkregen.

---

[1]) HALLWACHS. Wied. Ann. Bd. 55 p. 170. 1895.

TABEL I.

11 Februari 1897.

Vleugels geladen door 300 Leclanché elementen; afstand schaal 2 Meter.

Clark-element.	Afgelezen evenwichtsstand.		Uitslag.	
N. 18°.0	787.8 787.8 787.8	188.1 188.1	**599.7**	
A. 18°.3	788.0 788.0 788.0	188.1 188.2		**599.8^5**
B. 18°.2	787.2 787.0 787.1	187.2 187.2		**599.9**
N.	787.3 787.1 787.1	187.4 187.3	**599.8**	
B. 18°.2	787.1 787.1 787.1	187.3 187.4		**599.7^5**
A.	788.1 788.1	188.2 188.3 188.3		**599.8**
N.	788.2 788.1 788.0	185.3^5 188.2^5	**599.8**	
C. 18°.0	785.9 785.9	186.0 185.9 185.9		**600.0**
D. 18°.0	784.9^5 784.9^5 785.0^5	184.8 185.0		**600.1**

Clark-element.	Afgelezen evenwichtsstand.		Uitslag.	
N.	785.2^{5} 785.2	185.1 185.1 185.1	**600.1**	
D. 18°.0	785.1 785.2 785.3	185.1 185.1		**600.1**
C. 18°.0	785.6 785.5 785.4	185.2 185.1		**600.3^{5}**
N.	790.9 790.7 790.8	191.1 191.1	**599.7**	
E. 18°.1	791.1 791.0 791.0	191.6 191.6		**599.4**
F.	792.5 792.5	193.2 193.1 193.1		**599.4**
N.	792.7 792.5	193.0 193.1 193.2	**599.5**	
F. 18°.2	792.4 792.6	192.9 193.1 193.2		**599.4**
E. 18°.1	791.1 791.3 791.2	191.9^{5} 192.0^{5}		**599.2**
N. 18°.0	791.9 791.7 791.7	192.0 192.0	**599.8**	

Uit deze waarnemingen leidt men af:

N. 599.8	*N*. 599.9	*N*. 599.7
A 599.8	*C* 600.2	*E* 599.3
B 599.8	*D* 600.1	*F* 599.4

De verschillen in de uitwijking door *N* teweeggebracht moeten m. i. toegeschreven worden aan temperatuursinvloeden, tengevolge waarvan de potentiaal der ladingsbatterij veranderde. Wenscht men grootere nauwkeurigheid te bereiken, dan is het noodig de ladingsbatterij en de CLARK-elementen op constante temperatuur te houden; bij deze proeven waren de CLARK-elementen geplaatst in glazen met paraffine olie gevuld en was door de centrale verwarming gezorgd, dat gedurende den nacht, voorafgaande aan de proeven, geen groote temperatuursverschillen voor konden komen.

Men ziet echter uit deze reeks aflezingen: 1°. dat met dezen platinadraad de nawerking geheel te verwaarloozen is en 2°. dat men op minstens $^1/_{10}$ procent door éóne waarneming een potentiaalverschil ten bedrage van 1,4 volt meten kan.

Een groot voordeel van deze methode is ook dat het CLARK-element geen stroom levert.

Wenscht men dus, zonder te onderzoeken in hoeverre er evenredigheid bestaat tusschen uitslag van den electrometer en potentiaalverschil, de sterkte van een electrischen stroom te meten, dan moet de weerstand zoo gekozen worden, dat aan de uiteinden van dezen een potentiaalverschil bestaat, ongeveer gelijk aan dat van een CLARK-element en dit met een CLARK-element vergelijken. Voor stroomen van ongeveer 10 ampère is dus een weerstand van 0.14 Ohm noodig; deze weerstand moet zoo geconstrueerd worden, dat de stroom geen groote temperatuur-ongelijkheden kan veroorzaken; daartoe werden 10 nieuwzilverdraden van $^1/_2$ mm. doorsnede en ongeveer $^1/_2$ meter lang naast elkaar verbonden en geplaatst in een grooten bak met paraffine olie gevuld; wegens de kleine temperatuurscoëfficient is het voldoende de temperatuur tot op ongeveer 3° te kennen, zonder een fout grooter dan $^1/_{10}$ procent te maken. De weerstand zelf werd op de gewone wijze met WHEATSTONE's brug bepaald. Met dezen weerstand zijn vele stroommetingen verricht en ook ampèremeters gecontroleerd [1]).

[1]) Dat het gedurig controleeren van ampèremeters niet onnoodig is, moge blijken uit de mededeeling dat op een ampèremeter van CARPENTIER een stroom van 10 amp. aangewezen werd in Maart '95 met 12 amp.

Januari '96	〃 13.5	〃
Maart '97	〃 14	〃
October '97	〃 16	〃

Klaarblijkelijk heeft de magneet voortdurend aan sterkte verloren.

Daar het echter van belang is een zelfden weerstand te kunnen gebruiken voor verschillende stroomsterkten, werd nagegaan in hoeverre evenredigheid bestaat tusschen uitslag van den electrometer en potentiaalverschil tusschen de kwadrantenparen.

Hiertoe werd de stroom, door 2 accumulatoren geleverd, geleid door een weerstand van 1050 Ohm nl.: 400 + 300 + 200 + 100 + 100 + 30 + 20 Ohm van een gecontroleerde weerstandsbank. Door middel van de zijstoppen kon het potentiaalverschil gemeten worden tusschen 500, 400, 300, 200 en 100 Ohm, waarbij telkens de stop aan het eene uiteinde met de aarde in verbinding gesteld werd.

Ten einde het verschil in aflezing tusschen een positieven en negatieven potentiaal van dezelfde absolute waarde te elimineeren, werd de stroom in beide richtingen door den weerstand gezonden; de beide CLARK-elementen *A* en *B* waren te zamen in één cilindervormig glas, met paraffine olie gevuld, geplaatst; de negatieve pool van *A* en de positieve van *B* voortdurend met de aarde verbonden en de andere beurtelings met den electrometer.

De volgende tabel bevat de afgelezen evenwichtsstanden en uitslagen; de kleinere waarden van den uitslag voor 1 CLARK in vergelijking met die van tabel I moeten toegeschreven worden aan het langzamerhand zwakker worden der ladingsbatterij; met een electrometer van BRAUN gemeten, hadden de 300 LECLANCHÉ elementen slechts 320 Volt meer. Schaalafstand was 2 meter.

TABEL II.

5 Mei 1898. t = 15°.1.

Afgelezen evenwichtsstand.			Uitslag
Clark B —	283.0 283.0	781.1	**498.1**
15°.1			
Clark A +	781.6 781.6	284.8	**496.8**
500 Ohm	203.8 203.8	866.0	**662.2**
	866.3 866.3	206.4	**659.9**

Afgelezen evenwichtsstand.			Uitslag.
400 Ohm	798.2 798.0	269.7	**528.4**
	267.6 267.5	797.5	**529.9^5**
300 Ohm	331.1 331.3	728.2	**397.0**
	728.8 728.8	332.7	**396.1**
500 Ohm	866.2 866.2	206.3	**659.9**
200 Ohm	660.2 659.8	396.0	**264.0**
	395.1 395.1	659.1	**264.0**
100 Ohm	458.9 459.1	590.9	**131.9**
	591.1 591.1	459.5	**131.6**
500 Ohm	866.1 866.1	206.3	**659.8**
Clark B —	282.0 282.2	780.6	**498.5**
Clark A +	781.2 781.2	284.2	**497.0**

De waarneming van het potentiaalverschil aan de uiteinden van 500 Ohm is voor de eene stroomrichting een paar maal herhaald om na te gaan of de stroomsterkte gedurende de proef veranderd is; men ziet dat deze volkomen constant is gebleven.

De resultaten uit deze proef zijn samengesteld in tabel III, hierin beteekenen de beide getallen tusschen de accoladen de uitslagen bij de verschillende richting van den stroom.

TABEL III.

Uitslag.			Potentiaalverschil in Volts.		Stroomsterkte in ampères.
			Waargenomen.	Berekend.	
Clark B — 498.1		497.5			
Clark A + 496.8					
500 Ω	662.2	661.1	1.900	1.905	0.003801
	659.9				
400 Ω	528.4	529.2	1.524	1.524	0.003810
	529.9^{5}				
300 Ω	397.0	396.6	1.143	1.143	0.003811
	396.1				
200 Ω	264.0	264.0	0.7617	0.7615	0.003811
	264.0				
100 Ω	131.9	131.8	0.3806	0.3810	0.003805
	131.6				
Clark B — 498 5		497.7			
Clark A + 497.0					

Wegens het klein verschil tusschen de uitwijking van 1 CLARK en het potentiaalverschil aan de uiteinden van 400 Ohm werd hierbij de evenredigheid aangenomen tusschen uitslag en potentiaalverschil, waaruit gevonden werd 1.524 V; de stroomsterkte was dus 0.003810 ampère; vermenigvuldigt men deze waarde met de weerstanden — de zeer geringe correcties in aanmerking nemende — dan vindt men de „berekende" potentiaalverschillen, terwijl onder „waargenomen" potentiaalverschillen de waarden zijn opgegeven die gevonden worden in de onderstelling van evenredigheid tusschen uitslag en potentiaalverschil. Men ziet dat binnen vrij ruime grenzen deze evenredigheid bestaat; hetzelfde feit blijkt ook uit de laatste kolom waarin de stroomsterkte is berekend door het „waargenomen" potentiaalverschil door den weerstand te deelen. Het spreekt van zelf dat de uitslagen gereduceerd werden op bogen.

Zorgt men er dus voor, dat de hoek waarover de vleugels draaien niet grooter is dan $7^\circ \frac{1}{2}$ (overeenkomende met den gecommuteerden uitslag 529) en dat de uitslagen niet te klein worden, zoodat de afleesfouten minder dan $\frac{1}{1000}$ van den uitslag zijn, dan kan men zeer ver-

schillende intensiteiten op minstens $^1/_{10}$ procent bepalen met denzelfden weerstand. In dit geval was de stroom zwak en men ziet hoe men o. a. met den kwadrantelectrometer zonder moeite den reductiefactor van spiegelgalvanometers bepalen kan. Heeft men omgekeerd een „Normal Widerstand" van 0.001 Ohm zooals die b.v. door SIEMENS en HALSKE geconstrueerd wordt, dan kan men met even groote nauwkeurigheid een stroom van 1000 ampère meten.

Ten slotte maak ik opmerkzaam op eene omstandigheid, die bij dergelijke metingen in sommige gevallen kan voorkomen en tot zeer groote fouten aanleiding geven kan en die ook een groot aantal mijner proeven waardeloos gemaakt heeft. In dit laboratorium zijn 30 accumulatoren achter elkander verbonden en kunnen verschillende groepen in verschillende vertrekken gebruikt worden; zoo leverde een groep van 5 accumulatoren bij mijne proeven den stroom die ook door den op pag. 84 vermelden weerstand liep; het eene uiteinde van dezen weerstand werd met de aarde, het andere met den electrometer verbonden; wanneer nu in een ander vertrek tegelijkertijd een andere groep accumulatoren gebruikt wordt en een deel van den stroomkring daar eveneens met de aarde in verbinding komt of niet geheel geïsoleerd is, dan kan het, met den electrometer verbonden, einde tusschen twee, met de aarde in verbinding staande, punten gelegen zijn en het juiste potentiaalverschil wordt niet gemeten. Of eene dergelijke fout aanwezig is, erkent men onmiddellijk door omkeeren van de richting van den stroom; overigens is deze fout door de gebruikte elementen te isoleeren gemakkelijk te ontgaan.

Natuurkundig Laboratorium, Groningen.

Natuurkunde. — De Heer HAGA biedt namens Dr. C. H. WIND een opstel aan, getiteld: „*Over den invloed van de afmetingen der lichtbron bij* FRESNEL'*sche buigingsverschijnselen en over de buiging van X-stralen.*" (Derde mededeeling).

17. In mijne vroegere mededeelingen over dit onderwerp [1]) heb ik er op gewezen (vgl. 10. en 16.), dat de theorie omtrent den invloed van de verwijding der lichtspleet, in den eenvoudigen vorm althans waarin zij daar werd gegeven, niet in staat is het feit te verklaren, dat bij een schuin toeloopende diffractiespleet de beide hoofdmaxima ook na het punt van samenkomst zich steeds als twee gescheiden

[1]) Versl. K. A. v. W. 5, p. 448 en 6, p. 79. 1897.

lichte of, op fotografische negatieven, donkere strepen blijven vertoonen; die theorie toch verlangt hier al spoedig na het kruispunt een vrij wel gelijkmatig maximale intensiteit in het midden van het diffractiebeeld over het geheele gebied tusschen de beide plaatsen, waar de genoemde maxima zich vertoonen. Deze moeilijkheid vindt thans haar oplossing in het door mij in het vorige zittingsverslag beschreven gezichtsbedrog, dat in een geval als het bedoelde — waar nl. een zone van gelijkmatig maximale intensiteit naar beide zijden overgaat in zones van doorloopend afnemende lichtsterkte — twee afzonderlijke maxima op de randen der eerstgenoemde zone doet waarnemen (vgl. o.a. fig. 9 en 10 in de vorige mededeeling).

18. Daarmee is reeds aangewezen, dat het genoemde gezichtsbedrog bij onze waarneming van diffractieverschijnselen een belangrijke rol kan spelen. En inderdaad is deze rol, gelijk mij in den laatsten tijd bij met het oog daarop genomen proeven is gebleken, zóó groot, dat de werkelijke lichtverdeeling in de diffractiebeelden — vooral wanneer de lichtspleet zoo wijd is, dat haar wijdte reeds een merkbaren invloed op het *algemeene voorkomen* van het diffractiebeeld uitoefent — zeer moeilijk uit de onmiddellijke waarneming valt af te leiden. Zoo heeft het mij reeds herhaaldelijk getroffen, dat in het geval van buiging door een spleetopening bij groote verwijding van de lichtspleet de hoofdmaxima steeds een buitengewoon groote duidelijkheid behouden, terwijl de theorie aangeeft, dat het surplus van lichtsterkte van de maxima boven de omgeving steeds geringer moet worden, naarmate de lichtspleet wijder wordt. Nu wij weten, dat men onder den invloed van het gezichtsbedrog zeer duidelijke helderheidsmaxima waarneemt, ook zelfs op de grenzen van een volkomen gelijkmatig verlichte zone, mits deze slechts zijdelings overgaat in zones van afnemende lichtsterkte, behoeft het ons echter volstrekt niet meer te verwonderen, dat de genoemde hoofdmaxima, die in elk geval toch nog eenige realiteit bezitten, schijnbaar steeds zeer duidelijk zichtbaar blijven. Alleen is de vraag gewettigd, of onder den invloed van het gezichtsbedrog de plaats waar men deze maxima meent waar te nemen niet een andere kan worden. Inderdaad is dit te verwachten; doch het is wel aan te nemen — en door proeven heb ik bevestigd gevonden — dat, zoolang de hoofdmaxima uit zich zelf nog een aanzienlijke duidelijkheid (surplus van *lichtsterkte*) bezitten, de schijnbare plaats daarvan nog slechts betrekkelijk weinig door gezichtsbedrog wordt geïnfluenceerd en in elk geval die hoofdmaxima zelve in hoofdzaak de plaats aangeven, waar ook ons oog een maximum van *helderheid* waarneemt. Dit verklaart, waarom ik op grond van vroeger vermelde (vgl. 14.) uitmetingen van secundaire licht-diffractiebeelden

tot een schatting van de lichtgolflengte heb kunnen komen, die niet geheel bezijden de waarheid was.

19. Een andere opmerking, waartoe mijne vroegere proeven mij en ook anderen aanleiding hebben gegeven is deze, dat de in de zoogenaamde secundaire diffractiebeelden waargenomen maxima zich zuiver wit voordoen, terwijl men allicht een flauwe kleuring daarin zou verwachten, aangezien toch de plaats der maxima — voorzoover zij in de theorie der secundaire diffractiebeelden wordt afgeleid — niet geheel onafhankelijk van de golflengte is. Ook deze omstandigheid moet natuurlijk aan den invloed van het gezichtsbedrog worden geweten. De kleuringen, die feitelijk wel aanwezig zullen zijn, hebben namelijk intensiteiten, beantwoordende aan het werkelijke surplus van *lichtsterkte* in de hoofdmaxima doch geenszins aan het veel grootere surplus van *helderheid*, dat ons oog in die maxima waarneemt.

20. Moge zoo het gevonden gezichtsbedrog de verklaring aan de hand doen van eenige tot dusverre overgebleven moeilijkheden, het noodzaakt ons aan den anderen kant een belangrijke schrede terug te doen, nl. de conclusie (vgl. 15.) in te trekken, dat de analogie tusschen de X- en de licht-schaduwbeelden veel grond geeft aan het vermoeden, dat de X-stralen in undulaties bestaan. Het in mijn vorige mededeeling vermelde toch is voldoende om aan te toonen, dat de X-stralen ook zonder een spoor van diffractie te vertoonen schaduwbeelden zouden kunnen geven, welke aan ons oog de bekende lichte en donkere strepen vertoonden. De fotografie, welke in die mededeeling in fig. 6 is afgebeeld, vertoont in originali een karakter, dat volkomen overeenstemt met de door Fomm e.a. vroeger verkregen (negatieve) X-schaduwbeelden. De donkere strepen daarop doen in duidelijkheid niets onder voor die bij de genoemde X-schaduwbeelden, en eveneens vertoonen de laatstgenoemde — al moge daarop vroeger minder de aandacht zijn gevallen — zeer duidelijk aan de buitenzijde de lichte strepen, die aan de lichte cirkelvormige lijntjes in fig. 6 beantwoorden.

Ook gelukt het — gelijk ik reeds in N°. 8 van de vorige mededeeling aangaf — zonder eenige moeite, de X-schaduwbeelden met de karakteristieke donkere en lijnen te vervaardigen bij gebruik van spleetopeningen, die volstrekt niet zeer klein zijn (vgl. fig. 10, dier mededeeling), hoewel dit geheel in strijd zou zijn met verwachtingen, die men zou kunnen gronden op de onderstelling, dat die strepen aan diffractie hun ontstaan te danken hadden.

21. Natuurlijk laat echter het gevonden gezichtsbedrog de juistheid van de vroeger gegeven theoretische beschouwingen over den

invloed van de verwijding der lichtspleet onaangetast. In het bijzonder behoudt de daar ontwikkelde eenvoudige methode tot het in rekening brengen van dien invloed haar waarde voor de juiste interpretatie van door de proeven geleverde diffractiebeelden en voor de berekening van de *licht*verdeeling, die onder gegeven omstandigheden in diffractiebeelden kan worden verwacht [1]).

Een vraag, die nog al van belang scheen te zijn, was deze. Door welke verschillende stadiën gaat het primaire diffractiebeeld, van den rand van een schaduwgevend scherm b. v., bij voortdurende verwijding van de lichtspleet over in het schaduwbeeld, behoorende bij een lichtspleet, die zoo wijd is dat er geen diffractie meer merkbaar is; en hoe vertoont zich het diffractiebeeld in de verschillende stadiën aan ons oog onder den invloed van het gevonden gezichtsbedrog? Om deze vraag te kunnen beantwoorden heb ik bij vijftien opvolgende wijdten der lichtspleet, doch zonder overigens de omstandigheden der proef te wijzigen, een reeks diffractiebeelden van een betrekkelijk wijde diffractiespleet fotografisch opgenomen. De wijdte der lichtspleet variëerde daarbij tusschen zoodanige grenzen, dat de verschuivingen, die in de vroeger (vgl. 5.) aangewezen constructie de primaire diffractie-figuur moet ondergaan om een juiste meetkunstige voorstelling van het te verwachten secundaire diffractiebeeld te verschaffen, beantwoordden aan zoodanige verschuivingen van het beginpunt van de effectieve boog op de spiraal van CORNU, als waarbij de bekende FRESNEL'sche grootheid v variëert van 0.2 (in het geval van de kleinste) tot 8.4 (in het geval van de grootste wijdte der lichtspleet). Ook heb ik met toepassing van de bedoelde constructie gewone grafische voorstellingen ontworpen omtrent lichtverdeeling, die het diffractiebeeld bij de verschillende wijdten der lichtspleet zou moeten bezitten. Het is hier de plaats niet om een beschrijving in bijzonderheden te geven van de verwachte *licht*verdeelingen en van de op de verkregen negatieven waargenomen *helderheids*verdeelingen; hier moge de opmerking voldoende zijn, dat ten aanzien van de meeste platen der reeks een zeer aanzienlijk verschil, ja zelfs een verschil in karakter, tusschen beide bestond, zonder dat hier nochtans — gelijk overigens te verwachten was — alle regelmaat ontbreekt. In 't algemeen vond ik dat het oog in de

[1]) Het is gemakkelijk na te gaan, dat de door mij aangegeven methode tot het berekenen van den invloed van de verwijding der lichtspleet op de lichtverdeeling in de ontstaande diffractiebeelden in beginsel ook van toepassing is op andere dan de gewone FRESNEL'sche, b.v. op de FRAUNHOFER'sche, buigingsverschijnselen en hoe de toepassing van dat beginsel voor zulke gevallen moet worden gewijzigd.

overgangszones van *voortdurend toenemende lichtsterkte* op zulke plaatsen, waar — tengevolge van de eigenaardige golvingen der primaire diffractie-figuur — de snelheid van toeneming der lichtsterkte aanzienlijke veranderingen ondergaat, waarneemt *maxima*, resp. *minima*, van *helderheid*. En ook bleek dat in de eerste platen (bij minder wijde lichtspleet) der reeks de diffractie een zeer merkbaren invloed op het algemeen voorkomen der verkregen beelden uitoefent, terwijl die invloed verderop in de serie meer en meer op den achtergrond geraakte en eindelijk nauwelijks meer te herkennen valt. Dit laatste feit is vooral van gewicht voor de nu volgende beschouwingen.

22. Het punt van uitgang van al de genoemde onderzoekingen was steeds de wensch te geraken tot een schatting omtrent de golflengte der X-stralen, eventueel tot de bepaling van een zoo laag mogelijk te stellen bovenste grens voor zulk een golflengte. Met het oog op dit doel zijn door Prof. HAGA en mij de reeds door den Heer TIDDENS begonnen proeven steeds voortgezet, aanvankelijk echter voortdurend met een negatief resultaat.

Ten slotte zijn in de laatste dagen nog een tweetal proeven genomen en wel onder de volgende omstandigheden. Bij beide proeven was de breedte der lichtspleet $\sigma = 49\,\mu$ en werd deze spleet beschenen door een X-buis (met automatisch reguleerend vacuum volgens het nieuwste systeem van MÜLLER in Hamburg), zoodanig geplaatst dat de antikathode een zeer kleinen hoek maakte met de as der opstelling (vgl. 1.) — dit laatste met het oog op een zoo sterk mogelijke concentreering van den door de lichtspleet doorgelaten bundel van X-stralen.

De diffractiespleet liep in beide gevallen schuin toe; zij had aan het eene einde een wijdte van $\pm\, 400\,\mu$, terwijl zij aan het andere einde slechts eenige microns wijd was. Bij de proef A waren de afstanden aldus: $a = 293$, $b = 298$ cM., bij de proef B: $a = 605$, $b = 615$ cM.

De lichtspleet, de diffractiespleet en de gevoelige plaat waren elk op een stevig statief bevestigd, vastgegipst op hardsteenen zuilen, welke weer met gips waren vastgezet op de pijlers of de steenen vloeren van het gebouw. De expositietijd was voor de proef A ruim 8 uren, voor de proef B 40 uren.

De beide platen vertoonden na ontwikkeling duidelijk een zwart spleetbeeldje, spits toeloopende naar het eene einde. Niet al te zorgvuldige waarneming, zelfs met vergrootglas of microscoop van zwakke vergrooting, doet geen invloed van diffractie herkennen; de bandjes schijnen zijdelings bijna volkomen scherp begrensd te zijn

over hun geheele lengte en in een haarfijne punt uit te loopen; aandachtiger beschouwing vertoont echter aan beide kanten de bekende overgangszone met een donkere streep aan de binnen- en een lichte streep aan de buitenzijde als grens. Een zoo nauwkeurig mogelijke beschouwing en uitmeting onder een microscoop van ± 14-malige vergrooting heeft eindelijk de volgende feiten aan het licht gebracht.

1°. Op de plaat *A* (behoudens een klein deel daarvan, waarover later) zijn de donkere en lichte strepen tamelijk scherp afgeteekend, vrij wel zooals zij zich voordoen bij overgangszones, waarbij geen diffractie in het spel is. De afstand tusschen de donkere en lichte streep bedraagt bij elk der overgangszones over bijna de geheele plaat gemiddeld ± 67 μ. De breedte der overgangszone, in de onderstelling van rechtlijnige voortplanting uit de waarde van σ, a en b berekend, zou zijn 50 μ.

De plaat vergelijkende met de reeks van lichtbeelden in 21 genoemd, heb ik meenen te mogen besluiten, dat het verschil tusschen die 67 en 50 μ mogelijkerwijze een gevolg van diffractie zou kunnen zijn, doch in elk geval dat het spleetbeeldje op de plaat *A* in haar voorkomen overeenkomt wèl met die platen uit de lichtreeks, waarvoor $v > 2,3$ was, doch niet met de andere — iets, wat zeer goed vereenigbaar is met de betrekkelijk geringe waarde van het even te voren genoemde verschil. Daaruit volgt echter door een eenvoudige berekening, dat — *indien* er al van een golflengte bij X-stralen sprake mag zijn —

$$\lambda_x < 0,2\ \mu\mu$$

moet zijn.

2°. Op plaat *B* zijn de donkere en lichte strepen minder scherp afgeteekend, de donkere strepen schijnen zelfs in betrekkelijk breede banden te zijn overgegaan, die aan de buitenzijde een sterk verval van kracht vertoonen, zoodat het beeld in karakter meer begint overeen te komen met de vroegere platen uit de lichtproevenreeks in 21 genoemd. Zelfs zou het naar zijn algemeen voorkomen als gelijksoortig met eenige beelden uit de genoemde reeks kunnen worden verklaard, waarvoor v niet al te veel van 1.5 verschilt. Mochten wij aannemen, dat die analogie werkelijk volledig bestond, dan zou daaruit volgen

$$\lambda_x = \pm\ 0.18\ \mu\mu .$$

Een invloed van diffractie wordt hier ook eenigszins waarschijnlijk gemaakt door het feit, dat voor den afstand van de donkere en lichte

streep bij de overgangszones — voorzoover die bij de geringe nauwkeurigheid, die de instelling, vooral op de donkere streep, toelaat, is te bepalen — waarden zijn gevonden geworden, die over (bijna) de geheele lengte der plaat variëeren tusschen 67 en 91 μ en gemiddeld 78 bedroegen, die dus wijzen op een aanzienlijk grooteren afstand dan bij plaat *A*. Ook beantwoordt het punt van kruising van de donkere strepen bij deze plaat aan een merkbaar grootere wijdte der diffractiespleet dan bij plaat *A*. Bij dit alles dient echter te worden opgemerkt, dat al die bijzonderheden, al kunnen zij worden opgevat als misschien door diffractie te zijn veroorzaakt, ook wel reeds zouden kunnen zijn ontstaan tengevolge van een zeer gering gebrek aan vastheid van de opstelling, indien dit aanleiding mocht hebben gegeven tot bijna voortdurende trillingen bij een of meer der statieven.

3°. In de nabijheid van de punt van het spleetbeeldje op plaat *A* viel mijn oog herhaaldelijk op iets wat ik ten slotte heb meenen misschien te moeten interpreteeren als een zwakke aanwijzing van een waaiervormige verbreeding van het spleetbeeldje, voornamelijk zich uitende in een uiteenloopen van de beide lichtlijntjes der buitenzij. Aannemende dat deze waaiervormige verbreeding werkelijk bestaat en een gevolg is van buiging, en verder — waarvoor voldoende grond is — dat zij dan wijst op een zoo geringe breedte van de diffractiespleet daar ter plaatse als zou beantwoorden aan een waarde van ten hoogste 2 van de grootheid v, en eindelijk in aanmerking nemende, dat de diffractiespleet op de bedoelde plaats blijkens de uitmeting een werkelijke breedte van 2,3 μ bezit, zou men door berekening vinden:

$$\lambda_x > 0.12 \, \mu\mu \; .$$

Opmerking verdient alleszins, dat de hier bedoelde aanwijzing eener waaiervormige uitbreiding zich spontaan aan mijn oog vertoonde, zonder dat ik overtuigd was of een vermoeden had omtrent de waarschijnlijke aanwezigheid daarvan. Overigens is zij echter van zoo subtielen aard dat alle twijfel aan de juistheid der hier beproefde verklaring gewettigd is.

4°. Toen in plaat *A* het sub 3° genoemde verschijnsel was waargenomen, heb ik gezocht naar iets soortgelijks in plaat *B*. En inderdaad gelukte het mij een plaats op te sporen, die een overeenkomstige aanwijzing gaf. Doch het verschijnsel was hier nog meer onduidelijk dan op plaat *A*, wat trouwens op zich zelf niet kon verwonderen, daar plaat *B* over het geheel veel minder schijnt te zijn aangetast door het „ixografische" procédé dan de plaat *A*. De bedoelde plaats ligt hooger dan bij plaat *A* en wel op een hoogte, waarvoor de breedte der diffractiespleet is te stellen op 30 μ.

Mocht men de realiteit van dit verschijnsel aannemen, dan zou daaruit, bij soortgelijke onderstellingen als de boven gemaakte, door berekening zijn af te leiden

$$\lambda_x > 0\,15\ \mu\mu.$$

Met een en ander stemt goed overeen, dat het spleetbeeldje in de plaat *A* naar de zijde der punt merkbaar verder doorloopt dan in de plaat *B* en op de beide platen minder ver dan aan de werkelijke lengte der diffractiespleet zou beantwoorden. Toch mag intusschen ook aan deze beide bijzonderheden weer niet heel veel gewicht worden gehecht, omdat 1° — gelijk gezegd — de plaat *B* over 't geheel minder kracht vertoont dan plaat *A*, 2° de diffractiespleet aan het nauwe einde inderdaad zéér nauw wordt, zoodat ook zonder diffractie wel niet veel inwerking op de daaraan beantwoordende plaatsen van het negatief zou mogen worden verwacht.

Hoewel het verre van mij is te willen beweren, dat door het bovenstaande de conclusie gerechtvaardigd zou zijn, dat X-stralen diffractie vertoonen en dat zij een golflengte hebben van de orde

$$\lambda_x = 0.1 \text{ à } 0.2\ \mu\mu\ (?)\ ,$$

meen ik toch dat de boven ontwikkelde resultaten, welke langs betrekkelijk onafhankelijke wegen werden verkregen — hoe weinig overtuigende kracht ze elk op zich zelf ook mogen bezitten — tezamen genomen minstens mogen doen besluiten, dat de genoemde conclusie *wel eens niet zeer ver van de waarheid zou kunnen zijn* en dat zij tevens een voorgezet onderzoek in de ingeslagen richting wenschelijk maken. Intusschen mag m. i. in elk geval de sub 1° genoemde conclusie worden gehandhaafd [1]).

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens den schrijver aan: *Mededeeling* No. 42 *uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden:* Dr. E. VAN EVERDINGEN JR. „*De galvanomagnetische en thermomagnetische verschijnselen in bismuth.*"

1. Ter verklaring van de galvanomagnetische en thermomagnetische verschijnselen onderstelt RIECKE [2]), dat een galvanische stroom steeds vergezeld gaat van een warmtestroom en omgekeerd een

---

[1]) Mij past een woord van dank voor de goede hulp, mij bij de voor de hier beschreven proeven noodige metingen, door den Heer C. SCHOUTE verleend.

[2]) Gött. Nachr. 1898.

warmtestroom van een galvanischen stroom. De grondslag voor deze onderstellingen is gelegen in de theorie van WEBER over de geleiding van electriciteit en warmte in metalen; in die theorie wordt ook de warmtestroom *uitsluitend* aan beweging van geladen deeltjes toegeschreven.

De snelheden der positieve en negatieve deeltjes zijn:
bij een potentiaalverval van 1 electromagn. eenh. per cM. u en $-v$
bij een temperatuurverval van 1° per cM. g_p en g_n.

In het magneetveld H werkt op een positief ion met snelheid U per eenheid van lading de kracht $H\,U$.

RIECKE neemt verder aan, dat bij het verschijnsel van HALL in den toestand van evenwicht de snelheden der deeltjes in de richting dier kracht nul zijn; het evenwicht wordt bereikt door de gezamenlijke werking van een potentiaal- en een temperatuurverschil tusschen de zijden van het plaatje.

Op deze wijze vindt hij voor den coefficient van het galvanomagnetisch temperatuurverschil (d. i. het temperatuurverschil per eenheid van breedte, bij een potentiaalverval 1 per lengte-eenheid, in een magneetveld 1)

$$\frac{u\,v\,(u+v)}{u g_n + v\,g_p} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en voor de draaiing der equipotentiaallijnen bij het verschijnsel van HALL

$$\frac{u^2\,g_n - v^2\,g_p}{u\;g_n + v\,g_p} = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Op dergelijke wijze worden afgeleid:
de coefficient van het thermomagnetisch potentiaalverschil

$$\frac{g_p\,g_n\,(u+v)}{u g_n + v\,g_p} = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en de coefficient van het thermomagnetisch temperatuurverschil (d.i. de draaiing der isothermen)

$$\frac{u\,v\,(g_p - g_n)}{u\,g_n + v\,g_p} = d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Zijn deze vier verschijnselen waargenomen, dan kan men dus u, v, g_p en g_n berekenen. RIECKE, tot deze berekening overgaande, zegt: „Eine thermomagnetische Temperaturdifferenz scheint hier (bei

Wismuth) nicht vorhanden zu sein." Hij stelt daarom $g_p = g_n$, waardoor de formules belangrijk eenvoudiger worden.

Deze opmerking is echter ongegrond. Reeds in 1887 heeft LEDUC[1]) de draaiing der isothermen in bismuth waargenomen; deze waarneming is door proeven van VON ETTINGSHAUSEN[2]) bevestigd. Groot is die draaiing echter niet en men zou dus kunnen meenen, dat RIECKE's onderstelling niet ver van de waarheid blijft. Om deze vraag te beslissen heb ik de berekening herhaald met de gegevens waarvan RIECKE gebruik maakt, vermeerderd met de uitkomst van VON ETTINGSHAUSEN voor de draaiing der isothermen. Deze vond bij een bismuthplaatje, 2,2 cM. breed en waarschijnlijk 4,8 cM. lang[3]), waarvan twee overstaande randen op 100° en kamertemperatuur werden gehouden, in een magneetveld 9500 tusschen de twee andere randen een temperatuurverschil van $^1/_8$°. Het temperatuurverval in 't midden van dit plaatje zal waarschijnlijk niet meer dan 10° per cM. geweest zijn; daaruit volgt voor d de waarde -6.10^{-7}. De vier grootheden moeten dus berekend worden uit:

$$a = 2{,}98.10^{-10} \qquad b = -7{,}16.10^{-5} \qquad c = 0{,}132 \qquad d = -6.10^{-7}$$

Door eliminatie van g_p en g_n uit de vergelijkingen 1—4 vindt men

$$v^2 + (b + d)\,v + (b\,d - a\,c) = 0 \quad . . (5) \qquad \text{en} \qquad u = v + (b + d) \quad . . (6)$$

of

$$uv = a\,c - b\,d \quad \text{en} \quad u - v = b + d.$$

Van de twee stellen waarden voor u en v, welke deze beide vergelijkingen opleveren, voldoet alleen

$$u = -0{,}005.10^{-5} \qquad v = 7{,}215.10^{-5}.$$

Met behulp der vergelijkingen 3 en 4 berekenen we hieruit

$$g_p = -0{,}012 \qquad g_n = 0{,}133.$$

Men ziet dat g_p en g_n ook niet bij benadering gelijk worden.

De grootheden $\frac{g_p}{u}$ en $\frac{g_n}{v}$, die volgens de theorie evenredig zijn aan

---

[1]) C. R. 104, p. 1784, 1887.

[2]) Wied. Ann. 33, p. 135, 1888.

[3]) Zie VON ETTINGSHAUSEN en NERNST, Wied. Ann. 33., p. 477, 1888.

de kinetische energie respectievelijk van positieve en negatieve deeltjes, worden nu

$$\frac{g_p}{u} = 2{,}4.10^5 \qquad \frac{g_n}{v} = 0{,}0185.10^5$$

2. Een bezwaar dat men zoowel tegen de bovenstaande berekening als tegen die van RIECKE kan inbrengen is dat de verschillende coefficienten niet alle bepaald zijn bij hetzelfde bismuth, en niet alle in hetzelfde magneetveld. Het is immers bekend hoe verschillend de resultaten van waarnemingen bij bismuth uit verschillende bron kunnen uitvallen, en de vier verschijnselen zijn wel theoretisch alle evenredig aan de eerste macht van de veldsterkte, maar in de praktijk ontbreekt dikwijls veel aan die evenredigheid; VON ETTINGSHAUSEN en NERNST vonden bijv. voor de constante van het HALL-effect in magneetvelden van 1650 tot 11100 waarden van — 10,27 tot — 4,95. Bovendien moet in de formules gebruik gemaakt worden van den weerstand van bismuth, die in belangrijke mate afhangt van de sterkte van het magneetveld. Deze overwegingen brachten mij er toe de metingen der verschillende verschijnselen te herhalen bij éénzelfde plaatje en in hetzelfde magneetveld [1]).

Ten einde zooveel mogelijk de storingen te vermijden, welke in gegoten plaatjes kunnen worden veroorzaakt door onregelmatige kristal-structuur [2]), zijn deze waarnemingen verricht met een plaatje, dat electrolytisch was neergeslagen uit een oplossing van bismuthnitraat.

Bij de proeven werd het plaatje vastgeklemd op een plankje, onder twee koperen reepen, bevestigd aan de koperen buizen welke dienden voor het toe- of afvoeren van warmte en tevens als electroden voor den galvanischen stroom. De thermo-elementen konden tusschen het plaatje en het hout worden gestoken op drie verschillende, vaste afstanden van de koperen buizen, waartoe drie groeven in het hout waren aangebracht. Voor het meten van potentiaalverschillen werden de koperdraden der thermo-elementen (nieuwzilver-koper) gebezigd. De ruimte tusschen het plaatje en een der poolstukken van den magneet werd met watten opgevuld.

Een dergelijke inrichting der waarnemingen werd toegepast door VON ETTINGSHAUSEN en NERNST [3]) bij hun onderzoek over de ver-

---

1) Verg. mijne Mededeeling in de Zitting van 28 Mei 1898, p. 58. Comm. Phys. Lab. Leiden, N⁰. 41, p. 13.

2) Verg. mijne Mededeelingen in de Zitting van 21 April 1897, p. 501 en 26 Juni 1897, p. 71, 72. Comm. N⁰. 37, p. 17, N⁰. 40, p. 7, 8.

3) Wied. Ann. 33, p. 474. Was bij deze waarnemingen nog de draaiing der isothermen gemeten, dan zouden ze goede grondslagen voor een berekening hebben opgeleverd.

schijnselen in zuiver bismuth en in legeeringen van bismuth en tin, met dit verschil, dat zij zoowel de koperen buizen als de thermo-elementen aan het plaatje soldeerden.

3. *Metingen.* Afmetingen van het plaatje: Lengte 3,3 cM., breedte 1,15 cM., dikte 0,089 cM.

De waarnemingen waarbij de thermo-elementen zich op het midden van het plaatje bevonden worden aangeduid door de letter *A*; die waarbij ze aan den kant van de verwarmde buis waren geplaatst door *B* en de derde reeks door *C*. De afstand tusschen de koperen reepen bedroeg 2,96 cM; de afstanden van de verwarmde reep tot de 1e, 2e en 3e groef waren resp. 0,65, 1,53 en 2,37 cM.

Bij de beoordeeling der resultaten, onder *B* en *C* vermeld, dient men in 't oog te houden dat de nabijheid der goed geleidende koperen reepen leiden moet tot vermindering der optredende temperatuur- en potentiaalverschillen.

Sommige waarnemingen werden gedaan in eenigszins andere magneetvelden dan hieronder zijn opgegeven. De medegedeelde cijfers zijn dan door grafische interpolatie verkregen, evenals de getallen van VON ETTINGSHAUSEN en NERNST (onder het hoofd v. E. en N.), welke ter vergelijking zijn bijgegeven.

a. *Galvanomagnetisch temperatuurverschil.* De waarnemingsmethode was de volgende: Wanneer de stroom door het plaatje en de magnetisatie-stroom ± 15 minuten gesloten waren geweest en de temperatuur nagenoeg constant was geworden, werden met constante tusschenpoozen afwisselend de uitslagen van beide thermo-elementen waargenomen, bijv. 4 maal die van het eerste en 3 maal die van het tweede. Dan werd het magneetveld omgekeerd, na een paar minuten de waarnemingsreeks herhaald, daarop het magneetveld weer omgekeerd en een derde reeks waarnemingen gedaan. Vervolgens werd deze geheele serie herhaald bij de omgekeerde richting van den stroom door het plaatje.

Elke reeks van 7 waarnemingen geeft een gemiddeld temperatuurverschil tusschen onder- en bovenrand van het plaatje. Het verschil tusschen het gemiddelde van reeks 1 en 3 met reeks 2 geeft het dubbele galvanomagnetisch temperatuurverschil. Ten slotte werd van de uitkomsten bij beide stroomrichtingen het gemiddelde genomen.

Bij deze proeven stroomde door beide buizen water van kamertemperatuur. Zonder deze voorzorg kon een temperatuurverschil van ± 30° ontstaan tusschen de beide randen waar de stroom in- en uittrad, tengevolge van het PELTIER-verschijnsel; door de draaiing der isothermen zou hieruit een merkbare fout kunnen voortvloeien.

Stroom door het plaatje 3,0 ampère.

Magneetveld.	Temperatuurverschil in °C.			
	A	*B*	*C*	v. E. en N. (stroom 5,6)
1350	—	0,00	—	
2730	+ 0,03	+ 0,02	—	+ 0,95
4800	0,16	0,10	+ 0,09	1,66
6100	0,29	0,20	—	2,12

b. HALL-*verschijnsel.*

De waarneming geschiedde volgens de compensatie-methode [1]).

Magneetveld.	HALL-constante.			
	A	*B*	*C*	v. E. en N.
1350	— 14,2	— 11,7	— 11,5	— 10,5
2730	13,1	11,1	11,1	9,3
4800	12,4	10,2	10,2	8,0
6100	11,8	9,9	9.7	7,1

c. Transversaal thermomagnetisch potentiaalverschil.

Voor de meting van dit verschijnsel moeten onder- en bovenrand van het plaatje door den galvanometer verbonden worden; daar verder de warmtestroom niet momentaan omgekeerd kan worden, moet men waarnemen de verandering van den uitslag bij het omkeeren van het veld. Dit omkeeren geschiedde om de minuut; de aflezing werd genomen even voor het omkeeren.

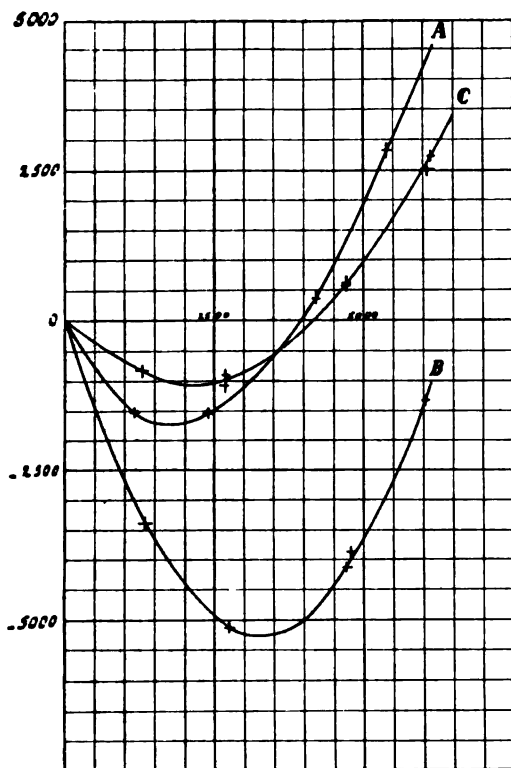
Bij deze meting treedt als storing op de draaiing der isothermen. Ofschoon deze niet groot is, zijn toch de storingen niet te verwaarloozen; immers bij omkeeren van het magneetveld verandert het temperatuurverschil tusschen de beide randen van teeken; bovendien hebben we te doen met een thermo-element bismuth-koper; de storingen bereikten dan ook soms een bedrag van 60 schaaldeelen, wat een fout van 1800 c. g. s. in het potentiaalverschil zou veroorzaken.

---

[1]) Zie Mededeeling van 30 Mei 1896, p. 47. Comm. N°. 26, p. 3.

De warmtestroom werd verkregen door waterdamp van 100° te leiden door een der buizen en water van kamertemperatuur door de andere. Het temperatuurverval, dat we moeten kennen om den coefficient van dit effect te berekenen, is tengevolge van warmteverlies aan de omgeving in de verschillende doorsneden niet hetzelfde. Ik heb daarom de temperatuur op de 3 plaatsen gemeten en gevonden bij *A* ± 34°, *B* 50° en *C* 28°. Hieruit werd grafisch geïnterpoleerd het temperatuurverval, in onderstaande tabel opgegeven.

Magneetveld.	*A*	*B*	*C*	v. E. en N.
	Temp. verval 14	28	8	< 4
	Transversaal therm. magn. pot. verschil in c. g. s. eenheden.			
1350	— 1650	— 3390	— 900	—
2730	— 1300	— 5130	— 825	+ 4900 [1]
4800	+ 1350	— 4020	+ 700	+ 8600
6100	+ 4450	— 1200	+ 2600	+ 10700



In de grafische voorstelling zijn alle waargenomen potentiaalverschillen opgenomen; de abscissen zijn veldsterkten, de ordinaten potentiaalverschillen, beide in c. g. s. eenheden.

d. *Transversaal thermomagnetisch temperatuurverschil* (draaiing van isothermen). Dit temperatuurverschil had kunnen worden waargenomen volgens dezelfde methode als het galvano-magnetisch temperatuurverschil; evenals dit ontstaat het langzamerhand. Tengevolge van verwarming der omgeving was de temperatuur in het plaatje echter niet zoo constant als bij de proeven zonder

[1] De breedte van het plaatje was hier 2,2 cM.

warmte-stroom; bovendien was het wenschelijk, voor de correctie aan het thermo-magnetisch potentiaalverschil, de draaiing onder geheel dezelfde omstandigheden als bij die proeven te meten. Daarom werd hier de temperatuurverandering bij omkeeren van het veld voor elk der thermo-elementen afzonderlijk bepaald.

Magneetveld.	*A*	*B*	*C*
	Temp. verval 14	28	8
	Transversaal therm. magn. temp. verschil in °C.		
1350	— 0,04	— 0,06	—
2730	0,09	0,12	— 0,04
4800	0,14	0,18	0,06
6100	0,16	0,23	0,07

4. Deze resultaten wijken over 't algemeen tamelijk sterk af van die van VON ETTINGSHAUSEN en NERNST. Het galvanomagnetisch temperatuurverschil is kleiner en klimt ongeveer met de tweede macht van de veldsterkte in plaats van met de eerste. Het HALL-effect is grooter — grooter zelfs dan ooit in bismuth is waargenomen — en klimt sterker met de magneetkracht. Bij het thermomagnetisch potentiaalverschil vinden we in de zwakkere velden zelfs een ander teeken dan vroeger werd waargenomen; eerst in sterkere velden is het teeken weer in overeenstemming met de waarnemingen van VON ETTINGSHAUSEN en NERNST; in verband hiermede neemt het effect, eenmaal positief geworden, sterker toe dan met de eerste macht van de magneetkracht.

Waarschijnlijk is de voornaamste reden voor dit verschil de verschillende zuiverheid van het bismuth; ook de omstandigheid, dat mijn bismuth electrolytisch werd neergeslagen, kan van invloed zijn.

Het gedrag der alliages van bismuth en tin kan nu dienen om een aanwijzing te geven, welk bismuth zuiverder is. VON ETTINGSHAUSEN en NERNST onderzochten bismuth, dat als chemisch zuiver werd beschouwd, en vier alliages met stijgend tingehalte. Zij vonden:

a. Het galvanomagnetisch temperatuurverschil heeft een maximum bij het alliage met 1% tin. Bij de alliages is de toename minder dan evenredig met de eerste macht der magneetkracht, bij bismuth ongeveer evenredig daarmede.

b. De HALL-constante is bij de alliages veel kleiner dan bij bis-

muth; de betrekkelijke afname met stijgende magneetkracht wordt grooter naarmate het tingehalte stijgt.

c. Het transversaal thermomagnetisch effect is het grootst bij bismuth; het longitudinaal thermomagnetisch effect daarentegen heeft een maximum bij het alliage met 1% tin. De toename bij de alliages is minder dan evenredig met het magneetveld; bij bismuth ongeveer evenredig daarmede.

Wat *a* en *b* betreft wijkt dus mijn bismuth in tegengestelden zin af van het bismuth van VON ETTINGSHAUSEN en NERNST als de alliages; ook wat *c* betreft, indien men alleen op de afhankelijkheid van de magneetkracht let, terwijl de afwijking in teeken bij de alliages niet wordt gevonden.

Dat het bismuth der genoemde onderzoekers werkelijk niet volkomen zuiver was volgt bovendien nog hieruit, dat de temperatuurcoefficient van den weerstand negatief werd bevonden, terwijl die bij het electrolytische bismuth van HARTMANN en BRAUN volgens FLEMING en DEWAR [1]) positief en geheel als bij andere zuivere metalen is; dat het geleidingsvermogen $4{,}8.10^{-6}$ was tegen $8{,}6.10^{-6}$ bij het electrolytische, en de weerstandstoename in een magneetveld 8400 30% tegen 40% bij het electrolytische volgens HENDERSON [2]).

Het is dus wel waarschijnlijk dat het door mij gebezigde bismuth zeer zuiver is. Terwijl door dit resultaat het vertrouwen in de uitkomsten der proeven versterkt wordt, wil ik nog wijzen op een mogelijke, maar niet waarschijnlijke storing die de teekenverandering van het transversaal effect zou kunnen verklaren. Het zou nl. kunnen zijn, dat de thermo-elementen niet geheel de temperatuurwisselingen van het plaatje volgden, zoodat de storing door draaiing van isothermen grooter zou zijn dan werd berekend. Bedenkt men echter, dat ik daarvoor reeds grooter waarden vond dan VON ETTINGSHAUSEN met aangesoldeerde thermo-elementen verkreeg, dat na 1 minuut de uitslagen zelden meer dan één schaaldeel veranderden, en dat mijn waarden voor de draaiing minstens 6 maal grooter zouden moeten worden om het effect in alle gevallen positief te maken, dan zal men toestemmen dat deze verklaring zeer onwaarschijnlijk is. Het is echter mijn voornemen later nog eens een waarneming met aangesoldeerde thermo-elementen te herhalen.

5. Voor ik overga tot de berekening van u, v enz. uit de nieuwe gegevens moet ik wijzen op een opmerkelijke afwijking tusschen de

---

[1]) Proc. Roy. Soc. 60, p. 73 en 425, 1896. Een dergelijk resultaat werd door mij bij bismuth uit *Oberschlema* verkregen. (Zie mijn dissertatie p. 99).

[2]) Wied. Ann. 53, p. 912, 1894.

theorie van RIECKE en mijne waarnemingen.

Volgens de formules 1 en 3 is de verhouding der coefficienten van thermomagnetisch potentiaalverschil en galvanomagnetisch temperatuurverschil gelijk aan $\frac{g_p}{u} \cdot \frac{g_n}{v}$

$\frac{g_p}{u}$ en $\frac{g_n}{v}$ zijn echter (§ 12 van het stuk van RIECKE) gelijk aan

$$\frac{1}{2\,e}\mu_p\, c_p^2 \qquad \text{en} \qquad \frac{1}{2\,e}\mu_n\, c_n^2$$

waarin e de lading in electromagnetische eenheden is, μ_p en μ_n massa's en c_p en c_n snelheden der geladen deeltjes zijn. Uit den aard der zaak kan dus het product dezer grootheden nooit anders dan positief zijn. Nu werd voor het galvanomagnetisch temperatuurverschil steeds een positieve, voor het thermomagnetisch potentiaalverschil in zwakke velden echter een negatieve waarde gevonden. De regelmatigheid, waarmede dit verschijnsel optrad, die o. a. blijkt uit de grafische voorstelling, bewijst dat geen waarnemingsfouten in 't spel kunnen zijn; geen van de bekende thermomagnetische verschijnselen kan een systematische fout geven; het negatieve teeken van het thermomagnetisch potentiaalverschil in zwakke velden is dus niet overeen te brengen met RIECKE's theorie in haar tegenwoordigen vorm.

Zelfs wanneer men echter van dit negatieve teeken in de zwakke velden zou willen afzien, voert de positieve waarde in sterkere velden in verband met de overige grootheden tot gevolgtrekkingen, die de vraag doen rijzen of bij de theorie wel alles in aanmerking is genomen.

Voor de berekening heb ik gekozen het veld 6100 en de waarnemingen van reeks A. We vinden dan

$$a = 1{,}05.10^{-10} \quad b = -8{,}83.10^{-5} \quad c = 4{,}56.10^{-2} \quad d = -1{,}63.10^{-6}.$$

Voor de berekening van a en b is voor den weerstand van het bismuth, die door mij nog niet bepaald werd, genomen de waarde welke FLEMING en DEWAR vonden in een veld van 6100, nl. 134.10^3 in c.g.s. eenheden.

De formules 5 en 6 geven nu

$$u = -\,0{,}157.10^{-5} \qquad v = 8{,}84.10^{-5}$$

waaruit we verder afleiden

$$g_p = -1,304 \qquad g_n = 0,046$$

dus

$$\frac{g_p}{u} = 8,3.10^5 \qquad \frac{g_n}{v} = 0,0052.10^5$$

Bijzonder waarschijnlijk komt mij deze uitkomst niet voor.

6. Een meer in bijzonderheden tredende vergelijking van de theorie en de waarnemingen wensch ik nog uit te stellen totdat ook de longitudinale verschijnselen: geleidingsvermogen voor electriciteit en warmte, verandering daarvan in het magneetveld en longitudinaal thermo-magnetisch effect bij dit plaatje onderzocht zijn.

Waarschijnlijk komt het mij voor dat de theorie van RIECKE gewijzigd zal moeten worden. Vooreerst zou daarin ook de verandering in het magneetveld van het geleidingsvermogen voor electriciteit en warmte kunnen worden opgenomen. De bestaande waarnemingen over deze verschijnselen toonen aan, dat de verandering veel kleiner is bij het geleidingsvermogen voor warmte dan bij dat voor electriciteit. Dit wijst er dunkt mij op, dat de theorie ten onrechte de *geheele* warmtegeleiding aan de geladen deeltjes toeschrijft [1]). Wenschelijk zou het zijn te beproeven of men, wanneer men dit in aanmerking neemt, de verschijnselen kan verklaren onder de hypothese dat de kinetische energie voor negatieve en positieve geladen deeltjes gelijk is, wat op 't eerste gezicht waarschijnlijker lijkt. Tevens zou het overweging verdienen, bij het opstellen van de formules voor de vier transversale verschijnselen de voorwaarde, dat de snelheden der deeltjes in de richting der electromagnetische kracht nul zijn, te laten varen en te vervangen door een dergelijke voorwaarde als door mij werd aangenomen in de theorie van het HALL-verschijnsel in electrolyten [2]). Het zal eindelijk noodig blijken eenige onderstelling te maken ter beantwoording van de vraag, wat er met de geladen deeltjes gebeurt wanneer ze aan de grens van het metaal komen. RIECKE zelf heeft trouwens reeds opgemerkt [3]), dat men met behulp van zijne hypothesen nog geen volledige theorie van de thermo-electriciteit kan opstellen wanneer men zich niet rekenschap geeft van den toestand aan de grens van twee metalen en zich een bepaalde voorstelling vormt van de wisselwerking tusschen ponderabele moleculen en electrische deeltjes.

---

1) Zie mijn dissertatie p. 114.

2) Zie Mededeeling van 28 Mei 1898, p. 48. Comm. N°. 41, p. 6.

3) § 8 van zijn verhandeling.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens den schrijver aan: *Mededeeling N°. 44 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden:* Dr. J. VERSCHAFFELT, „*Over de afwijkingen tusschen de proeven van* DE HEEN *en de continuiteitswet van* VAN DER WAALS".

(Zal in het Verslag van de volgende Vergadering worden opgenomen).

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens den schrijver aan: „*Mededeeling No. 43 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden:* CH. M. A. HARTMAN, *Het gehalte en de volumina der coëxisteerende damp- en vloeistofphasen bij Chloormethyl en Koolzuur.*"

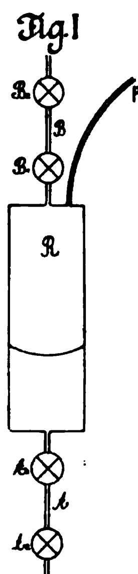
§ 1. De theorie van v. D. WAALS betreffende de mengsels heeft reeds tot het verrichten van talrijke waarnemingen aanleiding gegeven. Zoo heeft KUENEN de isothermen van een drietal mengsels van Chloormethyl en Koolzuur in de gasphase bepaald ten einde voor verschillende temperaturen de ψ-vlakken tot de grenslijn te construeeren en gegevens omtrent de waarden van $a_{1,2}$ en $b_{1,2}$ te verkrijgen. Ook zijn door hem de verschijnselen in de nabijheid van het plooipunt voor verschillende stoffen nagegaan. Daarbij is de loop van de connodale lijnen in de nabijheid van de plooipunten vrijwel bekend geworden.

Het was zeer wenschelijk dat nu ook eens eene over het ψ-vlak doorloopende eerste plooi experimenteel werd nagegaan met aanwijzing in het bizonder van de coëxisteerende phasen. Zijn bij een gegeven temperatuur de gehalten en de dichtheden van deze phasen bekend, zoo kan men de projectie van de connodale lijn op het xv-vlak teekenen en in deze figuur de projecties der raaklijnen trekken, die op het oppervlak de coëxisteerende phasen vereenigen.

Het verkrijgen van de noodige gegevens daartoe is het doel van dit onderzoek. Het lag voor de hand als stoffen te kiezen Chloormethyl en Koolzuur, daar van de mengsels hiervan door KUENEN reeds zoovele gegevens zijn verzameld.

§ 2. De schematische figuur 1 kan dienen om het beginsel van de gevolgde methode van onderzoek toe te lichten.

De coëxisteerende phasen bevinden zich in een wijd reservoir R. Boven aan het reservoir kan men het volumen der damp-phase, dat door het sluiten van kraan B_1 afgezonderd kan worden, door kraan B_2 aftappen en boven kwik in eene gewone gasmeetbuis



opvangen. De hoeveelheid hiervan wordt bepaald door volumen, druk en temperatuur van het gas te meten en het gehalte aan koolzuur wordt gevonden door dit laatste door kali te laten absorbeeren.

Op dezelfde wijze kan men beneden aan het reservoir een bepaald volumen der vloeistof-phase afzonderen.

De volumina van de vloeistof-ruimte A en van de dampruimte B zijn bepaald door meting van het volumen zuurstof, dat zij onder hoogen druk kunnen bevatten.

Het evenwicht tusschen de phasen wordt verkregen door roeren met behulp van een magnetischen roerder, zooals laatstelijk door v. ELDIK beschreven is [1]) (zie § 6). Binnen het wijde reservoir moet op die wijze een volkomen evenwicht worden bereikt. De kranen A_1 en B_1 zijn gedurende het roeren wijd geopend. Ten einde te zorgen dat de samenstelling van de stof in de ruimte B dezelfde is als die van de overige dampphase in R, wordt na voldoende roeren (en desnoods onder voorzichtig voortzetten ervan) langzaam door de kraan B_2 weinig te openen zooveel van de damp afgeblazen als de ruimte B bevat en worden daarna achtereenvolgens de kranen B_2 en B_1 gesloten. Bij het aftappen van de vloeistofmassa wordt op dezelfde wijze met de kranen A_1 en A_2 gehandeld.

De ruimten A en B zijn 0,0778 en 3,25 c.c.m., terwijl het volumen van R ongeveer 150 c.c.m. is. Men mag dus aannemen, dat vloeistof en damp slechts onbeteekenende wijzigingen in samenstelling bij het aftappen ondergaan, wanneer dit met de noodige zorgen op de boven aangegeven wijze geschiedt, en dat dus de door analyse gevonden gehalten van vloeistof- en damp-phase aangeven de gehalten van coëxisteerende phasen bij de temperatuur en den druk, bij welke het aftappen geschiedt. Ik stel mij voor later aan den toestel den phaseverschuiver (beschreven in het Verslag der Vergadering van 29 Mei '97 p. 21) te verbinden waardoor nog beter het blijvend evenwicht der phasen verzekerd kan worden.

Om de temperatuur constant te houden is de toestel geplaatst in een waterbad (zie § 5).

De druk van de coëxisteerende phasen wordt vóór en na het aftappen gemeten met behulp van den aan p bevestigden manometer (zie § 4). Het gemiddelde der beide metingen wordt als de druk aangemerkt, bij welke de coëxisteerende phasen behooren.

---

[1]) v. ELDIK, Verslag der Verg. van 29 Mei '97 p. 20. Comm. Phys. Lab. Leiden. N°. 39.

Heeft men eene meting verricht dan kan men door opnieuw af te tappen eene tweede bepaling verrichten enz., zoolang de voorraad van de vloeibare phase in het reservoir voldoende is. Bij elke opvolgende bepaling vindt men dan eene nieuwe waarde van den druk, waarbij het nieuwe paar coëxisteerende phasen behoort.

Op deze wijze werd gewoonlijk een reeks van eenige bepalingen achter elkander bij dezelfde temperatuur verricht.

§ 3. *Beschrijving van den toestel* (fig. 2—4, zie Plaat). Het reservoir R bestaat uit eene getrokken geelkoperen buis inwendig lang 55 cM., aan beide einden gesloten door een erin geschroefden en gesoldeerden dop. De vloeistofruimte A bevindt zich tusschen de punten van eene dubbelkraan; de kamer van kraan A_1 is met het reservoir verbonden door een van twee moeren voorzien koperen overpijpje a, waarin een nauwen staal-capillair is gesoldeerd, die zoolang is, dat het ondereinde tot aan de kamer van A_1 reikt en het boveneinde door den dop en nog ongeveer 5 mM. daarboven uitsteekt.

Aldus is bereikt dat de verbindingsweg van R met A zoo klein mogelijk zij; terwijl tevens onder in het reservoir eene ringvormige ruimte gevormd is, waarin deeltjes van de wanden of van de pakkingen kunnen bezinken, die bij het overdestilleeren met het gas mede in het reservoir terecht mochten komen.

Doordat een staande rand aan den dop gelaten is, wordt de capillair tegen stooten van den roerder beveiligd.

In den dop aan het boveneinde van het reservoir zijn drie roodkoperen capillairen gesoldeerd.

Een er van, b, leidt naar de kraan B_1; de dampruimte B bestaat uit eene 80 cM. lange, in een spiraal opgewonden koperen capillair van dezelfde doorsnede. Met opzet is ervoor gezorgd, dat het uitstroomingskanaal voor den damp overal dezelfde doorsnede bezit; ten einde het neerslaan van damp door adiabatische uitzetting zooveel mogelijk te voorkomen.

Een tweede buisje c leidt naar kraan C_2 en dient tot verbinding van den zuiveringstoestel der te onderzoeken gassen met het reservoir. Het derde buisje d stelt dit reservoir met de inrichting tot het meten van den druk in verbinding.

§ 4. *Het meten van den druk*. Hiertoe werden bizondere voorzorgen vereischt. Door de verbindingsbuis met den gesloten luchtmanometer met kwik te vullen kan men voorkomen dat in die buis bij temperatuur-verschillen van deze met het waterbad van den toestel condensatie of verdamping plaats grijpe. Dan moet echter de kwik-meniscus, op welken de damp drukt, zich bevinden binnen het

waterbad en zichtbaar zijn ten einde het hoogteverschil met den meniscus van den gesloten manometer te kunnen aflezen.

Het buisje *d* is derhalve door middel van kraan C_1 gekoppeld met den koperen capillair *e*, welke uitkomt boven in het glazen reservoir *D*, dat op zijn beurt langs de stalen capillairen *f* en *g* en de stalen kraan D_1 in verbinding staat met het kwik in de luchtmanometers. Deze zijn ter wille van grootere gevoeligheid twee in aantal, de één voor drukkingen van 4 tot 20, de ander van 18 tot 90 atmosfeeren, zoodat hunne aanwijzingen onderling vergeleken kunnen worden.

De persbussen der beide manometers zijn van boven in verbinding gebracht met een perspomp; van deze en van de buis *h* zijn zij beiden door kranen gescheiden, zoodat zij ieder afzonderlijk buiten gebruik gesteld kunnen worden. Door middel van de perspomp kan het kwik uit een der bussen in de capillairen *h*, *g* en *f* en aldus tot op de gewenschte hoogte in *D* geperst worden.

Het verschil in kwikhoogte in *D* en in de manometers wordt als correctie voor den druk in rekening gebracht.

Het volumen van *D* is zoo groot, dat bij verandering van den druk de kwikmeniscus aldaar steeds zichtbaar blijft, zonder dat telkens van de perspomp gebruik gemaakt behoeft te worden.

§ 5. *Het waterbad.* Een standvastige temperatuur is verkregen door stroomend water te voeren door den watermantel, waarin de toestel geplaatst is. Wanneer gebruik gemaakt werd van het water uit de waterleiding, geschiedde de regeling der temperatuur met dezelfde inrichting welke Dr. van Eldik bij zijne onderzoekingen omtrent capillaire stijghoogten bezigde.[1]) Voor het geval dat de temperatuur der waterleiding hooger was dan voor de waarnemingen werd gewenscht, werd dit door ijs afgekoeld en werd eene circulatie tot stand gebracht, in hoofdzaak overeenkomende met die, welke door Dr. de Haas werd gebruikt in zijn onderzoek omtrent wrijvingscoëfficienten van vloeistoffen[2]).

De watermantel is zoodanig ingericht dat de geheele toestel er van boven af in kan worden geschoven. Daartoe zijn de vier kranen B_1, B_2, C_1 en C_2 gemonteerd op een voetplaat *H*, waaraan de deksel *K* van den mantel is bevestigd. Deze deksel heeft in het midden eene opening om de buizen *e* en *f* door te laten; een staande rand rondom die opening dient om een glazen buis *L* er in te bevestigen. De deksel heeft daarenboven in de vier hoeken kleinere openingen

---

[1]) van Eldik, l. c. p. 22. Comm. etc. N°. 39.

[2]) de Haas. Dissertatie Leiden 1894, p. 8.

met doppen, waardoorheen de buisjes b′ en c′, het andere been van *f* en een thermometer met behulp van kurken goed sluitend gestoken zijn. Aan de voetplaat is van onderen een arm met opening bevestigd, waaraan het reservoir opgehangen is.

De watermantel zelf bestaat uit een rechthoekige kast *M*, die de vier kranen bevat, en een cylinder *N* die het reservoir omhult. In het voorvlak van de kast zijn vier openingen met doppen uitgespaard tegenover de stalen stiften der kranen; zijn deze in den mantel gebracht, dan worden op die stiften koperen verlengstukken gezet en de openingen met kurken waterdicht gemaakt. De dubbelkraan *A* heeft een eigen eraan gesoldeerden mantel; een 10 c. m. hooge caoutchouc-ring *P*, welke over den cylinder schuiven kan, voltooit de waterdichte afsluiting. Een der zijwanden van de kast *M* is van glas ten einde, indien er een lek in den toestel is, te kunnen nagaan, waar het gas ontsnapt. Daar er alleen binnen den watermantel twaalf verbindingen zijn met overpijp en moer, is deze maatregel niet overbodig.

Gedurende mijne waarnemingen bij 9 à 10° was de kamertemperatuur hooger dan die van het waterbad; het water stroomt dan bij *E* den toestel binnen en verlaat deze door den overloop *F*; het is dan te verwachten dat het water bij het doorstroomen mogelijk iets warmer, doch stellig niet kouder zal worden. Aldus wordt voorkómen, dat de vloeistof uit *R* in *D* over-destilleert. Wel vertoonde zich af en toe een weinig vloeistof boven het kwik in *D*; eene merkbare evenwichtsverstoring tusschen de beide phasen had dit echter niet tengevolge, tenminste de manometerstand kreeg geene blijvende verandering.

Voor het geval dat de waarnemings-temperatuur boven die der omgeving ligt, kan hetzelfde bereikt worden door het water bij *F* binnen te laten treden en bij *E* te laten wegstroomen. *G* dient hierbij als overloop indien *F* tijdelijk niet voldoende afvoert.

§ 6. *Het roeren.* De weekijzeren roerder bestaat uit een 15 m.m. lang staafje, aan de uiteinden van een 12 m. m. breede schijf voorzien, en wordt electromagnetisch bewogen door een draadklos *S*, buiten den watermantel aangebracht. Een cylindertje *T* van ijzerblik om het reservoir passend beweegt met den klos mede en dient om de magnetische krachtlijnen in de as van den klos te concentreeren. De stroom voor dezen klos wordt geleverd door vier draagbare accumulatoren.

§ 7. *De analysen.* De samenstelling van het boven kwik opgevangen gasmengsel wordt bepaald door het Koolzuur met stukjes bijtende kali te laten absorbeeren. Deze staafjes van 10 à 15 m. m. lengte

mogen niet te droog zijn, anders is er geene zekerheid, dat al het Koolzuur aangetast wordt. Echter moet aan de andere kant zorg gedragen worden, dat die staafjes niet al te vochtig zijn, daar een afzonderlijk onderzoek aantoonde, dat het Chloormethyl door eene verzadigde oplossing van bijtende kali opgelost wordt. Met eenige oefening gelukte het spoedig, de staafjes in den gewenschten toestand van vochtigheid in de gasmeetbuizen te brengen.

Het gas wordt gedurende eenige dagen met kali in aanraking gelaten. Om de absorbtie te bespoedigen worden deze buizen zoover mogelijk gedompeld in diepe kwikbakken, vervaardigd uit een 1 M. lange ijzeren gaspijp, van onderen gesloten door een dop en van boven voorzien van eene breede glazen kom. Ook een in vertikalen zin heen en weer bewegen van de buis in den kwikbak bevordert de koolzuur-absorbtie zeer.

Bij het bepalen van de hoeveelheid gas in de buis wordt deze zoover ingedompeld, dat volumen en druk van het gas met dezelfde nauwkeurigheid gemeten worden. Om de buizen heen sluiten veerende busjes van dun van tin bevrijd ijzerblik, voorzien van naar beneden omgebogen en in een scherpe punt uitloopende wijzers. Met de punt wordt ingesteld op het kwik-oppervlak, met den rand van het busje op de verdeeling van de glazen buis. Bij deze aflezing is om de buis een caoutchouc-stop geschoven, waarop een glazen watermantel is geplaatst. Door deze eenvoudige inrichting is ook de temperatuur van het te meten gas bekend en kan dus het volumen tot 0° C en 1 atm. herleid worden.

Bij de bepaling van de afgetapte hoeveelheid van vloeistof- en dampmengsel wordt ook in aanmerking genomen het gedeelte van het mengsel dat bij het uitstroomen onder den barometerdruk in de ruimten A of B achterblijft. Vooral voor den damp bij lage spanningen is dit niet te verwaarloozen.

Daar de gasmeetbuizen op de gewone wijze met kwik gevuld werden, werd de kleine hoeveelheid lucht, die daarbij in het theoretisch vacuum overblijft, bepaald en in rekening gebracht.

§ 8. *Uitkomsten.* Onderzocht is de plooi op het ψ-vlak van Koolzuur en Chloormethyl bij 9°,5. Daar het er vooral op aan kwam de plooi bij ééne bepaalde temperatuur zoo goed mogelijk te leeren kennen, werden voor kleine verschillen correcties toegepast om alle bepalingen op dezelfde temperatuur te herleiden. De verkregen uitkomsten ontleend aan het onderzoek van een tiental coëxisteerende phasen zijn nog slechts voorloopige; doch zij zijn reeds voldoende om het karakter der plooi, zooals deze uit de waarnemingen volgt,

te leeren kennen. Wij kunnen met eene grafische voorstelling der uitkomsten volstaan.

In fig. 5 vindt men aangegeven de waarde van het gehalte aan Chloormethyl (x van VAN DER WAALS) in functie van den druk in atmosferen (als ordinaat) voor de vloeistof- en voor de dampphase. In

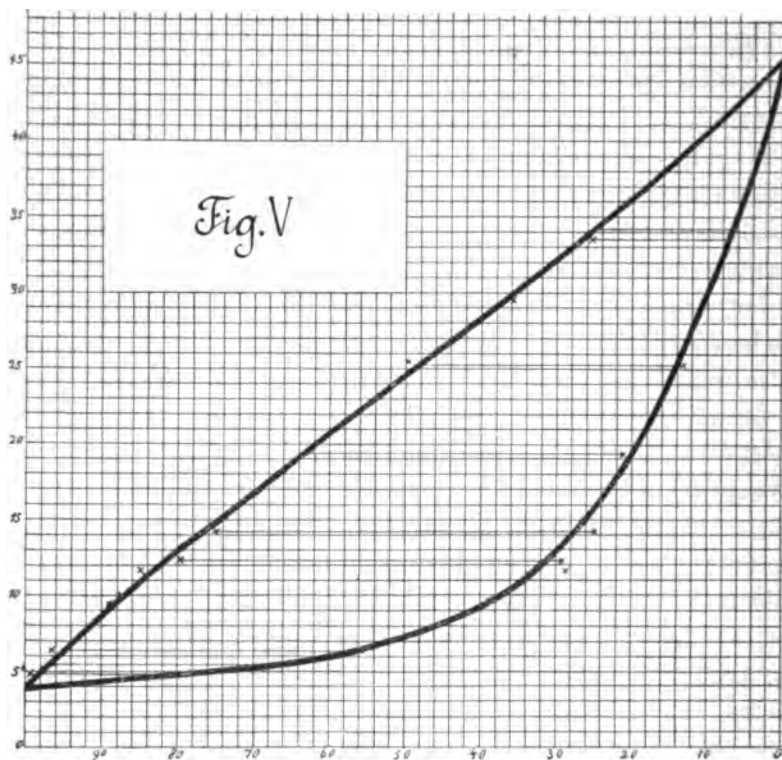


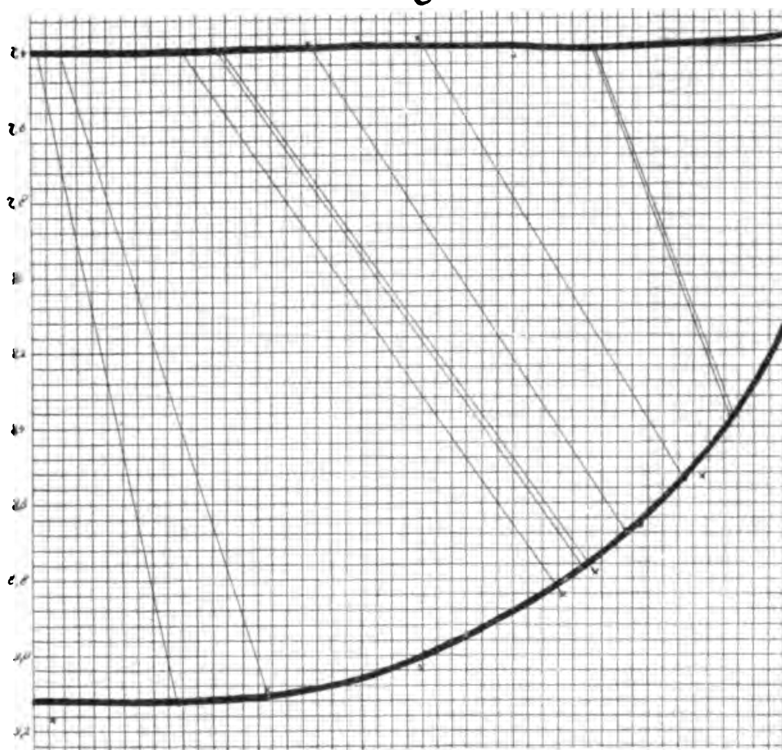
Fig. V

fig. 6 is verder aangegeven de waarde van de logarithme van het volumen in functie van het gehalte. Als eenheid van volumen van een mengsel is hierbij gekozen dat bij 0° C. en 1 atmosfeer. Ter wille van een goed overzicht is hier niet het volumen zelf, doch de logarithme ervan als naar beneden gerichte ordinaat gekozen. Uit deze figuur en eenige daarin geteekende lijnen, die de coëxisteerende phasen verbinden, is dus onmiddellijk voor de connodale lijn met de samenhoorende raakpunten de projectie op het $x\,v$-vlak af te leiden.

Merkwaardig is dat de vloeistoflijn in fig. 5 zoo weinig van de rechte lijn verschilt. Het schijnt dus dat voor deze mengsels en de gekozen temperatuur de dampdruk van de vloeistof-phase van een mengsel nagenoeg mag worden voorgesteld door

$$P = P_1\,(1-x) + P_2\,x$$

Fig. VI



waarin P_1 en P_2 de dampspanningen der bestanddeelen zijn. Vergelijkt men dit met de door v. d. WAALS gegeven formule[1]), dan blijken de daarin voorkomende exponenten weinig van nul te verschillen.

Natuurkunde. — De Secretaris biedt namens den Heer H. A. LORENTZ een opstel aan, getiteld: *Beschouwingen over den invloed van een magnetisch veld op de uitstraling van licht.*

§ 1. Wanneer men aanneemt dat elk molekuul eener lichtbron een enkel bewegelijk ioon bevat, dat in alle richtingen uit zijn evenwichtsstand kan worden verplaatst, en dat, naar welke zijde dit ook geschiede, steeds door dezelfde met de verplaatsing evenredige kracht naar den evenwichtsstand wordt teruggedreven, komt men tot de bekende eenvoudige theorie van het door Dr. ZEEMAN ontdekte verschijnsel. Eene enkele spectraallijn moet dan onder den invloed van

---

[1]) v. d. WAALS, Zittingsversl. 28 Mei '91 p. 416.

het magnetisch veld vervangen worden door een triplet, als men loodrecht op, en door een doublet, als men langs de krachtlijnen waarneemt; verder moeten de componenten der tripletten en doubletten op eene gemakkelijk aan te geven wijze gepolariseerd zijn.

Terwijl nu de eerste waarnemingen van ZEEMAN zich met deze opvatting lieten vereenigen, en hij weldra door de werkelijke waarneming van tripletten en doubletten de theoretische voorspellingen bevestigd vond, is het toch gebleken dat veelal de zaak minder eenvoudig is. CORNU toonde aan dat, b. v. bij eene der *D*-lijnen, bij waarneming loodrecht op de krachtlijnen de middelste component van het triplet dubbel gezien wordt, zoodat men een quadruplet verkrijgt. MICHELSON en TOLVER PRESTON vonden in vele gevallen niet alleen een nog veel ingewikkelder bouw der middelste component, maar eene dergelijke samengesteldheid van de buitenste componenten van het triplet.

Volgens deze waarnemingen moet de naam triplet niet te letterlijk worden opgevat, al is hij in zoo verre nog steeds van toepassing dat het middelste deel van het lichtverschijnsel in het spectrum (de twee middelste lijnen b. v. van het quadruplet van CORNU) rechtlijnig gepolariseerd is met het polarisatievlak loodrecht op de krachtlijnen, terwijl in het rechter- en linkergedeelte het polarisatievlak evenwijdig aan de krachtlijnen is.

§ 2. Klaarblijkelijk maken de aangevoerde feiten het noodig, de eenvoudige theorie die zoo even in herinnering gebracht werd door eene ruimere te vervangen. Eenigen tijd geleden heb ik daarom nagegaan [1]), hoe zich de verschijnselen moeten toedragen, wanneer een molekuul met een willekeurig aantal graden van vrijheid en met willekeurig verdeelde electrische ladingen oneindig kleine trillingen om een evenwichtsstand uitvoert. Op hetgeen op deze wijze kan worden afgeleid kom ik straks terug. Eerst moge worden medegedeeld welke besluiten aangaande de mogelijke polarisatietoestanden uit beschouwingen over de symmetrie kunnen worden getrokken.

In de lichtbron die aan de proef onderworpen wordt mogen wij in elk geval een stelsel van uiterst kleine deeltjes zien, die voor een deel bewegingen met de periode der lichttrillingen uitvoeren; daar deze deeltjes electrische ladingen hebben zullen zij in den omringenden aether periodiek wisselende dielectrische verplaatsingen opwekken. Hierin bestaat de lichtbeweging die zij uitstralen.

Men kan zich nu voorstellen dat van dit geheele stelsel, dat wij

---

[1]) *Wied. Ann.* Bd. 63, p. 278, 1897.

door S zullen aanduiden, het spiegelbeeld S' ten opzichte van een vast plat vlak P genomen wordt. Ik bedoel daarmede het volgende.

Is A een deeltje van S, dan zal in S' een deeltje A' voorkomen, dat het spiegelbeeld van A en van denzelfden physischen aard als dit deeltje is. Met name zal de massa en de electrische lading dezelfde zijn; of, nauwkeuriger gezegd, in overeenkomstige punten van A en A' zal dezelfde materieele dichtheid en dezelfde dichtheid der electrische lading bestaan. Verder zullen de deeltjes A' *op elk oogenblik* het spiegelbeeld zijn van de deeltjes A, zoodat van het spiegelbeeld der ionenbewegingen kan gesproken worden. Is dit het geval, dan zullen ook de in de beide stelsels S en S' opgewekte lichtbewegingen elkanders spiegelbeeld zijn, in dier voege dat de vectoren, die in S' de dielectrische verplaatsing voorstellen de spiegelbeelden zijn van de overeenkomstige vectoren in S.

Zal dit alles mogelijk zijn, dan moeten natuurlijk ook de krachten die op de deeltjes A' werken de spiegelbeelden zijn van die, waaraan de deeltjes A onderworpen zijn. Wat de *onderlinge* werking der deeltjes betreft mogen wij dit opvatten als een gevolg van de ondergestelde gelijkheid in physische hoedanigheid. Om ook de krachten die haar oorsprong in het uitwendige magnetische veld vinden aan de voorwaarde te laten voldoen zullen wij aannemen dat de vectoren die de magnetische kracht in S' voorstellen uit de overeenkomstige vectoren in S verkregen worden door daarvan eerst de spiegelbeelden te nemen, en dan de richtingen dezer spiegelbeelden om te keeren [1]).

Verder zal worden aangenomen dat, wat de werkelijk waarneembare verschijnselen betreft, het spiegelbeeld der lichtbron dezelfde eigenschappen heeft als de lichtbron zelf en dus door deze vervangen kan worden.

Eindelijk stellen wij ons voor dat de geheele lichtbeweging in den aether door middel van het theorema van Fourier in enkelvoudige trillingen ontbonden wordt; natuurlijk zal, wanneer de totale lichtbewegingen in S en S' elkanders spiegelbeeld zijn, dit eveneens gelden van die gedeelten der lichtbewegingen, die eene bepaalde periode T — of, zoo men wil, perioden tusschen twee bepaalde grenzen T en $T + d\,T$ — hebben.

§ 3. Zij Q eene rechte lijn, uit een punt der lichtbron in de richting der krachtlijnen getrokken en duiden wij kortheidshalve

---

[1]) Wanneer het magnetische veld door electrische stroomen wordt voortgebracht, zullen wij het vereischte veld in S' kunnen opvatten als te ontstaan uit stroomen, die de spiegelbeelden van de stroomen in S zijn.

door L de lichtbeweging *met eene bepaalde periode* T aan, die in een verwijderd punt van Q wordt waargenomen. Men neme het spiegelbeeld van het geheele stelsel ten opzichte van een vlak dat evenwijdig aan de lijn Q loopt; gemakkelijk ziet men in dat het spiegelbeeld L' de lichtbeweging is, die in het beschouwde punt zou verkregen worden, als men zonder aan de lichtbron iets te veranderen de richting van het magnetische veld omkeerde. Derhalve kan L' zeer goed van L verschillen, maar, wat de waarneembare eigenschappen betreft, moet L' niet veranderen, wanneer men aan het vlak een anderen stand, mits steeds evenwijdig aan de lijn Q, geeft.

Hieruit volgt dat, als men alle trillingen van L volgens eene lijn R, loodrecht op Q, ontbindt, de intensiteit die door de verkregen componenten wordt voortgebracht, onafhankelijk moet zijn van de richting van R. Immers, wanneer R_1 en R_2 twee lijnen, loodrecht op Q zijn, en I_{r1} en I_{r2} de daarbij op de gezegde wijze behoorende intensiteiten, dan kan men aan het spiegelende vlak twee standen P_1 en P_2 geven, zoodanig dat het spiegelbeeld van R_1 ten opzichte van P_1 samenvalt met dat van R_2 ten opzichte van P_2. Is R' de richting dezer samenvallende spiegelbeelden en $I'_{r'}$ de bij deze trillingsrichting behoorende intensiteit in L'— welke grootheid blijkens het bovengezegde dezelfde is, welken stand men ook aan het spiegelende vlak toekenne — dan moet $I_{r1} = I'_{r'}$ en $I_{r2} = I'_{r'}$ en dus $I_{r1} = I_{r2}$ zijn.

Wij besluiten hieruit dat het licht dat zich langs de krachtlijnen voortplant, en eene bepaalde periode T heeft, dus in het spectrum op eene bepaalde plaats wordt waargenomen, niet geheel of gedeeltelijk rechtlijnig of elliptisch gepolariseerd kan zijn. Het kan niet anders zijn dan natuurlijk, of wel geheel of gedeeltelijk circulair gepolariseerd.

Natuurlijk licht zou men hebben, wanneer er geen invloed van het magnetisch veld bestond. Volkomen circulair gepolariseerd zijn, voor zoover wij weten, de componenten der langs de krachtlijnen waargenomen doubletten. Uit het bovenstaande blijkt dat ook gedeeltelijk circulair gepolariseerd licht kan uitgestraald worden. Tevens volgt eruit dat, zoo men bij de eene richting der magnetisatie op eene bepaalde plaats in het spectrum rechts circulair gepolariseerd licht ziet, men op diezelfde plaats links circulair gepolariseerd licht moet verkrijgen, wanneer de magnetisatie wordt omgekeerd.

§ 4. Men kan eene dergelijke redeneering toepassen op het geval dat men loodrecht op de krachtlijnen waarneemt. Wij plaatsen thans het spiegelende vlak loodrecht op de krachtlijnen. Daar dan het magnetisch veld niet verandert, moet, wat de waarneembare eigen-

schappen betreft, de lichtbeweging gelijk zijn aan haar spiegelbeeld. Daaruit volgt, dat het licht dat thans in een bepaald punt van het spectrum wordt waargenomen niet circulair of elliptisch — zoo min gedeeltelijk als geheel — gepolariseerd kan zijn. Het moet of natuurlijk licht zijn, of wel geheel of gedeeltelijk rechtlijnig gepolariseerd, met het polarisatievlak evenwijdig aan of loodrecht op de krachtlijnen.

Het behoeft nauwelijks gezegd te worden dat alle waarnemingen met deze gevolgtrekking in overeenstemming zijn.

§ 5. Door eene nadere beschouwing van het mechanisme der uitstraling komt men ook tot een verband tusschen het licht dat langs, en het licht dat loodrecht op de krachtlijnen wordt waargenomen. Althans ééne gevolgtrekking in dit opzicht ligt voor de hand.

Zij M een enkel molekuul der lichtbron, en trekken wij daarin drie onderling loodrechte assen OX, OY en OZ, de eerste langs de krachtlijn. Laat in een punt van het molekuul met de coördinaten x, y z de electrische lading e bestaan; dan kunnen wij $\Sigma\, e\, x$, $\Sigma\, e\, y$, $\Sigma\, e z$ — over het geheele molekuul uitgestrekt — de componenten van het electrische moment van het deeltje noemen.

Deze grootheden veranderen van oogenblik tot oogenblik en zijn misschien zeer ingewikkelde functiën van den tijd. Door middel van het theorema van FOURIER kunnen wij er echter de deelen uit afzonderen, die eene bepaalde periode T hebben. Wij zullen alleen deze deelen beschouwen en er de teekens $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ voor invoeren.

Indien nu de afmetingen van het molekuul zeer klein zijn in vergelijking met de golflengte en de waarnemer op een afstand staat, die zeer vele golflengten bevat, kan men uit de theorie afleiden dat in punten van OY alleen licht wordt voortgebracht door de wisselingen van $\mathfrak{M}_x$ en $\mathfrak{M}_z$, en wel zoo, dat $\mathfrak{M}_x$ electrische trillingen evenwijdig aan de krachtlijnen geeft en $\mathfrak{M}_z$ trillingen loodrecht daarop. Iets dergelijks geldt natuurlijk van punten op OX en OZ.

Stel nu dat men bij waarneming loodrecht op de krachtlijnen, b.v. in een punt van OY, op eene bepaalde plaats in het spectrum licht verkrijgt, dat volkomen rechtlijnig gepolariseerd is met het polarisatievlak loodrecht op de krachtlijnen. Dan wordt op die plaats geene lichtbeweging teweeggebracht door $\mathfrak{M}_z$, en daar de molekulen onafhankelijk van elkander trillen en dus nooit het licht dat 't eene uitstraalt geheel kan worden opgeheven door het licht dat van een ander uitgaat, moet in elk molekuul $\mathfrak{M}_z = 0$ zijn. Hetzelfde geldt natuurlijk van $\mathfrak{M}_y$, maar daaruit volgt dat men in een punt van OX, dus in de richting der krachtlijnen, geen licht kan waarnemen.

Men mag dus wel voorspellen dat men van het bovenbedoelde door BECQUEREL vermelde triplet eener ijzerlijn, bij waarneming langs de krachtlijnen niet, zooals bij de gewone tripletten, alleen de buitenste componenten, maar juist alleen de middelste component zal zien.

§ 6. In de boven aangehaalde verhandeling heb ik de bewegingsvergelijkingen opgesteld voor de oneindig kleine trillingen van een molekuul met n graden van vrijheid, dat in een magnetisch veld geplaatst is. Ik noemde $p_1, p_2, \ldots p_n$ de algemeene coördinaten, zoo gekozen, dat zij 0 zijn in den evenwichtsstand en dat bij de verschillende enkelvoudige bewegingswijzen voor welke het molekuul buiten het magnetisch veld vatbaar is, telkens slechts ééne dezer coördinaten verandert, en vond dan voor de bewegingsvergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} a_1 \ddot{p}_1 + b_1 p_1 - (c_{1.2} \dot{p}_2 + c_{1.3} \dot{p}_3 + \quad \ldots \quad + c_{1.n} \dot{p}_n) = 0, \\ a_2 \ddot{p}_2 + b_2 p_2 - (c_{2.1} \dot{p}_1 + c_{2.3} \dot{p}_3 + \quad \ldots \quad + c_{2.n} \dot{p}_n) = 0, \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

enz.

Hierin zijn de coefficienten a en b constanten, onafhankelijk van het magnetisch veld. De invloed van dit laatste wordt door de termen met de grootheden c uitgedrukt, en wel zijn deze alle evenredig met de veldsterkte. Zij voldoen verder aan de betrekkingen

$$c_{r.s} = - c_{s.r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Om de mogelijke trillingstijden te vinden stelle men, naar eene bekende methode, in (1):

$$p_1 = \mu_1 e^{lt}, \quad p_2 = \mu_2 e^{lt}, \quad \ldots \quad p_n = \mu_n e^{lt},$$

en elimineere uit de verkregen vergelijkingen $\mu_1, \mu_2, \ldots u_n$. Men verkrijgt dan eene vergelijking die, wanneer men

$$\frac{b_1}{a_1} = k_1^2, \quad \frac{b_2}{a_2} = k_2^2, \quad \ldots \quad \frac{b_n}{a_n} = k_n^2$$

en

$$\frac{c_{r.s}}{a_r} = - e_{r.s}$$

stelt, in den volgenden vorm kan worden gebracht:

$$\begin{vmatrix} l^2+k_1^2, & e_{1.2}\,l, & e_{1.3}\,l, & \ldots & e_{1.n}\,l \\ e_{2.1}\,l, & l^2+k_2^2, & e_{2.3}\,l, & \ldots & e_{2.n}\,l \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ e_{n.1}\,l, & e_{n.2}\,l, & e_{n.3}\,l, & \ldots & l^2+k_n^2 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (3)$$

Uit de betrekkingen (2) kan men afleiden dat in de ontwikkeling der determinant alleen even machten van l^2 voorkomen. Men heeft dus eene vergelijking, die ten opzichte van l^2 van den n^{den} graad is. Uit de omstandigheden van het vraagstuk volgt dat de wortels dezer vergelijking alle reëel en negatief moeten zijn; zoodat men n paar imaginaire waarden voor l vindt. Zijn $+ i\,k'_r$ en $- i\,k'_r$ twee dier waarden, dan beantwoordt daaraan een bewegingstoestand met de frequentie (ik bedoel het aantal trillingen in den tijd $2\,\pi$) k'_r.

Is er geen magnetisch veld, dan worden de frequenties klaarblijkelijk

$$k_1, \quad k_2, \quad . \; . \; . \quad k_n$$

en het is duidelijk dat, wanneer er wel een magnetisch veld is, voor elke dezer frequenties eene waarde k'_r zal in de plaats komen, die zeer weinig van k_r verschilt.

Ik had mij in de aangehaalde verandering bepaald tot de ontwikkeling van (3) tot en met de termen die het product van twee factoren e bevatten. Door Π het product

$$(l^2 + k_1^2) \quad (l^2 + k_2^2) \quad . \; . \; . \quad (l^2 + k_n^2)$$

voorstellende, en door $\Pi_{r.s}$ wat men verkrijgt, wanneer men hierin de factoren $l^2 + k_r^2$ en $l^2 + k_s^2$ weglaat, verkrijgt men dan

$$\Pi + \Sigma\, l^2\, e_{r.s}\, e_{s.r}\, \Pi_{r.s} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

waar het somteeken op alle combinaties van verschillende indices r en s betrekking heeft.

Uit deze vergelijking kan men nu, zooals toen werd aangewezen, afleiden dat een triplet alleen kan worden verkregen, wanneer drie der waarden k aan elkander gelijk zijn, wat men kan uitdrukken door te zeggen dat het stelsel drie aequivalente graden van vrijheid heeft. Dit is ook begrijpelijk als men bedenkt dat, bij geleidelijke afname van het magnetisch veld, de drie componenten van het triplet moeten samenvallen, zoodat de enkele spectraallijn, die buiten het

veld gezien wordt, kan worden opgevat als uit drie op elkander vallende lijnen te bestaan.

Dezelfde beschouwing op het quadruplet van CORNU toepassende komt men tot het denkbeeld dat de lijnen die daarin overgaan moeten worden opgevat als reeds onder gewone omstandigheden uit vier lijnen te bestaan, die elkander echter bedekken, m. a. w. dat er thans vier aequivalente graden van vrijheid, dus 4 gelijke waarden k moeten zijn.

Toch kan men uit de vergelijking (4) het ontstaan van een quadruplet niet verklaren. Immers, wanneer k_1, k_2, k_3, k_4 de frequenties met eene zelfde waarde k zijn, komen in elken term van (4) minstens twee factoren $l^2 + \mathrm{k}^2$ voor. Dus zal de vergelijking nog twee gelijke wortels $-\mathrm{k}^2$ hebben, en daarnaast nog slechts twee wortels die weinig van $-\mathrm{k}^2$ verschillen.

§ 7. De Heer A. PANNEKOEK heeft mij echter doen opmerken dat in dit geval de vergelijking (4) niet volledig is, daar sommige van de weggelaten termen van dezelfde orde van grootte zijn als de termen die men behouden heeft. Keeren wij dus thans tot (3) terug. Wanneer $k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = k_4^2 = \mathrm{k}^2$, is, zullen in elk geval ook vier wortels van de vergelijking (3), zoo zij niet $= -\mathrm{k}^2$ zijn, daarvan zeer weinig verschillen. Wanneer nu l^2 een dezer waarden heeft (over de andere waarden van l^2 behoeven wij ons nu niet te bekommeren), dan zullen de vier grootheden $l^2 + k_1^2$, $l^2 + k_2^2$, $l^2 + k_3^2$, $l^2 + k_4^2$ klein zijn. Daarentegen zullen de grootheden

$$l^2 + k_5^2, \quad l^2 + k_6^2, \quad . \; . \; . \quad l^2 + k_n^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

waarden hebben, die volstrekt niet bijzonder klein worden. Daar ook de grootheden $e\,l$ alle klein zijn, zullen de elementen (5) der determinant alle andere elementen ver overtreffen, en zullen wij eene voldoende benadering verkrijgen, wanneer wij in de ontwikkeling der determinant alleen die termen nemen die al de grootheden (5) als factoren bevatten. Klaarblijkelijk vindt men aldus ter bepaling van de waarden van l^2, die weinig van $-\mathrm{k}^2$ verschillen, de vergelijking

$$\begin{vmatrix} l^2 + \mathrm{k}^2, & e_{1.2}\, l, & e_{1.3}\, l, & e_{1.4}\, l \\ e_{2.1}\, l, & l^2 + \mathrm{k}^2, & e_{2.3}\, l, & e_{2.4}\, l \\ e_{3.1}\, l, & e_{3.2}\, l, & l^2 + \mathrm{k}^2 & e_{3.4}\, l \\ e_{4.1}\, l, & e_{4.2}\, l, & e_{4.3}\, l, & l^2 + \mathrm{k}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bij ontwikkeling hiervan verkrijgt men wegens de betrekkingen (2) in het eerste lid geene termen, die een *oneven* aantal factoren van den vorm $e_{r.s}\, l$ bevatten. De vergelijking kan derhalve gebracht worden in den vorm

$$(l^2 + k^2)^4 + A\,(l^2 + k^2)^2 + B = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

waarin A bestaat uit termen die 2 factoren van den vorm $e_{r.s}\, l$ en B uit termen die 4 dergelijke factoren bevatten. Wij mogen in al deze factoren l^2 door de benaderde waarde $-\, k^2$ vervangen. Daardoor worden A en B bekend en wel is A evenredig aan de tweede macht en B evenredig aan de vierde macht der veldsterkte. Uit (6) vinden wij nu twee waarden van $(l^2 + k^2)^2$, waarden die beide reëel en positief moeten worden, daar, zooals reeds werd opgemerkt, voor l^2 reëele waarden moeten worden gevonden. Wij kunnen dus de oplossing van (6) voorstellen door

$$(l^2 + k^2)^2 = \alpha^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (7)$$

en

$$(l^2 + k^2)^2 = \beta^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (8)$$

waarin α en β bekende, stel positieve, grootheden zijn, die blijkens het omtrent A en B gezegde evenredig zijn met de veldsterkte.

Ten slotte verkrijgen wij uit (7) en (8) de volgende *vier* waarden van l^2

$$l^2 = -\, k^2 + \alpha, \quad -\, k^2 - \alpha, \quad -\, k^2 + \beta, \quad -\, k^2 + \beta,$$

zoodat in het spectrum werkelijk een quadruplet kan ontstaan. Opdat de vier lijnen van dit quadruplet volkomen scherp zijn is het nog noodig, dat bij een gegeven magnetisch veld de grootheden α en β onafhankelijk zijn van de wijze, waarop het molekuul gericht is, of, wat op 't zelfde neerkomt, dat bij een gegeven stand van het molekuul, α en β onafhankelijk zijn van de richting der magnetische kracht.

De Heer Pannekoek merkte ook op, dat men op eene dergelijke wijze het geval kan behandelen dat een willekeurig aantal, b.v. p der frequenties k aan elkander gelijk zijn. Men komt dan tot het besluit dat bij een gegeven stand van het molekuul in het veld de enkelvoudige spectraallijn door den magnetischen invloed in eene p-voudige lijn moet veranderd worden, en wel zoo dat de stand der verschillende componenten symmetrisch is, rechts en links van de

oorspronkelijke lijn. Dit brengt mede dat wanneer p oneven is, ééne component op de plaats der oorspronkelijke lijn blijft.

Eene groote moeilijkheid blijft het nu echter zich een stelsel voor te stellen dat werkelijk, zooals men het voor de quadrupletten zou noodig hebben, vier aequivalente graden van vrijheid bezit, vooral wanneer men bovendien den eisch stelt dat de waarden van α en β onafhankelijk van de richting der magnetische kracht ten opzichte van het molekuul moeten zijn. Ik ben er niet in geslaagd een stelsel te verzinnen, dat werkelijk aan deze voorwaarden voldoet. Intusschen zou men kunnen aanvoeren dat het bestaan van het quadruplet de gelijkheid van vier frequenties (als er n.l. geen magnetisch veld is) *bewijst* en dat dus de bovenstaande theorie van het quadruplet juist moet zijn, al kunnen wij ons het mechanisme nog niet voorstellen.

Ik ben echter huiverig de zaak zoo op te vatten, daar het m. i. nog niet geheel zeker is dat de trillingen die het licht voortbrengen werkelijk door formules van den vorm (1) kunnen worden beschreven.

Natuurkunde. — De Heer P. ZEEMAN biedt voor het Verslag der Vergadering een opstel aan: „*Over eene asymmetrie in de verandering der spectraallijnen van ijzer bij straling in een magnetisch veld.*"

1. Het is bekend dat men bij de elementaire behandeling van den invloed van magnetische krachten op spectraallijnen, volgens de theorie van LORENTZ, volstaan kan, wanneer men zich tot één spectraallijn beperkt, met aan te nemen dat ieder lichtend atoom één enkel beweeglijk ioon bevat waarop eene veerkracht werkt, die evenredig is met de verplaatsing van het ioon uit zijn evenwichtsstand. Alle bewegingen van een dergelijk ioon worden in genoemde theorie ontbonden in rechtlijnige trillingen langs de krachtlijnen en circulaire trillingen, in twee tegengestelde richtingen, „rechtsom" en „linksom", loodrecht op de krachtlijnen. De trillingsduur der eerstgenoemde wordt door het uitwendig veld niet gewijzigd, die van beide laatstgenoemde, naar gelang van de richting verlengd of verkort. De doubletten in de richting der krachtlijnen, de tripletten in de richting loodrecht daarop worden aldus zeer eenvoudig verklaard en eveneens de optredende polarisatie-verschijnselen. De theorie doet dan verder verwachten dat de beide uiterste componenten van het triplet gelijke intensiteit moeten hebben en evenzoo de beide circulair gepolariseerde lijnen van het doublet. Zoowel door de directe waarneming als door de negatieven door mij zelve

en anderen opgenomen, werd in de tot nog toe onderzochte gevallen steeds de genoemde eenvoudige verdeeling der intensiteiten bevestigd gevonden. Intusschen kan men zich de vraag stellen of uitwendige magnetische krachten, die de molekulaire kringstroomen welke in een ionentheorie der magnetisatie [1]) worden aangenomen, kunnen richten, niet de circulaire bewegingen boven die langs de krachtlijnen kunnen begunstigen. [2]) Wordt dit aangenomen dan moet men er ook toe besluiten dat het omloopen der ionen in de eene richting meer moet geschieden dan in de andere. Er zal dus dan een verschil in intensiteit moeten ontstaan tusschen de beide uiterste componenten van het triplet en tusschen de twee componenten van het doublet. Hoewel het gewone magnetisme der sterk magnetische stoffen in een vonk verdwenen is, ligt het toch eenigszins voor de hand te onderstellen dat men naar een dergelijk verschijnsel, waarbij de „moleculaire stroomen'' van AMPÈRE (of het deel dier stroomen, dat wordt opgeleverd door de beweging der lichtionen) zich optisch zouden openbaren, nog met de meeste kans op gevolg zal kunnen zoeken bij ijzer, nikkel en kobalt. Het schijnt mij echter niet van te voren uitgesloten, dat andere stoffen niets van dien aard zullen vertoonen. Ik heb echter eerst het ijzerspectrum onderzocht.

De eerste uitkomsten die ik hiermee verkreeg waren veelbelovend. Verscheidene ijzerlijnen vertoonden bij het door mij gebruikte veld aan den kant der grootere golflengten een sterkeren component. Uit een nader onderzoek is mij echter gebleken, dat aan dit aanvankelijk verkregen resultaat geen gewicht mag worden toegekend. Ik wil daarom slechts zeer in het kort verslag over mijne proeven geven. Vooraf ga nog de opmerking dat, wanneer een richtende invloed als boven bedoeld bestaat, men moet verwachten dat de component aan den kant der *grootere* golflengten zoowel bij het triplet als bij het doublet versterkt zal worden en wel onafhankelijk daarvan of de ionen eene positieve of negatieve lading bezitten.

2. Met het tralie van ROWLAND (10 voet straal, 14438 lijnen per inch) werden in het spectrum der derde en tweede orde negatieven genomen en in 't bijzonder nader bestudeerd het gebied tusschen 3000 en 4000 A. E., en wel voor richtingen loodrecht op en evenwijdig aan de krachtlijnen.

Verreweg het allergrootste deel der ijzerlijnen werd in het door mij gebruikte veld veranderd in tripletten, kwadrupletten enz., zeer enkele bleven onveranderd. Ongelijkheid der componenten werd nu

---

[1]) Vgl. RICHARZ. Wied. Ann. 52. p. 385, 410. 1894.

[2]) Vgl. hierbij LORENTZ. Verslagen. Oct. 1897. p. 193.

gevonden bij enkele lijnen en bij dezelfde lijnen voor de twee hoofdrichtingen. De component aan den kant der grootere golflengten was donkerder op het negatief, onafhankelijk ook van commutatie van den stroom in den electromagneet. Hoeveel het intensiteitsverschil bedraagt, hangt natuurlijk af van den expositieduur. Bij een der lijnen bedraagt op enkele negatieven dit verschil in intensiteit 50 à 100 pCt.

Het viel mij echter op dat van de sterkste ijzerlijnen de beide uiterste componenten van het triplet dezelfde intensiteit hadden en eveneens de beide componenten van het doublet. Nu zijn echter bij zwakkere lijnen, laat L er een aanduiden, veel gemakkelijker storingen te vreezen door superpositie van een „normaal" triplet of doublet met een reeds aanwezige zwakkere lijn, die weinig door het magnetisme wordt veranderd. Die reeds aanwezige lijn kan nu of 1°. naast L aanwezig zijn in hetzelfde spectrum, of 2°. tot een spectrum van andere orde behooren, of 3°. op den voorgrond treden of ontstaan juist door de aanwezigheid van het veld. Door opnamen bij verschillende veldsterkten zullen natuurlijk, als de onderstelde lijn smal is, alle drie deze gevallen kunnen worden buitengesloten. Maar gemakkelijker kan 1 door vergelijking met opnamen buiten het veld, 2 door opnamen in spectra van verschillende orde of door gebruik van absorbeerende stoffen worden buitengesloten. Nadat ik dit gedaan had, bleek mij dat ook geval 3 voorkomt; de relatieve intensiteit van de ijzerlijnen t. o. v. de luchtlijnen verandert sterk en die van de ijzerlijnen onderling eenigszins door het magnetische veld. Lijnen waarvan op negatieven buiten het veld opgenomen geen spoor te zien was, kwamen reeds bij velden te voorschijn onvoldoende voor de splitsing der lijnen in tripletten enz. Natuurlijk is deze storing het meest bedriegelijk. Door gebruik te maken van verschillend sterke velden, kon ik ze echter vermijden. Nadat echter 1, 2, 3, waren buitengesloten, behield ik alleen lijnen over die mij toeschenen geheel symmetrisch te zijn. Tot nu toe is dus nog geen richtende werking van het magnetisch veld op de banen der lichtionen geconstateerd.

Aardkunde. — De Heer BEHRENS biedt voor de werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK, getiteld: „*Bijdrage tot de karteering onzer zandgronden*" (III).

Deze wordt in handen gesteld van de Heeren BEHRENS en VAN BEMMELEN om daarover in de September-vergadering verslag uit te brengen.

Scheikunde. — De Heer Mulder biedt voor de werken der Akademie een opstel aan, getiteld: „*Over peroxy-zwavelzuurzilver*", (5e verhandeling).

Voor de Boekerij der Akademie wordt aangeboden door den Heer Stokvis: „Leçons de Pharmacothérapie". Traduction française des Drs. D. de Buck et L. de Moor revue et augmentée par l'auteur. Tome II.

De vergadering wordt gesloten.

(8 Juli 1898).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 24 September 1898.

Voorzitter: de Heer H. G. van de Sande Bakhuyzen.
Secretaris: de Heer J. D. van der Waals.

De Voorzitter opent de vergadering met de volgende toespraak:

Ik acht het een plicht en een voorrecht om in de vergadering van de Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen de hoogst belangrijke gebeurtenis te herdenken van de troonsbestijging en inhuldiging onzer jonge Koningin.

Ook het bestuur der Akademie had het voorrecht die plechtige bezegeling van het verbond van vorstin en volk bij te wonen en daarvan eene onuitwischbare herinnering mede te brengen, eene herinnering aan de zoo bevallige schoone jonkvrouw, die door hare minzaamheid aller harten won, en tegelijk aan de edele fiere vorstin, koningin in den vollen zin des woords, voor wie ieder zich eerbiedig boog.

Hoe uitnemend ook hare moeder, de edele Regentes, hare taak heeft vervuld, hoeveel dank wij haar verschuldigd zijn voor haar beleid en voor de trouwe zorg aan de opvoeding onzer Koningin besteed, wij achten ons toch gelukkig nu weer eene Oranje aan ons hoofd staat, en ons, die ieder in eigen kring geroepen zijn door

beoefening en verspreiding der wetenschap het Vaderland te dienen, ons moge de gedachte aan die jonge Vorstin, die wij met gansch het Nederlandsche volk gehuldigd hebben, bij dien arbeid opwekken.

Het bestuur der Akademie heeft gemeend in een adres, gericht aan H. M. de Koningin-Regentes de gevoelens van dank te moeten uitspreken voor hetgeen het Vaderland en de Nederlandsche wetenschap aan haar verschuldigd is, en daarna in een adres aan H. M. de Koningin de eerbiedige hulde der Kon. Akad. van Wetenschappen aan te bieden, en hare bescherming over onze instelling in te roepen.
Zoowel H. M. de Koningin-Regentes, als H. M. de Koningin hebben die adressen met brieven van dankbetuiging beantwoord.

Beide brieven worden door den Secretaris voorgelezen.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren Hoek en Hoogewerff dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Programma voor de 50ste vergadering van de American Association for the Advancement of Science van 22 tot 27 Augustus 1898 te Boston te houden.

3°. Circulaire betreffende het 5e Internationale Congres voor hydrologie, climatologie en voor medische geologie van 25 September tot 3 October 1898 te Luik te houden.

4°. Circulaire betreffende het Congrès de Naturalistes et Médecins polonais van 1 tot 4 Augustus 1898 te Posen.

5°. Uitnoodiging van het Naturwissenschaftliche Verein für Sachsen und Thüringen te Halle tot bijwoning van de feestelijke bijeenkomst ter gelegenheid van het 50-jarig bestaan op 31 Juli 1898. Is beantwoord met een brief van gelukwensch.

6°. Brief van Dr. J. Sasse Azn. de mededeeling behelzende van de oprichting der Nederlandsche Antropologische Vereeniging en toezending van de statuten dier Vereeniging.

7°. Circulaire van de Commissie tot herdenking van den 50-jarigen sterfdag van Berzelius. Daar geen der leden het voornemen te kennen gaf naar Stockholm te gaan, zal schriftelijk geantwoord worden.

8°. Circulaire tot oprichting van een monument voor Baron Ferd. von Mueller te Melbourne.

Voorts is ingekomen het bericht van het overlijden van het lid der Akademie WILLEM FREDERIK REINIER SURINGAR. Naar aanleiding van dit bericht zegt de Voorzitter het volgende:

Juist een jaar geleden bood SURINGAR hier zijne vijfde bijdrage aan tot de kennis der Melocacti en een tweetal maanden later vierde hij opgewekt en schijnbaar krachtig zijn 40-jarig Professoraat, toen een heillooze kwaal, die hem wellicht reeds lang ondermijnde, hem hevig aangreep en plotseling uit ons midden wegrukte.

Anderen bevoegden, zullen zeker later de verdiensten van onzen SURINGAR naar waarde schetsen, hier past toch nu een woord van weemoedige herinnering aan ons medelid, ambtgenoot en vriend.

Reeds op jeugdigen leeftijd gevoelde SURINGAR zich tot de Botanie getrokken, en hoezeer hij ook aan de Leidsche Akademie strenge studiën maakte van de overige vakken die tot de zoogenaamde philosophische faculteit behoorden, met name van de wis- en sterrekunde, bleef de plantkunde het vak waaraan hij zich met voorliefde wijdde.

Toch heeft vooral het levenwekkend onderwijs van KAISER een onmiskenbaren invloed op SURINGAR uitgeoefend. In al zijne onderzoekingen en mededeelingen munt SURINGAR uit door de scherpte van zijne waarnemingen, een streng logische betoogtrant, het angstvallig vermijden van onbewezen onderstellingen en een kritischen geest die aan zijne geschriften en aan het door hem uitgesproken oordeel eene hooge waarde verleenen.

Spoedig na zijne promotie werd hij, eerst als plaatsvervanger daarna als opvolger van DE VRIESE, geroepen om zich geheel te wijden aan de ontwikkeling zijner lievelingsstudie; en van den aanvang af toonde hij voornamelijk zijne kracht als systematisch botanicus. Als zoodanig oefende hij een gelukkigen invloed uit op de leerlingen die hij heeft mogen vormen. „Zij zijn er" zegt HUGO DE VRIES, „trotsch op in de kennis der inlandsche planten voor anderen niet onder te doen en zij planten die overtuiging wederom op hunne leerlingen over."

Het was echter niet alleen de inlandsche Flora, met welke SURINGAR zich bezig hield. Belangrijk zijn zijne studiën over de Japansche Algen en niet minder dat wat hij als Directeur van 's Rijks-Herbarium gedaan heeft voor het botanisch onderzoek onzer koloniën. Met zijn scherpen blik zag hij wat in het belang der Indische Flora kon en dus moest gebeuren, en het was zijn invloed die, door de benoeming van TREUB, den stoot heeft gegeven tot den krachtigen wetenschappelijken bloei der Buitenzorgsche inrichting.

Ook aan de West-Indische Flora heeft SURINGAR zijne krachten gewijd, en wel op meer onmiddellijke wijze door zijne reis in 1884—85 naar Paramaribo, Curaçao en omliggende eilanden. Op uitnemende wijze voor die reis voorbereid, vooral met het oog op het onderzoek der Melocacti dat hij zich voornamelijk ten doel had gesteld, keerde hij met een rijken voorraad zoowel van aanteekeningen als van planten terug.

Zeker had hij aan dat rijke, uitstekend geordende materiaal een aantal belangrijke verhandelingen kunnen ontleenen, maar zijne angstvalligheid om alleen dat te publiceeren wat hij, zoover het in zijn vermogen was, tot klaarheid had gebracht, weerhield hem. Toch bleef hij voortdurend zijne aandacht aan de Melocacti wijden. Door zijne betrekkingen met bewoners van Curaçao tijdens zijne reis en later aangeknoopt, kreeg hij een meer uitgebreid materiaal en voor een paar jaar had hij de bewerking zijner waarnemingen met kracht ter hand genomen en zijne uitkomsten deels in de Zittingsverslagen onzer Akademie, deels in eene afzonderlijke uitgave neergelegd. Wij hoopten dat hij dien arbeid, waaraan hij zooveel tijd had gewijd en die hem zoo zeer ter harte ging tot een goed eind zou brengen, maar die hoop werd niet verwezenlijkt.

Te midden van zijn werk werd hij van ons weggenomen.

SURINGAR laat eene leegte na in de wetenschappelijke wereld als een uitnemend systematicus, maar niet minder in het hart zijner vrienden, die den hartelijken en oprechten man met groote gaven en een edel karakter, noode missen. Zijne nagedachtenis zal hier in eere blijven.

Verder het bericht van het overlijden van het rustend lid GEORGE FREDERIK WILLEM BAEHR. Naar aanleiding hiervan zegt de Voorzitter het volgende:

Betreuren wij in SURINGAR een medelid, die nog kort geleden in ons midden werkte, in BAEHR herdenken wij den geleerde, die reeds sedert een zestal jaren rustend lid, in den laatsten tijd aan onze werkzaamheden niet meer deelnam. Maar in zijn krachtigen tijd, nu een dertigtal jaren geleden, was BAEHR een wiskundige, die zich èn door zijne geschriften èn door zijn onderwijs zeer verdienstelijk maakte.

Gedeeltelijk autodidact werd hij reeds op 20-jarigen leeftijd, in 1842, leeraar aan het Gymnasium te Middelburg, welke betrekking hij later met die van leeraar aan het Gymnasium te Groningen verwisselde. Verschillende geschriften, vooral van analytisch-mechanischen aard, o.a. over het tautochronisme de beweging van den slinger op eene bewegende aarde, de rotatiebeweging van de aarde, enz., in dien tijd door hem uitgegeven hadden zeer de aandacht op hem gevestigd en het was geen wonder dat bij de stichting der Polytechnische School te Delft in 1864 BAEHR daarheen werd beroepen als hoogleeraar in de wiskunde.

Thans had hij een arbeidsveld verkregen zijner waardig, en het wiskundig onderwijs aan de Polytechnische School onder leiding van mannen als BAEHR, COHEN STUART, VAN GOENS en v. D. BERG, genoot een welverdienden, uitstekenden naam.

Door hen, die het voorrecht hadden BAEHR's colleges te volgen, werd zijn onderwijs wegens de klaarheid en eenvoudigheid, wars van ijdel wetenschappelijk vertoon, zeer op prijs gesteld.

Hoewel Baehr het wel eens betreurde dat hij niet vroeger, toen hij nog krachtiger was, in een ruimer wetenschappelijken werkkring was geroepen, vond hij toch gedurende zijn professoraat tijd voor het schrijven van verschillende verhandelingen over mechanica en ook van mededeelingen van zuiver mathematischen aard, waarvan eenige in de werken onzer Akademie zijn opgenomen. Hieruit blijkt, dat hij zich bij voorkeur bezig hield met analyse; met meetkundige beschouwingen, vooral met alles wat de zoogenaamde projectieve meetkunde betreft, toonde hij zich zeer weinig ingenomen.

Op het terrein dat hij zich had gekozen, heeft Baehr echter zeer goed werk geleverd en zoowel die wetenschappelijke arbeid als zijn uitnemend onderwijs verzekeren Baehr eene plaats in de geschiedenis onzer wetenschappelijke ontwikkeling.

Aardkunde. — De Heer VAN BEMMELEN brengt, ook namens den Heer BEHRENS, het volgende Verslag uit over eene verhandeling van den Heer J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK, getiteld: *Bijdrage tot de karteering onzer zandgronden, III.*

De Ondergeteekenden hebben de eer aan de Wis- en Natuurkundige Afdeeling verslag uit te brengen over eene verhandeling van den heer J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK, getiteld: Bijdrage tot de karteering onzer zandgronden, III.

In het eerste gedeelte dezer belangrijke verhandeling tracht de schrijver een bezwaar zijner, in het tweede reeds door de Akademie uitgegevene stuk beschrevene, methode voor de onderscheiding tusschen diluviale en alluviale zanden weg te nemen. De regel, dat in diluviaal zand amphibool eene belangrijke rol speelt naast granaat, terwijl in alluviaal zand granaat op den voorgrond treedt, verliest van waarde, wanneer in een zandmonster een der twee genoemde mineralen zeldzaam is of ontbreekt. Voor zulke gevallen dient zij door eene andere vervangen te worden, die afgeleid wordt uit de overweging, dat in alluviale zanden lichte mineralen doorgaans met grootere korrels zullen vertegenwoordigd zijn, dan de zware. De schrijver heeft op grond van deze beschouwing aan een aantal verschillende monsters mikrometrische metingen uitgevoerd, en komt na discussie der medegedeelde tabellen en diagrammen tot het besluit, dat men, wanneer het geldt vlug te werken, volstaan kan met van twee mineralen, wier soortelijke gewichten sterk uiteen loopen, bijv. van granaat en amphibool of van granaat en kwarts, telkens 50 korrels te meten. Hij leidt uit zijn onderzoek den regel af, dat, wanneer in een monster de korrelgrootten der verschillende mineralen graphisch voorgesteld worden, bij een diluviaal zand de maxima der verschillende mineraalkrommen samenvallen, terwijl de krommen in volgorde van het soortelijk gewicht uit elkander schuiven al naar mate het monster tot een alluviaal zand nadert. Is dit eerste gedeelte van aanzienlijke waarde door zijne beteekenis voor geologische kaarteering van zandgronden, zoo is dit in veel hoogere mate het geval met het tweede gedeelte, dat over de soortbepaling van mineraalkorrels handelt. De schrijver heeft getracht een hulpmiddel te vinden voor een kwantitatief mineralogisch onderzoek van zanden. Hij heeft dit doel bereikt en zoodoende tevens den grond gelegd voor eene soortbepaling van de meeste gesteentevormende mineralen langs optischen weg. Zijne methode berust op eene benaderende bepaling van brekingsindices, en deze wordt bereikt door vernuftige toepassing van een reeds bij vroegere gelegenheid (2e bijdrage) door hem bekend gemaakt optisch verschijnsel, n.l. het optreden van bontkleurige

randen bij schuine verlichting van doorzichtige mineraalkorrels, wanneer deze in vloeistoffen van nagenoeg denzelfden brekingsindex gedompeld zijn.

De aanwijzigingen, door den schrijver gegeven en het overzicht van mineralen, met de bijbehoorende vloeistoffen waarin het bontworden dezer mineralen optreedt, zal niet alleen den kaarteerenden geologen, maar minstens evenzeer den petrographen welkom zijn. De laatstgenoemden zullen wel is waar naar tijdsbesparing bij de toepassing der nieuwe methode uitzien, die alsdan uitmuntende diensten bewijzen kan, maar deze tijdsbesparing zal waarschijnlijk zonder wijziging der optische methode kunnen bereikt worden, door scheiding met zware vloeistoffen en mikrochemische reacties te hulp te nemen. Het is te hopen, dat de schrijver spoedig den tijd vinden moge voor eene dergelijke uitbreiding van zijnen verdienstelijken arbeid.

Uwe commissie is van oordeel, dat deze bijdrage van den heer SCHROEDER VAN DER KOLK alleszins voor bekendmaking in de geschriften der Akademie mag worden aanbevolen.

Delft / *Leiden* Juli 1898.

TH. H. BEHRENS.
J. M. VAN BEMMELEN.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM spreekt over: „*Stol- en overgangspunten bij mengkristallen van twee stoffen.*"

Spreker heeft in 1891 eene theorie gegeven over de afscheiding van mengkristallen uit oplossingen. Hierbij geldt het evenwichten in stelsels van *drie* stoffen.

Tot dusverre waren echter geen algemeene regels gegeven voor de afzetting van mengkristallen uit gesmolten mengsels van *twee* stoffen.

Het onderzoek hieromtrent had zich òf beperkt tot den invloed van kleine hoeveelheden der tweede stof op het smeltpunt van de eerste (VAN 'T HOFF), òf voor zoover dit tot grootere concentraties was uitgestrekt, was dit geschied zonder theoretischen gids en had geleid tot valsche conclusies (KÜSTER).

Het is mogelijk een overzicht te ontwerpen van de verschillende gevallen van evenwicht, welke zich kunnen voordoen tusschen de smelt en de mengkristallen, door gebruik te maken van de evenwichtsvoorwaarde, dat de thermodynamische potentiaal een minimum zij.

Nu heeft VAN RIJN VAN ALKEMADE vroeger reeds aangegeven, hoe voor het geval eener onafgebroken vaste mengingsreeks de

potentiaal als functie der concentratie voorgesteld wordt door eene soortgelijke kromme lijn als welke de potentiaalwaarden voor mengsels van twee vloeibare stoffen voorstelt. Het vraagstuk bestaat dus hierin, na te gaan welke gevallen zich kunnen voordoen bij het verschuiven dezer twee krommen ten opzichte van elkander, wanneer men van hoogere temperaturen tot lagere overgaat.

Het resultaat van dit onderzoek is, dat bij het bestaan eener onafgebroken mengingsreeks drie gevallen mogelijk zijn.

Geval 1. De stolpunten van vloeistofmengsels der stoffen A en B dalen geleidelijk van het stolpunt van B tot dat van A, naarmate de samenstelling der smelt in de richting van A verschuift (indien B de stof is die het hoogste smeltpunt bezit);

Geval 2. De stolpuntslijn vertoont een maximum,

Geval 3. De stolpuntslijn vertoont een minimum.

In alle drie gevallen bestaat het volgende verband tusschen de concentratie van de smelt en de mengkristallen:

De mengkristallen bevatten in vergelijking met de smelt een hooger gehalte aan dat bestanddeel, bij welks toename de stoltemperatuur rijst. In het maximum en in het minimum zijn beide concentraties gelijk.

Belangrijke gevolgen voor het verloop van stolling of smelting en voor de fractionatie van mengkristallen, kunnen hieruit worden afgeleid.

Indien de mengingsreeks in vasten toestand niet onafgebroken is, kan afgeleid worden, dat twee gevallen mogelijk zijn.

Geval 4. De stolpuntslijn vertoont een knik bij eene overgangstemperatuur, tusschen de smeltpunten der beide componenten gelegen. Bij dit punt ontstaat een sprong in de samenstelling der mengkristallen.

Geval 5. De stolpuntslijn vertoont twee dalende takken, die elkaar in een minimumpunt ontmoeten, beneden welke temperatuur elke smelt stolt tot een conglomeraat van mengkristallen met twee verschillende concentraties.

Verdere complicaties kunnen nu nog optreden, wanneer bij een der twee of bij beide componenten meer dan één vaste modificatie bestaat. Langs geheel denzelfden weg, welke geleid heeft tot het vinden van het verband tusschen temperatuur, concentratie vast mengsel en concentratie vloeistof, kan nu ook worden opgespoord op welke wijze, bij homogene zoowel als bij niet homogene menging, de overgang van den eenen vasten toestand in den anderen plaats vindt bij verschillende mengverhoudingen. Het aantal bijzondere

gevallen is hier buitengewoon groot, als gevolg van het feit dat bij de beide componenten de correspondeerende toestanden op verschillende wijzen op elkaar kunnen volgen, en de overgangstemperaturen op verschillenden afstand van elkaar kunnen gelegen zijn.

De aangegeven methode stelt in staat in elk bijzonder geval de volgorde der verschijnselen af te leiden en belooft een belangrijk hulpmiddel te zijn voor de ontraadseling van de ingewikkelde verschijnselen, die zich vertoonen bij de stolling en de daarop volgende veranderingen van metaalalliages.

Natuurkunde. — De Heer HAGA deelt mede dat de in de Mei-vergadering door hem, namens Dr. C. H. WIND medegedeelde verschijnselen *„over helderheidsmaxima en -minima als gevolg van een gezichtsbedrog"* reeds bekend waren en beschreven zijn door E. MACH in een paar mededeelingen getiteld *„Ueber die physiologische Wirkung räumlich vertheilter Lichtreizen"* voorkomende in de Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem. naturw. Classe. 2e Abth. Band 52 p. 303. Band 54 p. 131 en 393 en Band 57 p. 11.

Wiskunde. — De Heer CARDINAAL biedt voor de werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer K. BES, getiteld: *„Théorie générale de l'élimination d'après la méthode* BEZOUT, *suivant un nouveau procédé."* Deze wordt in handen gesteld van de Heeren W. KAPTEYN en CARDINAAL om daarover in de October-vergadering verslag uit te brengen.

Na resumptie van het behandelde wordt de vergadering gesloten.

(5 October 1898).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 29 October 1898.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

Het Proces-Verbaal der vorige Vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1° Bericht van de Heeren HUBRECHT, MOLL, HAMBURGER en DE BRUYN dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2° Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken, d.d. 7 October 1898, waarin bericht wordt, dat aan Dr. A. H. SCHMIDT, die met een toelage uit de inkomsten van het Buitenzorgfonds naar het botanisch Station te Buitenzorg uitgezonden zal worden, ook een rijkstoelage is verleend.

3°. Missive van den Heer P. DROSTE, d.d. 12 October 1898, het bericht behelzende, dat administrateuren van het P. W. KORTHALS-fonds, ingevolge het schrijven van de Afdeeling d.d. 7 October 1898, de som van ƒ 600 in den loop van de maand November ter beschikking van de Akademie zullen stellen tot aankoop van belangrijke boekwerken en herbaria op algologisch gebied ten dienste van het zoölogisch Station te den Helder.

4° Missive van de uitvoerders van den uitersten wil van den Heer Dr. G. F. W. BAEHR, waarbij zij de beeltenis van den overledene aan de Afdeeling ten geschenke aanbieden.

5° Missive van de Heeren GAUTHIER VILLARS, waarbij zij namens de Académie des Sciences te Parijs aanbieden de 5 eerste afleveringen van het werk van admiraal PARIS, getiteld: „Souvenirs de Marine".

6° Missive van den Heer BELA SZENTESY te Budapest, waarbij door hem worden aangeboden 6 afleveringen van een werkje, getiteld: „Die geistige Ueberanstrengung des Kindes (von einer noch nicht besprochenen Seite dargestellt)".

Internationale Catalogus. — De Voorzitter geeft het woord aan den Heer D. J. KORTEWEG, die door de Regeering afgevaardigd was naar de tweede conferentie voor den internationalen catalogus te Londen, tot het uitbrengen van het volgende Verslag:

De belangstelling in den afloop der tweede conferentie voor den Internationalen Catalogus van 11 tot 13 October te Londen gehouden, welke mij gebleken is bij vele leden onzer Afdeeling te bestaan, en de omstandigheid dat onze Afdeeling zich bij schrijven aan den Minister van Binnenlandsche Zaken (zie het Verslag der gewone vergadering van 28 Nov. 1896) bereid verklaard heeft tot eene goede uitvoering van het aandeel, hetwelk Nederland in de werkzaamheden van dien Catalogus hebben zal, mede te willen werken, nopen wij hier een kort verslag te geven van hetgeen, na de eerste conferentie van Juli 1896, in zake dien Catalogus, heeft plaats gehad.

In zekeren zin zal dit verslag als een vervolg kunnen worden beschouwd op mijne in het Zittingsverslag van 26 September 1896

opgenomen mededeeling. Evenals toenmaals zal ik mij zooveel mogelijk beperken tot de punten die van meer blijvend wetenschappelijk belang kunnen worden geacht.

Door de vorige conferentie was aan de Royal Society het verzoek gericht eene commissie te willen benoemen, met opdracht alle vraagpunten betreffende den Catalogus, welke nog onbeslist gebleven waren nader te bestudeeren en daaromtrent verslag uit te brengen.

Aan deze opdracht werd voldaan door een uitvoerig geschrift, gedateerd 30 Maart 1898, 't welk aan de verschillende regeeringen en aan de gedelegeerden ter vorige conferentie werd toegezonden. Aan deze laatsten werd daarbij het verzoek gericht op niet-officieele wijze hunne persoonlijke opmerkingen te willen mededeelen.

Dit geschrift, hetwelk wij het Rapport der Royal Society zullen noemen, bevatte in de *eerste plaats* nadere voorstellen omtrent de in te voeren internationale organisatie.

Naast het Centrale Bureau te Londen en de nationale, of, zooals zij thans genoemd werden, Regionale Bureaux, tot welker oprichting reeds door de eerste conferentie besloten was en door welke het geregelde werk, aan het samenstellen van den catalogus verbonden, zal worden verricht, werd voorgesteld de instelling van een Internationalen Raad en van Internationale Conventies.

De Internationale Raad, bestaande uit afgevaardigden der Regionale Bureaux, één voor elk Bureau, zoude minstens om de drie jaar te Londen bijeen moeten komen en het besturend college van den Catalogus vormen. Hij zal daarbij echter onderworpen zijn aan de besluiten der Internationale Conventies, welke in 1905, 1910 en voorts ieder tiende jaar zullen bijeenkomen en wier leden door de verschillende regeeringen, die aan de organisatie deelnemen, zullen worden aangewezen.

Bovendien werd voorgesteld de oprichting, voor elk der verschillende wetenschappen, van eene Internationale Commissie van Deskundigen (Referees), bestaande uit vijf personen aan te wijzen door den Internationalen Raad. Tot deze commissie zal zich de directeur van het Centrale Bureau te wenden hebben bij voorkomende moeilijkheden betreffende de toepassing van het classificatie-schema voor die wetenschap opgemaakt. Wijzigingen of toevoegingen aan dit schema, welke door het Centrale Bureau wenschelijk worden geacht, zullen aan hare goedkeuring onderworpen moeten worden, terwijl zij zelve het recht zoude hebben zulke wijzigingen of toevoegingen in te voeren.

In de *tweede plaats* werden in dit rapport begrootingen medegedeeld van de vermoedelijke kosten der onderneming.

Van drie verschillende onderstellingen werd daarbij uitgegaan, namelijk, 1e dat alleen een catalogus in boekvorm (boekcatalogus) zoude worden gegeven, 2e dat daarnevens een kaart-catalogus (primaire kaartcatalogus) verschijnen zoude, evenwel met die beperking, dat voor ieder geschrift (boek, tijdschriftartikel, enz.) slechts ééne kaart zal worden verstrekt, 3e dat een volledige kaart-catalogus (secundaire kaartcatalogus) zoude worden vervaardigd, waarin ieder geschrift door zoovele kaarten vertegenwoordigd wordt als overeenkomt met de verschillende daarin behandelde onderwerpen voor zooverre deze aanleiding geven tot meervoudige plaatsing (subject-entries) in den boekcatalogus. Daarbij zal dan echter al het mogelijke moeten worden gedaan om overmatige uitbreiding van het aantal kaarten voor ieder geschrift tegen te gaan.

Als resultaat der overleggingen en berekeningen van de commissie werd medegedeeld dat in de *eerste* onderstelling de inkomsten waarschijnlijk de uitgaven zullen dekken, zooal niet dadelijk, dan toch na eenigen tijd; dat dit wellicht ook in de *tweede* onderstelling nog het geval zal kunnen zijn; maar dat zulks in de *derde* onderstelling bezwaarlijk kan worden verwacht.

In de *derde plaats* bevatte het rapport der Royal Society uitgewerkte classificatie-schemata voor het meerendeel der wetenschappen welke in den Catalogus eene plaats zullen vinden.

In deze schemata, wier inrichting voor de verschillende wetenschappen naar gelang hunner bijzondere behoeften nog al uiteen loopt, is overal op ruime wijze gelegenheid gelaten om te gemoet te komen aan de verandering van inzichten en de uitbreidingen, welke in de toekomst te verwachten zijn. De registratie-letters en cijfers vervullen er slechts een ondergeschikte rol. Zij zijn technisch noodzakelijk voor het werk van het Centraal Bureau en voor het ordenen van den kaartcatalogus. Echter zal de kennis er van voor den gebruiker geheel of nagenoeg overbodig kunnen worden geacht.

Waar onder eene zelfde afdeeling te veel titels bijeenkomen, zal eene verdere splitsing kunnen verkregen worden door de invoering van belangrijke woorden, „significant words", welke later, zoo het wenschelijk blijkt, tot nieuwe, vaste afdeelingen kunnen worden vervormd. Op die wijze zal een natuurlijke groei der classificatie, gelijken tred houdende met de ontwikkeling der wetenschap, kunnen bereikt worden.

In aanmerking genomen deze mijns inziens zeer doelmatige inrichting van den boekcatalogus en de omstandigheid dat, door de instelling der Commissies van Deskundigen, een voldoende waarborg

zoude worden verkregen, dat de verlangens en behoeften der eigenlijke beoefenaren der verschillende wetenschappen steeds den doorslag zullen geven, meende ik aan het straks vermelde verzoek van de commissie der Royal Society gevolg te mogen geven door als mijn persoonlijk gevoelen ingenomenheid met het algemeene plan uit te spreken. Tevens werd het wiskundige schema door mij aan een meer nauwkeurig onderzoek onderworpen, en enkele opmerkingen van meer algemeenen aard omtrent de schemata gemaakt.

In de thans gehouden tweede conferentie werd dit Rapport der Royal Society tot grondslag der beraadslagingen gelegd, ten einde omtrent de daarin vervatte onderwerpen zooveel mogelijk tot beslissingen te komen.

Onder de ten gevolge daarvan genomen besluiten wil ik in de *eerste plaats* die vermelden, welke de inrichting der internationale organisatie betreffen.

Tot de instelling van een Internationalen Raad en van Internationale Conventies, ingericht volgens het plan van de commissie der Royal Society, dus geheel op de wijze als hierboven door mij werd geschetst, werd door de conferentie besloten.

De instelling en regeling der Internationale Commissies van Deskundigen werd daarentegen, onder aanbeveling van de in het rapport der Royal Society daaromtrent gedane voorstellen, overgelaten aan de nadere beslissing van den Internationalen Raad als deze de eerste maal zal bijeengekomen zijn.

In de *tweede plaats* werden omtrent de inrichting van den catalogus door de conferentie beslissingen genomen.

Krachtig werd, niettegenstaande de daaraan verbonden meerdere kosten, op het handhaven van den kaartcatalogus, naast dien in boekvorm, van verschillende zijden aangedrongen. Het vroeger reeds genomen besluit om den catalogus in *beide* vormen te doen verschijnen, werd dan ook met algemeene instemming gehandhaafd. Echter meende men het van de finantieele vooruitzichten der onderneming, welke nog niet voldoende konden worden beoordeeld, te moeten laten afhangen of alleen een primaire kaartcatalogus, dan wel of daarnevens ook secundaire kaarten zullen worden uitgegeven.

Dit laatste werd op zich zelven zeer wenschelijk geacht, dewijl het alleen op die wijze mogelijk zal zijn voor elk onderdeel eener wetenschap, de daarop betrekking hebbende kaarten volledig bij een te brengen en te houden. Ook werd de hoop uitgesproken dat het door doelmatige inrichting der secundaire kaarten zoude gelukken

het groote verschil in kosten hetwelk volgens het rapport der Royal Society tusschen beide vormen van den catalogus bestaat, aanzienlijk te verminderen.

Wat in de *derde plaats* de classificatie-schemata betreft, werd vastgesteld dat voor de navolgende vakken afzonderlijke schemata zullen worden opgemaakt:

Wiskunde; Astronomie; Meteorologie; Physica; Crystallographie; Chemie; Mineralogie; Geologie (met inbegrip van Petrologie); Geographie (uitsluitend Mathematische en Physische); Palaeontologie; Anatomie; Zoölogie; Botanie; Physiologie (daarin begrepen Pharmacologie en Experimenteele Pathologie); Bacteriologie; Psychologie; Anthropologie.

Overigens werden omtrent de inrichting dezer schemata door de conferentie slechts eenige zeer algemeen gehouden regels gesteld waarvan de verdere uitwerking is overgelaten aan eene voorloopige Internationale Commissie, welke waarschijnlijk voor elk der vermelde vakken deskundigen aanwijzen zal ten einde haar bij deze uitwerking bij te staan. In menig geval zullen de aan het Rapport der Royal Society toegevoegde voorloopige classificatie-schemata daarbij als uitgangspunt kunnen dienen.

Deze Voorloopige Internationale Commissie, aanvankelijk ingesteld ter beoordeeling en vaststelling der classifiatie-schemata, is tevens door de conferentie met de uitgebreide volmacht bekleed om beslissingen te nemen omtrent verschillende door de conferentie nog opengelaten vraagpunten, betreffende de inrichting van den Catalogus. Zij zal uiterlijk op 31 Juli 1899 een verslag uit te brengen hebben, hetwelk onder de besluiten der conferentie zal worden opgenomen.

Te ontkennen valt het niet dat aan deze Internationale Commissie eene zeer zware taak is opgelegd. Ten einde die taak eenigermate te verlichten en aan alle meeningen gelegenheid te geven zich uit te spreken, is aan de verschillende gedelegeerden opgedragen in hunne landen plaatselijke commissies in het leven te roepen ten einde de alsnog onbeslist gebleven vraagpunten te overwegen en daaromtrent binnen zes maanden aan de Internationale Commissie te berichten.

Inderdaad zullen, mijns inziens, deze commissies op nuttige wijze werkzaam kunnen zijn. Mocht het toch blijken dat op belangrijke punten weinig verschil van meening bestond, dan zoude dit de beslissingen der Internationale Commissie stellig zeer vergemakkelijken.

De duidelijke wijze waarop de verschillende kwesties in het rapport der Royal Society zijn gesteld, opent een gegrond vooruitzicht op zulk eene overeénstemming.

Ik waag het de hoop uit te spreken dat de Commissie van onze Afdeeling die zich reeds meermalen met den Internationalen Catalogus heeft beziggehouden mij door hare medewerking, de vervulling van dit gedeelte mijner opdracht, mogelijk zal willen maken.

Naar aanleiding van het vorenstaande belooft de Voorzitter de Commissie der Akademie, welke bij vroegere gelegenheden omtrent den Internationalen Catalogus heeft geadviseerd, weder te zullen bijeenroepen.

Physiologie. — De Heer Winkler doet eene mededeeling, getiteld: „*Aandacht en ademhaling.*"

§ I. *Inleiding.*

De hedendaagsche physiologie der hersenschors kent terecht zeer groote waarde toe aan het begrip der associatie.

Nadat zij bewezen heeft, dat aan verschillende deelen der hersenschors afzonderlijke functies mogen worden toegeschreven, is het op anatomische gronden noodzakelijk geworden, om zich verbindingen tusschen die deelen voor te stellen, en bovendien op klinische gronden om den gang van zaken bij de psychische processen aan het gebruik dier verbindingen te paren.

De physiologie der hersenschors is verder gedwongen om de leer van het zoogenaamde parallelisme tusschen physiologische en psychische gebeurtenissen te aanvaarden — zonder deze toch is elke physiologie als grondslag der psychologie onmogelijk — zij moet dus eischen, dat aan elken bizonderen bewusten toestand een bizondere physiologische verandering in het centrale zenuwstelsel beantwoordt.

Reeds dadelijk rijst echter een moeilijkheid.

De psychologie kent door de zelfwaarneming wel opeenvolging van nieuwe bewuste toestanden, maar niets meer. Omtrent de wijze, waarop die opeenvolging plaats vindt, leert de zelfwaarneming haar

niets. De physiologie moet de wijze waarop deze opeenvolging plaats vindt, leeren begrijpen.

Daartoe dient haar het begrip associatie. Zij neemt aan, dat een physiologische verandering in één cellengroep zich langs vezels kan voortplanten naar een andere, om er een nieuwe verandering te wekken. Is het dan in 't algemeen waar, dat slechts veranderingen in cellen met bewuste parallelprocessen gepaard kunnen gaan, de zich in de vezels voortplantende processen niet, dan acht zij het feit, dat de zelfwaarneming slechts opeenvolging kent en niets meer, niet onbegrijpelijk. Maar het begrip der associatie dient haar tot meer. Het is immers een opgave, om voor elken bizonderen bewusten toestand de bizondere physiologische verandering aan te wijzen.

Het bizondere der laatste kan bepaald worden op verschillende wijzen, hetzij door de plaats welke de celgroep inneemt, die een verandering ondergaat, hetzij door de, met behulp der associatie in tallooze variaties mogelijke, combinatie van twee of meer samenwerkende celgroepen.

Het is aan een aldus opgevatte physiologie, die beoogt, om opeenvolging van bewuste toestanden te paren aan associatie van physiologische parallel-gebeurtenissen, dat men den naam van associatie-physiologie gegeven heeft. Zij is uit den aard der zaak streng een wetenschap der materie. Zij laat zich in haar beschouwingen niet van de wijs brengen door het bestaan van bewuste parallelrijen, welker bestaan zij constateert, over welker aard zij zich niet uitlaat. Zij behandelt het bewuste leven, als het leven van een automaat, die van al de in hem omgaande gebeurtenissen ongeveer niets verneemt, maar er telkens enkelen, verreweg het geringst in aantal, beantwoordt, met de daaraan in hun bestaan gepaarde bewuste parallelrijen.

Ten allen tijde heeft aan de associatie-physiologie een moeilijkheid in den weg gestaan. Het is zonder tegenspraak dat de zelfwaarneming bij het willen, bij het aandachtig zijn en bij vele andere bewuste gebeurtenissen ons den indruk geeft, alsof het subject actief ingrijpt in de bewuste processen. Vanwaar dit activiteitsgevoel? Hoe komt het, dat het subject, dat voor de associatie-physiologie als een passief, opeenvolgend waarnemend en voorstellend subject daar staat, door de zelfwaarneming omtrent de rol die het vervult, misleid wordt?

Betere kennis der psycho-motorische schorszone heeft ons hierop een, ten minste eenigszins, bevredigend antwoord gegeven. Tal van klinische waarnemingen hebben geleerd, dat waarneming en herin-

nering van eenmaal verrichtte spierbeweging, zoowel als zij zelf, gebonden zijn aan het intact voortbestaan der psycho-motorische schorszone.

Tal van physiologische experimenten hebben bewezen, dat elke verandering op een bepaalde plaats in dit hersengedeelte — bijv. een door den electrischen stroom teweeggebrachte — afvloeit naar een bepaalde spiergroep en daar een bepaalde bewegingscombinatie in 't leven roept.

Laat men de onderstelling toe, dat de aldus in de hersenschors in 't leven geroepen verandering geen andere is als die, welke onder physiologische voorwaarden ontstaat — dan zal de laatste, wier bewuste parallelrij als herinnering van dezelfde te verrichten spierbewegingscombinatie onze zelfwaarneming bekend is, de dwaling van het subject in de hand werken. Het subject ziet op de herinnering eener zoodanige bewegingscombinatie altijd deze, nooit een andere volgen en besluit, dat de eerste de oorzaak der laatste is.

Oorzaak der spierbeweging blijft echter de physiologische verandering. Haar bewuste parallelrij — onverklaard, onverklaarbaar misschien in haar bestaan — doet niets. Het subject, zoolang het alleen door de zelfwaarneming geleerd wordt, waant echter zich actief, meent een „feeling of effort" te bezitten.

Als men van wil tot beweging spreekt, bedoelt men dan ook, de herinnering aan een te verrichten spierbeweging, wier physiologische parallelrij diezelfde beweging teweegbrengt en daarmeê het subject in den waan brengt, dat de herinnering het doet.

Aan alle spierbewegingsherinneringen is dit actieve cachet eigen, en dit activiteitscachet keert bij tal van samengestelde psychische gebeurtenissen weer.

Wanneer een aantal lichtindrukken bij ons gezichtswaarnemingen wekken, dan is er gewoonlijk slechts één, die wij vasthouden, of zooals WILHELM WUNDT het uitdrukte, die wij tegenover de vele gepercipieerde indrukken, *ap*percipieeren. Tot die ééne wenden wij, ons schijnt het actief, de aandacht. Haar bemerken wij bizonder goed. Zij heeft kans goed herinnerd te worden, terwijl de overigen ons ontgaan, vergeten worden.

Ook hier activiteitsgevoel. Bezaten wij de gave dezer apperceptie niet, konden wij niet — zij 't dan slechts schijnbaar — actief een voorstelling vasthouden, ons denken zou een warreling van opéénvolgende voorstellingen (herinneringen) zijn, zooals misschien in het brein van een maniacus voorkomt.

Beweging van onze gedachten in één lijn ware ondenkbaar.

Het is de vraag of bij deze voor de zelfwaarneming zoo beslist

actieve inspanning der aandacht, ook niet de bewegingsherinneringen een dergelijke rol spelen, als zij het bij het willen eener beweging doen.

Kan door associatie van psycho-motorische celgroepen aan de veranderingen, die in de waarnemende schorsgebieden met bewuste herinneringen gepaard gaan, ook het subject in den waan komen, dat hij actief die herinnering fixeert?

Om die vraag te beantwoorden is het noodzakelijk om vooraf te weten of er — en zoo ja, welke spierbewegingen er bestaan, waardoor de mensch die aandachtig is zich onderscheidt van zich zelf, als hij het niet is.

Want elke verandering in de psycho-motorische zone moet noodzakelijk afvloeien naar de perifere spieren. Ook als zij weinig krachtig is, moet zij eenige verandering in de daarbij behoorende spiergroep teweegbrengen, al is dit slechts een begin van samentrekking, een toename der spierspanning.

Het zal blijken — en daaraan wensch ik deze uiteenzetting te wijden — dat de aandachtige mensch zich in velerlei opzichten door veranderingen van motorischen aard, onderscheidt van de niet aandachtige, en dat deze merkwaardige combinatie van bewegingen van uit een enkel punt bij de electrische prikkeling der hersenschors van den hond is te reproduceeren.

§ II. *De bloedsvulling der hersenen tijdens de psychische verrichtingen.*

Voordat ik mijn eigenlijk onderwerp aanraak, moet ik even stilstaan bij de veranderingen, die zich tijdens rust en tijdens het bewuste leven afspelen in de hersenen zelf.

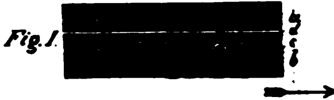
Voor vele jaren heeft Mosso bewezen, dat het volumen der hersenen voortdurend wisselt. Het gebeurt somwijlen, dat iemand een defect in het schedelbeen heeft. Dan leenen de hersenen, op die plaats slechts door de hersenvliezen bedekt, zich tot observatie. Registreert men dan in halfslaap de bewegingen der hersenen die men al met het bloote oog waarneemt, dan blijkt het dat de hersenen, afhankelijk van hun wisselende bloedsvulling regelmatige veranderingen in volumen ondergaan.

Men ziet dan voor zich:

1e. polsschommelingen, omdat elke hartscontractie bloed in den schedel werpt.

2e. ademhalingsschommelingen, omdat bij elke uitademing het bloed minder goed uit de hersenen kan afvloeien.

3e. eigenaardige langere in onregelmatige perioden optredende schommelingen in volumen, wier oorzaak minder klaar is.



Pols- en ademhalingsschommelingen van het hersenvolumen in halfslaap.
a. curve van het hersenvolumen.
b. ademhalingscurve. De dalende lijn is de inspiratie.
c. stemvork. 2 trillingen per secunde.
d. abscis.
(LAURENS. 18 Juni 1898. Schedeldefect wegens tuberculose van het wandbeen.)

In fig. 1 is een voorbeeld der beide eersten, in fig. II en III zijn de laatstgenoemden zeer duidelijk.

Nauwelijks wekt echter een geluidsindruk de aandacht, nauwlijks verricht de persoon een intellectueel proces bijv. bij het oplossen eener rekensom, of de bloedsvulling der hersenen neemt toe. Terwijl, zoolang de inspanning duurt (als het niet te lang is) het hersenvolumen grooter is geworden, wordt het weder kleiner zoodra deze is opgehouden. De lange laatstgenoemde schommelingen blijven daarna nog een tijdlang van veel grooter amplitude en van veel langer duur dan voordat de inspanning plaats vond. (zie fig. III). Omgekeerd worden de ademhalingsschommelingen minder zichtbaar tijdens de inspanning, om echter daarna bizonder duidelijk voor den dag te komen.

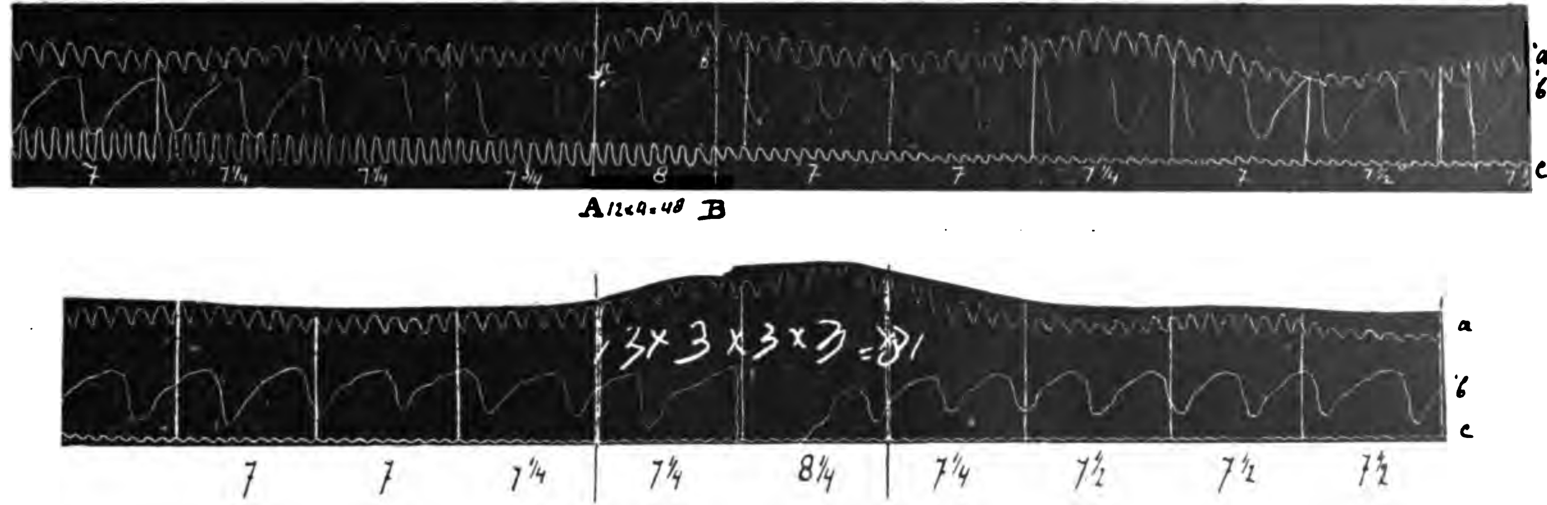
Ten slotte verandert de polsschommeling ook. Zij wordt sneller. Boven-



Fig. II.

Polsschommelingen, ademhalingsschommelingen en schommelingen van langen duur, de laatsten zeer groot, in het hersenvolumen tijdens halfslaap.
a. curve van het hersenvolumen.
b. stemvork. 2 trillingen per secunde.
(GRAUSZ, 2 Februari 1898. Schedeldefect in het wandbeen na wegneming van het Ganglion Gasseri.)





Schommelingen in het hersenvolumen bij intellectueelen arbeid. (Van GRAUSZ, zie fig. II.)
Fig. III. 1. Bij *A* wordt op de deur geklopt. Fig. III. 2 van *A—B* wordt een rekensom 12 × 4 = 48 opgelost.
Fig. III. 3 van *A—B* wordt een rekensom van 3 × 3 × 3 × 3 = 81 opgelost.
In alle curven is *a* = die van het hersenvolumen, *b* = die van de ademhaling, *c* = die van den stemvork met 2 trillingen p. sec.

dien vertoonen de lange schommelingen een zekere afhankelijkheid van de polsschommeling. Op het oogenblik dat de curve van zulk een lange schommeling hoog boven de abscis staat, is de duur der pols kort, staat zij daar dicht bij, dan is de duur der polsschommeling lang [1]). De vermeerdering van het hersenvolumen wordt door polsversnelling voorafgegaan gelijk uit de graphische voorstelling



Fig. IV. Graphische voorstelling van den duur der polslagen in secunden tegenover die van de hoogten, welke de curve van het hersenvolumen bij iedere polsslag, boven de abscis inneemt.
A. Hoogte boven de abscis van het hersenvolumen in Millimeters. —
B. Duur der polsen in secunden, - - - - - (GRAUSZ, zie fig. II).

(in fig. IV) en uit de cijfers in de noot blijkt.

Het is derhalve duidelijk dat men bij het registreeren van een slagaderpols dezelfde, in lange, onregelmatige perioden weêrkeerende,

---

1) Telt men bij snelle draaiing van den cylinder de hoogte boven de abscis der lange schommeling uit, en meet men den duur van elke polsschommeling die aan die hoogte beantwoordt dan vindt men bijv.:

Hoogte boven abscis in mM.	Polsduur in secunden.	Hoogte boven abscis in mM.	Polsduur in secunden.	Hoogte boven abscis.	Polsduur in secunden.	Hoogte boven abscis.	Polsduur in secunden.
5.00	0.62	4.25	0.65	1.75	0.675	4.50	0.65
5.25	0.62	3.50	0.725	2.50	0.65	4.50	0.625
5.00	0.62	3.00	0.75	3.	0.625	5.00	0.625
5.25	0.65	2.25	0.775	2.75	0.65	5.00	0.65
4.75	0.675	1.75	0.77	3.00	0.625	4.25	0.65
		2.00	0.77	3.50	0.625	3.75	0.65
		1.75	0.77	4.25	0.625	3.75	0.65
				4.50	0.6	3.50	0.65etc.

van de ademhaling niet afhankelijke, versnelling en verlangzaming in den duur der polsen weêrvinden moet.

Neemt men dus in aanmerking, dat reeds uit deze enkele feiten blijkt, dat elke vermeerdering van het hersenvolumen gepaard gaat met snelle polsen, dan zal uit de studie der slagader-pols tijdens hersenwerking reeds heel wat geleerd kunnen worden.

Tot haar wend ik het eerst mijn onderzoek.

§ III. *De invloed van de inspanning der aandacht op hart, ademhaling en op de strekspieren van hand en nek.*

Indien men den invloed nagaat, die de inspanning der aandacht op het hart uitoefent en hem voor 't oogenblik afzonderlijk beschouwt dan doen zich merkwaardige bizonderheden voor.

Vooraf een woord over de inrichting van dergelijke proeven.

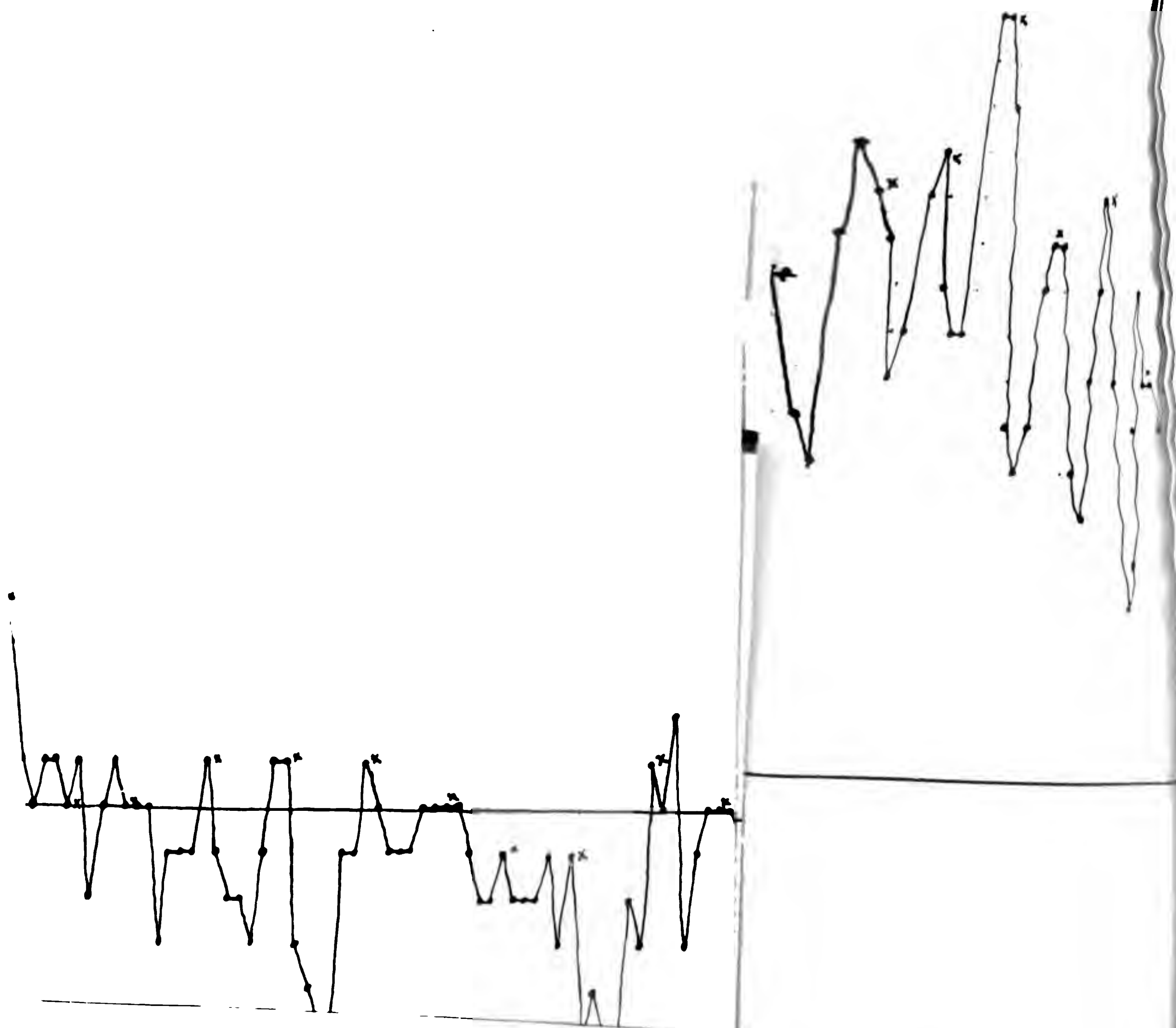
Als voorbeeld van een krachtige inspanning der aandacht, die niet of weinig met onlustgevoelens gepaard gaat, wordt het oplossen van een rekensom genomen. De affectlooze intellectueele arbeid der fransche schrijvers is dus het uitgangspunt der proef. De proefpersoon wordt op een rustbank gelegd. Als hij zelf en als het in zijn omgeving rustig is, wordt pols of ademhaling geregistreerd.

De afspraak is, dat hem op een gegeven oogenblik een getal, meest van 2 cijfers zal worden toegeroepen, en dat hij zal voortgaan om dit getal met zich zelf te vermenigvuldigen, totdat een sein hem noopt op te houden. Hij zal rekenen zonder kunstgrepen te gebruiken. Hij werkt gewoonlijk in visueele voorstellingen, in gezichtsherinneringsbeelden van getallen. Gewoonlijk duurt de proef ± een halve minuut.

De uitkomst, juist of onjuist, wordt niet uitgesproken, er wordt echter niet nagerekend en ook niet aan de uitkomst gedacht. Tal van experimenten bewezen nam. dat de juistheid of niet juistheid der uitkomst onverschillig is voor mijn doel, maar wel de rust of de onrust na den arbeid.

Bij een zoodanige proef wordt dan bijv. de pols en ademhaling geregistreerd.

De proefpersoon ligt rustig, de cylinder draait snel. Drie hefboomen schrijven. De pols der arteria radialis, ademhaling, en een stemvork, die tien heele trillingen per secunde maakt worden met luchttransport geregistreerd. De laatste stelt ons in staat om in 20sten van secunden nauwkeurig tijd af te lezen, onafhankelijk van de onregelmatigheden die het uurwerk van den cylinder aankleven. De



cylinder aauklevelt. ...

mvork wordt door een electromagneet in voortdurende trilling houden.

In dien rustigen halfslaap ziet men het volgende:

Tegen het einde der rustig geworden respiratie zijn de polsslagen ng van duur. Wanneer de inspiratie intreedt zijn zij korter. gen het einde der inspiratie en nog tijdens het begin der expiratie n de polsen het snelst.

Als de expiratie haar maximum bereikt heeft duren zij zeer lang, n even voor- of nadat de inspiratie begon, hetzelfde spel te herhalen.

Overigens is het niet noodig om bij den vrij goed bekenden invloed n ademhaling op polsduur en bloedsdrukking stil te staan. Er ijkt echter tevens, dat bovendien de pols in onregelmatige intervallen duur wisselt. Onafhankelijk van de ademhaling, die nimmer haar vloed verliest, worden de polsslagen allen sneller of langzamer, in regelmatige perioden.

Deze eigenaardigheden moet men in rekening brengen.

Heeft men dan genoegzaam lang geregisteerd om een voldoende betrouwbare aanvangscurve (zie fig. VII) in halfslaap te bezitten, dan wordt een getal den proefpersoon toegeroepen. Ook als hij niet rekent is die toeroep voldoende om een geringe en kortdurende polsversnelling teweeg te brengen. Rekent hij echter, dan ontstaat de polsversnelling onmiddellijk. Zij neemt toe, naarmate de inspanning toeneemt. Wordt na een halve minuut, het sein ho! gegeven, dan blijft de polsversnelling voortduren, gedurende eenige secunden. Dan volgt een korter of langer amphibool stadium, waarbij van geen versnelling of verlangzaming kan gesproken worden. Eindelijk en

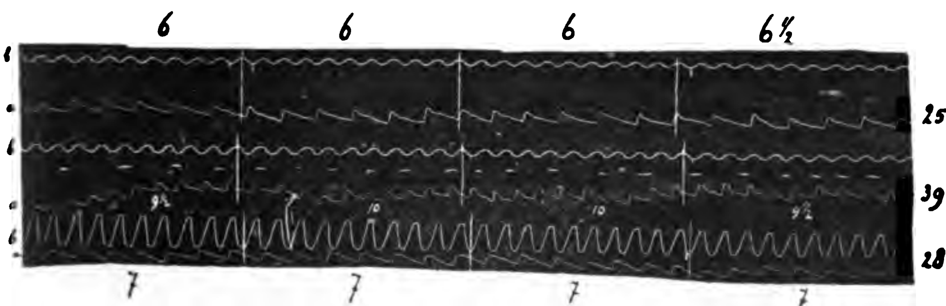


Fig. V. Drie rijen van polsslagen boven elkander.

Bij alle drie is: *a.* polsslag der arteria radialis.

b. stemvork van 2 trillingen per secunde.

De onderste rij, met 28 polsslagen in 20 secunden vóór } de rekensom.
De middelste rij, met 39 polsslagen in 20 secunden tijdens } de rekensom.
De bovenste rij, met 25 polsslagen in 20 secunden na } de rekensom.

(J. de Vye, April 1898. Langs photographischen weg $^1/_2$ verkleind).

soms gedurende zeer langen tijd volgt een compensatorische verlangzaming [1]) (zie ook fig. V en VI).

Dit alles vindt schommelenderwijze plaats. De ademhalingsinvloed

---

[1]) Wil men een voorbeeld in cijfers. Proef Maart 1898, J. DE VRIES. Pols en ademhaling bij snelle draaiing opgeschreven.

Duur der pols in seconden.

0.875	0.825	0.7	0.565	0.5	0.625	0.775	0.875	0.925	0.9
0.8	0.8	0.75	0.575	0.25	0.625	0.825	0.85	0.9	0.9
0.85	0.8	0.75	0.6	0.5	0.625	0.8	0.85	0.925	0.925
0.8	0.8	0.7	0.55	0.525	0.625	0.85	0.875	0.95	0.975
0.8	0.775	0.7	0.55	0.525	0.65	0.875	0.875	0.925	0.975
0.85	0.75	0.7	0.525	0.55	0.625	0.825	0.85	0.9	0.9
0.85	0.75	0.65	0.55	0.525	0.625	0.825	0.875	0.9	0.925
0.85	0.775	0.65	0.525	0.55	0.65	0.825	0.9	0.9	0.95
0.875	0.775	0.675	0.525	0.525	0.675	0.875	0.975	0.9	0.925
0.85	0.775	0.675	0 525	0.55	0.7	0.875	0.9	0.950	0.95
0.875	0 775	0.675	0.5	0.525	0.725	0.875	0.875	0.925	0.95
0.900	0.775	0.7	0.5	0.55	0.75	0.85	0.9	0.925	0.925
0.875	0.8	0.675	0.525	0 575	0.75	0.9	0.875	0.9	0.925
0.85	0.8	0.675	0.5	0.55	0.85	0.875	0.875	0.9	0.925
0.85	0.75	0.675	0.5	0.575	0.825	0.85	0.875	0.9	0.925
0.85	0.75	0.675	0 5	0.575	0.85	0.85	0.925	0.9	0.9
0.85	0.75	0.625	0.5	0.575	0.85	0.875	0.925	0.925	0.95
0.875	0.7	0.625	0.5	0.6	0.85	0.85	0.9	0.9	0.975
0.8	0.7	0.625	0.5	0.575	0.8	0.925	0.925	0.875	0.9
0.825	0.675	0.625	0.475	0 6	0.8	0.925	0.925	0.9	0.9
0.85	0.65	0.625	0.475	0.6	0.775	0.9		0.925	0.925
0.825	0.65	0.6	0.475	0.6	0.825	0.950			0.9
0.8	0.622	0.575	0.475	0.6	0.8	0.9			0.925
		0.6	0.475	0.625	0.8				0.95
			0.5	0.65					1.—
				0.625					0.925

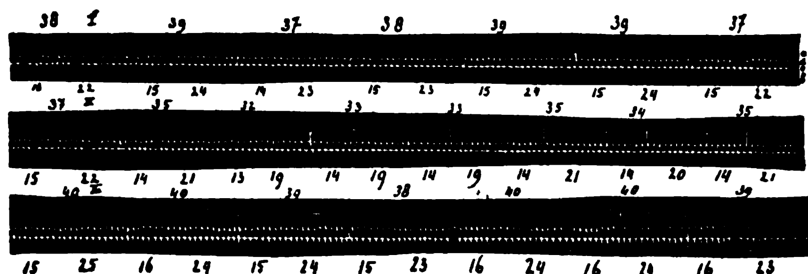


Fig. VI. Drie rijen polsslagen boven elkander bij snelle cylinderdraaiing.
Bij alle drie is $a =$ de polsslag der arteria radialis, $b =$ de ademhaling, $c =$ stemvork van 10 trillingen per seconde, $d =$ de abscis.
De bovenste I, is voor-, de middelste II, tijdens-, de onderste III, na de rekensom genomen.
De cijfertjes geven den polsduur in $^1/_{20}$ seconde (halve stemvorktrillingen).
Die langs den bovenrand geven den polsduur.
Die langs den benedenrand geven den duur tot het dicrotisme.
(Prof. SALTET, Maart 1898.) Langs photographischen weg op de helft verkleind.

is na de som duidelijker merkbaar dan te voren, en ook de langere schommelingen vindt men weer. (Zie voor de verschillende schommelingen, de versnelling, het amphibole stadium en de compensatorische verlangzaming als gevolgen der inspanning de grafische voorstelling, fig. VII).

De versnelling der pols in dergelijke omstandigheden was overigens reeds sedert THANHOFER bekend. Minder was de compensatorische verlangzaming op haar waarde geschat. Toch, men vergelijke fig. V, kan zij zeer belangrijk zijn.

Maar er gebeurt meer. Tijdens de rekensom schijnt de bloedsdrukking in de polsslagader te stijgen, ten minste de curve rijst, en daarmeê verandert tevens eenigszins den vorm der polscurve. Terwijl de verkorting van den duur hoofdzakelijk ten laste komt van de diastole van 't hart, schuift toch het dicrotisme, als de pols kort duurt, iets dichter naar den top toe, dan wanneer hij lang duurt.

Ten minste in absoluten zin. Relatief is daarentegen het dicrotisme verder van den top afgeschoven. Men vergelijke fig. VI.

Summa Summarum. *Tijdens de inspanning der aandacht wordt de pols versneld. Daarna wordt zij verlangzaamd. De versnelling begint onmiddellijk, ten minste als men de overige invloeden op den polsduur in rekening brengt.*

Wend ik mij thans tot de ademhaling.

Deze wordt geregistreerd met den pneumograaf van MAREY. De

dalende lijn stelt dus de inspiratie, de stijgende stelt de expiratie voor in elke curve, die langs dien weg wordt verkregen. De inrichting der proef is dezelfde als voorheen.

Tijdens de rekensom wordt de ademhaling sneller en oppervlakkiger, na de rekensom langzamer en omvangrijker (fig. VIII—XIII). Geleidelijk komt de thorax in inspiratie-stand (fig. VIII—XI).

De eerste uitademing kan verlengd zijn, maar zij bereikt slechts zelden de hoogte der voorafgaande expiraties. De kortere duur van de latere respiraties is echter hoofdzakelijk afhankelijk van den korteren duur der expiratie [1]), terwijl de verlenging der expiratie na de som kenmerkend is (fig. IX en fig. X). Zij bestaat zelfs dan als de duur der respiratie weinig of niet verlengd is, omdat een geringe inkorting der inspiratie nog voortbestaat na de som.

De neiging tot inspiratiedwang met beperking en verkorting vooral der expiraties is kenmerkend voor hetgeen tijdens de rekensom gebeurt. Toch niet bij allen. Soms blijft de inspiratiedwang achterwege en maakt plaats voor een enorme versnelling der oppervlakkige respiratie (zie fig. XII). Andere malen bestaat er een middenvorm tusschen beiden (zie fig. XIII).

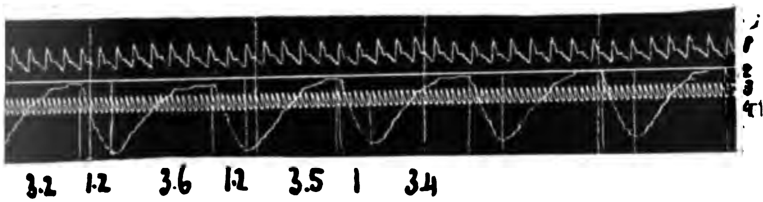
Summa Summarum. *Tijdens de inspanning duurt de respiratie,*

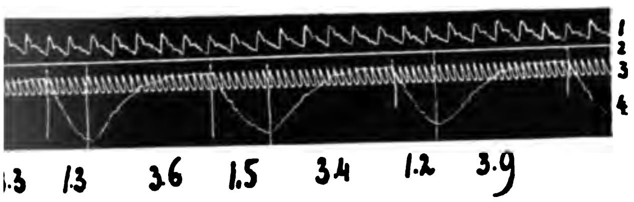
---

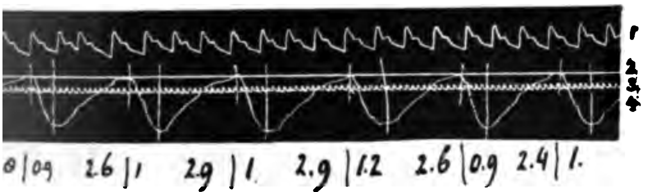
[1]) De Telling fig. 8, 9, 10 stelt dit duidelijk in 't licht:

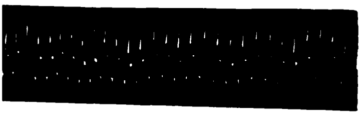
Fig. 9.						Fig. 10.					
Voor de Rekens.		Tijdens de Rek.		Na de Rekensom.		Voor de Rekens.		Tijdens de Rek.		Na de Rekensom.	
Duur inspir.	Duur expir.	Duur inspir.	Duur expir.	Duur inspir.	Duur expir.	Duur inspir.	Duur expir.	Duur inspir.	Duur expir.	Duur inspir.	Duur expir.
1.3sec.	2.5sec.	0.6sec.	1.9sec.	1.1sec.	3.8sec.	1.2sec.	2.4sec.	0.9sec.	1.7sec.	0.9sec.	2.6sec.
1.4 〃	2.6 〃	1. 〃	2.2 〃	1.2 〃	3.6 〃	0.9 〃	2.4 〃	0 8 〃	1.8 〃	1. 〃	2.9 〃
1.3 〃	3. 〃	1.1 〃	1.8 〃	1.3 〃	3.3 〃	1.1 〃	2.6 〃	0 8 〃	2.2 〃	1. 〃	2.8 〃
1.3 〃	3.2 〃	1. 〃	1.9 〃	1.3 〃	3.6 〃	1.1 〃	2.5 〃	0.8 〃	1.7 〃	0.9 〃	2.6 〃
		1.2 〃	1 9 〃	1 5 〃	3.4 〃	1.1 〃	2.2 〃	0.9 〃	1.2 〃	1. 〃	2.9 〃
		1. 〃	2.3 〃	1.2 〃	3.9 〃			0.9 〃	1.5 〃	1. 〃	2.9 〃
								0.8 〃	1.7 〃	1.2 〃	2.6 〃
								0.6 〃	1.4 〃	0.9 〃	2.4 〃
								0.6 〃	1. 〃		
								0.6 〃	2.1 〃		
Gemiddeld		Gemiddeld		Gemiddeld		Gemiddeld		Gemiddeld		Gemiddeld	
1.3sec.	2.8sec.	1. sec.	2. sec.	1.3sec.	3.6sec.	1. sec.	2 4sec	0.8sec.	1.6sec.	0.9sec.	2 7sec.

(dalende lijn is inspiratie).









XI. Tijdens de rekensom. wordt

ging der vingers een ontlasting van den cylinder veroorzaakt. Ware

vooral de expiratie korter, is oppervlakkiger, zoowel de in- als de expiratie is in den aanvang beperkt, maar maakt geleidelijk plaats voor sterker inspiratiestand van den thorax. Daarna volgt er een compensatorische respiratieverlangzaming, vooral der expiratie, met neiging tot grooter omvang der expiraties en der pauzen.

Tijdens zulk een rekensom verandert echter ook het lumen der perifere bloedvaten. Door HALLION en COMTE is een eenvoudig toestelletje bedacht om h . volumen der vingers, de zoogenaamde capillairpols der vingers, te registreeren. Een cautchuk-cylinder wordt langs de vingers stevig in de holle hand geplaatst, terwijl de geheele hand met een stevigen handschoen is omgeven. Elke wisseling in volumen van de vingers onder den invloed der harts- en ademhalingswerking, deelt zich aan het cautchuk mede en kan worden geregistreerd.

Welnu, evenals BINET en COURTIER dit reeds hebben aangetoond, bleek het ook mij, dat somwijlen na een vooratgaande vermeerdering, het volumen der vingers tijdens de rekensom geringer wordt (zie fig. XV).

BINET en COURTIER meenen terecht, dat dit ten deele het gevolg is van kramp der bloedvaten in de vingers. Inderdaad wanneer men aan den sphygmomanometer van MOSSO de vraag voorlegt, zooals ook zij dit deden, hoe het met de bloedsdrukking in de capillaria staat, dan is het antwoord, dat gedurende de rekensom de bloedsdruk in de capillaria stijgt.

Gaat men bij de eigenaardige inrichting van dezen toestel van een zeer geringe tegendrukking (in casu 30 m.M. Hg.) uit, dan wordt tijdens de rekensom, een curve geschreven, die niet alleen stijgt maar ook grooter wordende uitslagen vertoont, (zie fig. XVI*a*) en als men uitgaat van het optimum der tegendrukking (in casu bij mij zelf ± 50 m.M.Hg.) dan stijgt de curve, terwijl de uitslagen kleiner worden (fig. XVI*b*).

Het volumen der vingers wordt dus kleiner, de drukking in de kleine bloedvaten wordt er grooter. Er bestaat dus ongetwijfeld een vaatkramp aan de periferie.

Naast de vaatkramp, laat zich echter nog een tweede moment gelden op het volumen der vingers. De inspiratiekramp, zuigt de bloedvaten leeg en heeft stellig ook eenigen invloed op de daling van de curve, die het volumen der vingers schrijft. In de derde plaats is het niet onmogelijk, dat bij de inrichting der proef volgens HALLION en COMTE en BINET en COURTIER, een geringe strekbeweging der vingers een ontlasting van den cylinder veroorzaakt. Ware

dit zoo, dan zou ook een daling van de op die wijze geregistreerde curve plaats vinden.

Het lag dus voor de hand om ook de strekspieren van hand en vingers te registreeren. Dit kan zeer wel met een luchtkussen geschieden. Dan schrijft men natuurlijk de plaatselijke capillair-pols op, maar elke plaatselijke spierverdikking zal zich tevens als een stijging in de aldus geschreven curve voordoen.

Inderdaad is dit dan ook het geval. De invloed der vaatkramp, die gelijk wij zagen aan de periferie bestaat, zou ook hier merkbaar moeten zijn en de volumen-curve zou moeten dalen. Maar integendeel de curve stijgt en zeer belangrijk, gelijk de fig. XVII—XIX dit doen zien, zoodra een rekensom wordt gemaakt.

Het verwijt, dat een luchtkussen niet als volumenschrijver, maar als sphygmomanometer zou werken, is hier niet gerechtvaardigd. Ook op de geschreven curve is dit zichtbaar. Want de uitslagen blijven evengroot ondanks de enorme stijging der curve (fig. XVII—XIX).

Wanneer men tegelijkertijd een luchtkussen op de buigspieren van hand en vingers zet, dus op den voorarm plaatst, en de niet groote uitslagen registreert, dan ziet men, tijdens 't rekenen nauwlijks verandering, hoogstens een aanduiding van daling, die als gevolg van vaatkramp is te beschouwen. (fig. XVII en XVIII). Het is dan altijd een volumenpols, evenals die, welke geschreven wordt, wanneer men een dergelijk luchtkussen op de kuitspieren aanlegt. (fig. XIX). Men krijgt volkomen dezelfde volumen-curve terug, die wij sedert Binet en Courtier aan de vingers reeds kennen, en tijdens de rekensom in fig. XV hebben afgebeeld. Er blijft dus maar één begrijpelijke opvatting der straks genoemde stijging over. De strekspieren van de hand en van de vingers worden in geringe mate samengetrokken, of liever, want de beweging uit zich niet in voor 't oog zichtbare verplaatsingen, de strekspieren van hand en vingers worden een weinig gespannen. Dientengevolge stijgt de curve tijdens de rekensom geschreven door het daarboven geplaatste luchtkussen.

Plaatst men eindelijk het luchtkussen op den nek, dan is er een dergelijke waarneming te verrichten, als van de strekspieren der hand. De curve, die hier, het spreekt van zelf, zeer grooten ademhalingsinvloed ondervindt, welke door het luchtkussen als bij inademing stijgend bij uitademing dalend wordt geregistreerd, stijgt tijdens de rekensom (zie fig. XX). Soms wordt overigens het hoofd reeds zichtbaar in den nek geworpen.

Summa summarum. *De strekspieren van hand en nek spannen zich.*

Vat men alles dus te samen, dan rijst de vraag of al deze

Fig. XIX. Curven van het locale volumen boven de strekspieren van den onderarm n boven de kuitspieren met luchtkussens geregistreerd

A die op de strekspieren van den onderarm,

B die op de kuitspieren.

Tijdens de rekensom, schrijft die over de kuitspieren de gewone volumencurve, zooals ok in fig. XV voor de vingers is afgebeeld. De curve boven de strekspieren stijgt als evolg der daarin ontstane spierspanning. (WIARDI BECKMAN, Sept. 1898).

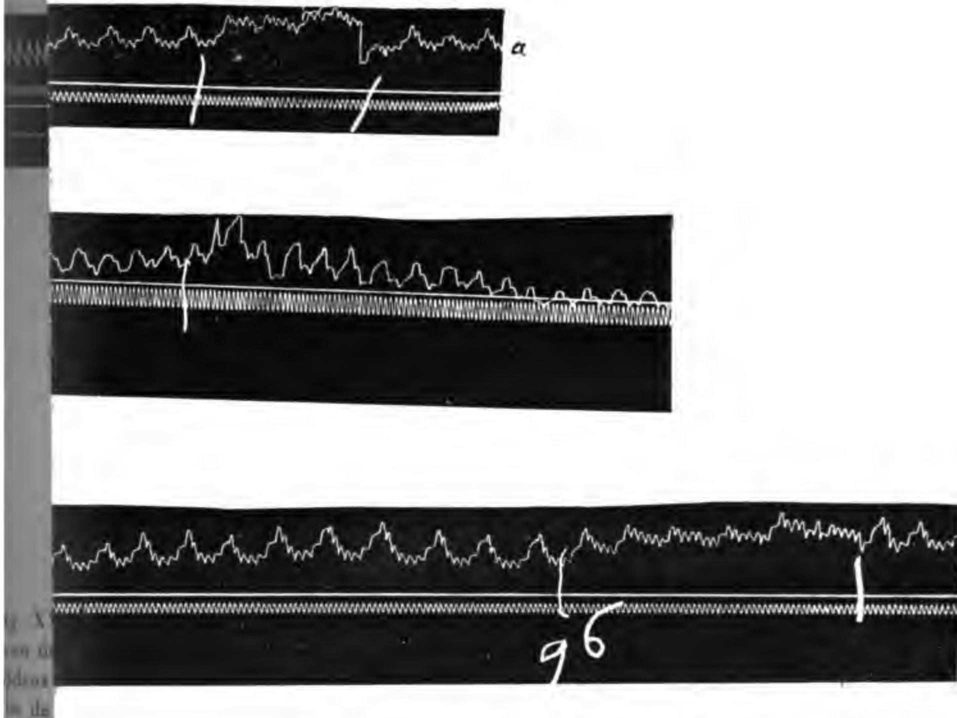


Fig. XX (WINKLER, Sept. 1898). Fig. XX*a* (WIARDI BECKMAN, Sept. 1898). Fig. XX*b* (LANGELAAN, Sept. 1898). Curven met onbeweeglijke luchtkussens op de nekmusculatuur geregistreerd. Bij iedere inademing stijgt de curve, omdat door de spierspanning dezer spieren het hoofd iets naar achteren dreigt te gaan. Tijdens de rekensom is dit in veel sterker mate het geval.

Fig. XV. Verandering in het volumen der vingers met den

veranderingen als gevolg der ademhalingsveranderingen kunnen worden aangezien.

Inderdaad, wanneer men afziet van de perifere vaatkramp, dan, is er daarvoor veel te zeggen. Inademing en polsversnelling uitademing en polsverlangzaming behooren bijeen, en het kan moeilijk anders of inspiratiedwang tijdens de som moet met polsversnelling beantwoord worden, terwijl de lange expiraties daarna met verlangzaming moeten gepaard gaan. Wat de strekking van hand- en nekspieren betreft, ieder kan bij zich zelf waarnemen, dat een krachtige inademing met deze bewegingen gepaard gaat.

Ten slotte is dus mijn betoog niet heel veel meer, dan het bewijs, dat de volksmond, welke aan den aandachtige het praedicaat geeft van met ingehouden adem te luisteren, geen onjuiste uitspraak is. Ik ben mij er tevens zeer goed van bewust, dat de hier beschreven bewegingen nog niet alles omvatten van hetgeen er bij de inspanning der aandacht gebeurt.

§ IV. *De gezamenlijke bewegingen hier beschreven zijn experimenteel bij prikkeling met den inductiestroom van een bepaald punt der hersenschors bij den hond op te wekken.*

Wanneer men zich thans de vraag voorlegt of de bovengenoemde bewegingen niet ook experimenteel zijn te voorschijn te roepen, dan ligt het voor de hand, dat men zich tot de schors der voorhoofdshersenen moet wenden. Klinische gronden nopen daartoe. Zieken met dubbelzijdig lijden der voorhoofdshersenschors zijn juist gekenmerkt door het onvermogen om een voorstelling vast te houden. Zij zijn het niet minder door het onvermogen om zich de gebeurtenissen te herinneren, zij zijn dikwijls verwarde maniaci. Beide verschijnselen wijzen op een sterke stoornis in het apperceptievermogen.

Ik begon dus met den heer WIARDI BECKMANN, die uitvoerig op de litteratuur [1]) omtrent dit onderwerp en op een aantal détails der experimenten in zijn dissertatie zal terugkomen, aan een methodisch onderzoek, naar de vraag of de ademhalingsfuncties door prikkeling der voorhoofdshersenschors bij honden konden worden gewijzigd.

Tot dat doel werd met een secundairen inductiestroom de schors geprikkeld met electroden, die 2 m.M. van elkander staan.

---

[1]) Ik laat aan den heer WIARDI BECKMANN over de overeenkomst en verschillen onzer resultaten met de onderzoekingen van HITZIG, MUNK, KRAUSE, SEMON, HORSLEY en SPENCER in het licht te stellen.

Vier LECLANCHÉ-elementen voeden de inductieklos, een slede van DU BOIS-REYMOND, en bij een rolafstand van 11 c.M. is de stroom nauwelijks op den tong voelbaar.

Een DESPREZ-signaal geeft het oogenblik van prikkeling op den cylinder aan, terwijl de ademhaling met den pneumograaf van MAREY, en de arteria femoralis met een toestelletje aan den tonometer van TALMA ontleend, worden geregistreerd.

De hond krijgt 's morgens te 8 uur al naar de grootte 30 à 50 m. Gr. morphine. In aethernarcose wordt de voorhoofdskwab volgens bekende techniek blootgelegd, tot op de dura mater.

Na geruimen tijd rust en nadat de morphine-symptomen der ademhaling zijn voorbijgegaan wordt te een of twee uur 's middags het experiment begonnen.

De hersenoppervlakte, waarvan afbeeldingen in fig. XX—XXIII hiernevens gaan, wordt voor zoover dit voor ons doel noodig is in een aantal vierkantjes ingedeeld. Deze vierkantjes richten zich in grootte naar de topographie der schors.

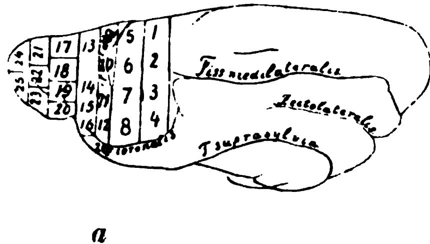
Nadat men zich op de schors door de prikkeling van een bekend motorisch centrum heeft georiënteerd en het dier rustig ademt, stelt men eerst vast dat er een aantal punten zijn van waaruit men niet den geringsten invloed op de ademhaling kan opwekken.

Echter blijkt het dan, dat men regelmatig na prikkeling van enkele punten, welke met 15 en 16 in het schema aangeduid zijn, constante veranderingen kan te voorschijn roepen. Dit punt is gelegen op den overgang van den gyrus sigmoideus (prae-cruciatus) in den frontalen lob en in de tweede laterale winding (zie kring fig. XXIII), ongeveer ter plaatse waar de fissura coronalis, de fissura praesylvia in sterke mate nadert. Zoodra men met een uiterst zwakken stroom prikkelt, bijv. met 11 c.M. rolafstand, dan ziet men gelijk in fig. XXIV enkele snelle inspiraties ontstaan. Prikkelt men met iets sterker stroom, dan wordt de inspiratie nog sneller en gaat met polsversnelling gepaard (zie fig. XXV). Bij een matig sterken prikkel, bijv. 9 c.M., krijgt men sterker inspiratiekramp met sterke polsversnelling, terwijl de stroom dan tevens irradieert, en strekbeweging van arm en nekspieren te voorschijn roept (zie fig. XXVI), welke duidelijk zichtbaar, niet behoefden te worden geregistreerd. Inderdaad, het genoemde ademhalings- (inademings-) centrum ligt tusschen het strekcentrum der handspieren en dat der heffing van het voorste gedeelte van den romp in.

Deze ademhalingsversnelling met inspiratiekramp, eventueel beperking van en verkorting der expiratie, wordt steeds gevolgd, door lange expiraties, ja zelfs door expiratiestand van den thorax, en

C. WINKLER: „Aandacht en ademhaling."

Fig. XX.

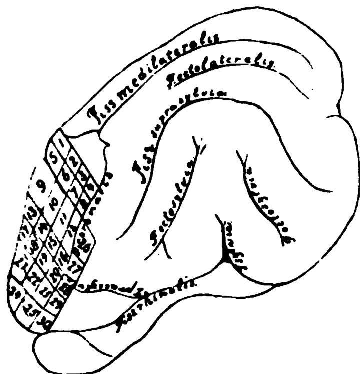


Schema van de hersenschors van een hond van ter zijde gezien. De cijfers geven de hokjes aan, die achtereenvolgens met den inductiestroom werden geprikkeld. Bij prikkeling van 15 en 16 ziet men inademingsverdieping of expiratiebeperking, of versnelling van oppervlakkige respiraties.

a

Fig. XXI.

b



Schema van de hondenhersenen van terzijde gezien. (Als boven).

Fig. XXII.



Afbeelding der hondenhersenen van ter zijde gezien.

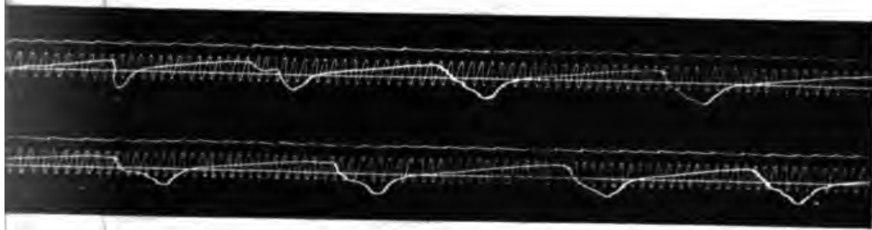
Als men de plaats die door een kring is aangegeven, met den inductiestroom prikkelt, wordt de inademingsverdieping, repiratie-versnelling, uitademingsbeperking en polsversnelling teweeggebracht. Na de prikkeling wordt de uitademing verlengd, de pols langzamer dan te voren. Bij prikkeling met matig sterken inductiestroom voegen zich daarbij strekbewegingen der hand en opheffen van den kop.

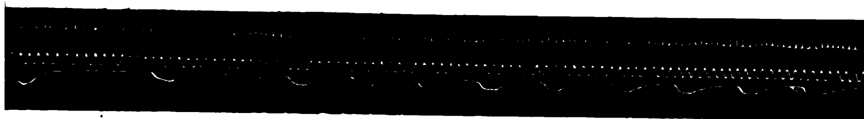
Fig. XXIII.

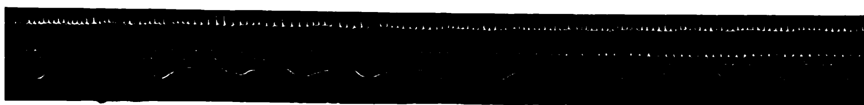


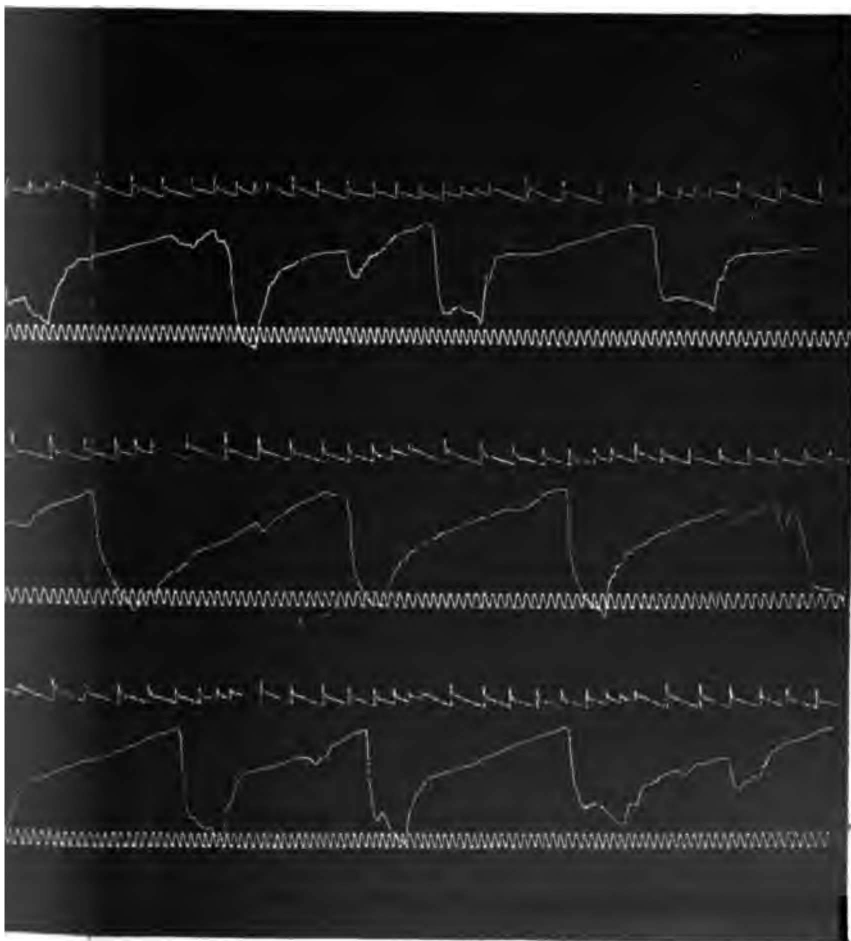
Dezelfde hondenhersenen van voren gezien.

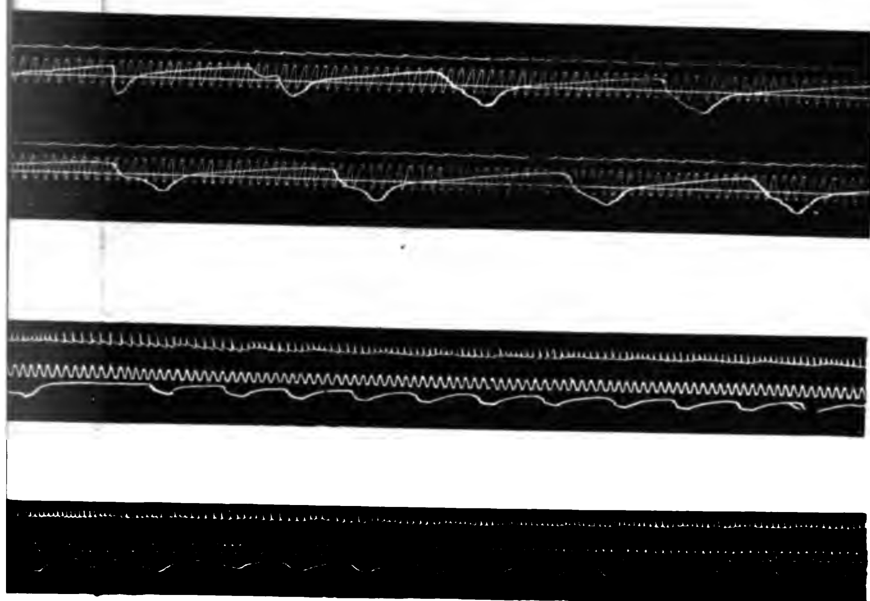
De kring overeenkomend met punt 16 der schemata als boven.

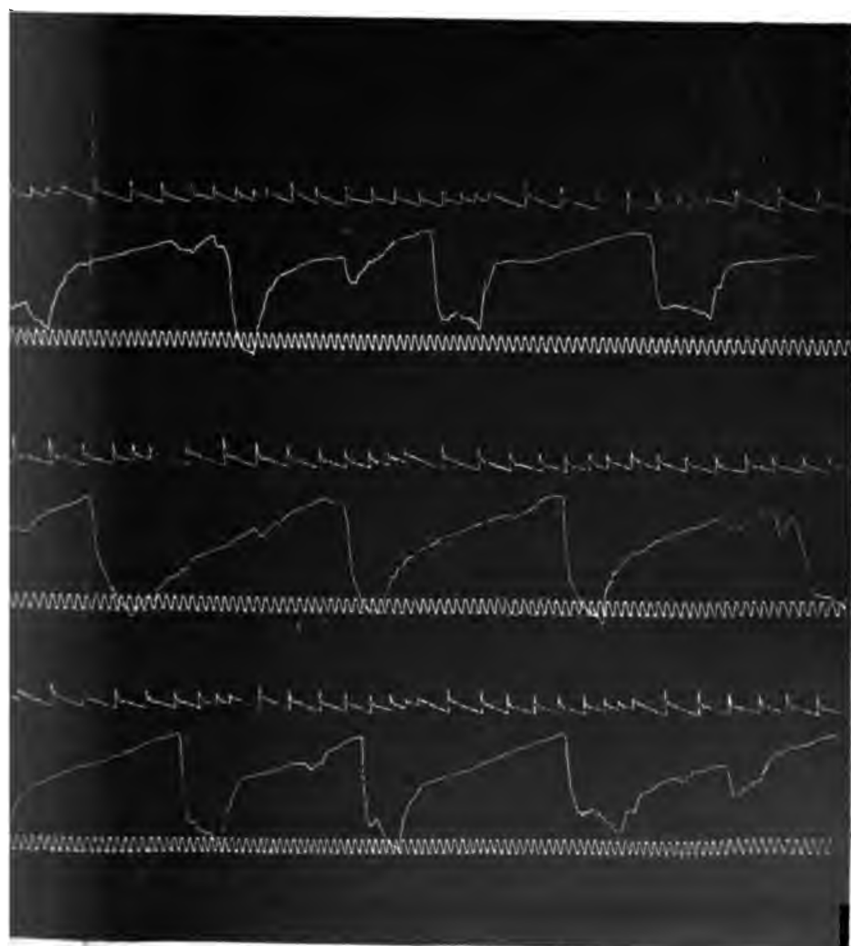












tevens ziet men dan een sterke polsverlangzaming als gevolg dier prikkeling intreden.

De invloed door electrische prikkeling van het punt 16 op de ademhaling is een volmaakt constante, kan fig. XXVIII bewijst het in alle phasen der respiratie te voorschijn worden geroepen. Steeds is er versterkte inademing etc.

Summa summarum. *Bij prikkeling van een zeer kleine streek in de voorhoofdskwab der hondenhersenen, kan men ademhalingsversnelling, resp. inademingskramp, polsversnelling, hand- en nekspier samentrekking te voorschijn roepen, gevolgd door polsverlangzaming en lange uitademingen.*

De uitdrukkingsbewegingen der aandacht zijn op een betrekkelijk kleine plaats in de hersenschors van honden gelocaliseerd en experimenteel te demonstreeren.

§ V. *Besluit.*

Keer ik thans terug tot de leer van het parallelisme tusschen physiologische en psychische gebeurtenissen.

Ik heb door een reeks argumenten aangetoond, dat de aandachtige mensch een aantal bewegingen verricht, die op zeer regelmatige wijze bij ieder weerkeeren. Ik heb niet beweerd, dat de hier genoemde de eenige waren, waardoor de aandachtige verschilde van zichzelf, wanneer hij het niet was. Er is op dit gebied, daarvan ben ik overtuigd enorm veel te doen. Maar de hier genoemde en beschreven bewegingen vormen een scherp gekarakteriseerde groep. Ik meen dat zij grootendeels van de gewijzigde ademhaling afhankelijk zijn.

De zelfwaarneming leert ons dat wij actief de aandacht naar een voorstelling toewenden. Als wij het recht bezitten om aan te nemen dat bewegingsvoorstellingen een actief cachet voor het subject bezitten dan vinden wij dus aandachtig beschouwde voorstellingen, aan bewegingsvoorstellingen verbonden, en derhalve met ditzelfde cachet voorzien.

De physiologische parallelgebeurtenis laat zich van uit het gezichtspunt der associatie-physiologie beoordeelen uit de bestaande bewegingscomplexen. Een bepaald bewegingscomplex is van de schors der honden-hersenen met den electrischen stroom aan te toonen. Het is in sterker mate precies dezelfde combinatie van bewegingen, als die bij den aandachtige gevonden worden.

Wanneer een physiologische verandering, wier parallelrij bijv. een gezichtsvoorstelling is, zich voortplant en tijdens haar voortbestaan een nieuwe verandering wekt in dit psycho-motorische in-

ademingscentrum, dan is er voor het bewustzijn een gezichtsvoorstelling + een bewegingsvoorstelling van op bizondere wijze verrichte ademhaling. Dit complex noemt de zelfwaarneming de geappercipieerde of aandachtig beschouwde voorstelling.

Al is op het oogenblik de psychologie niet langs experimenteelen weg te bewerken, toch stelt de leer der physiologische parallelgebeurtenissen ons in staat, om de bewering te mogen uitspreken: dat aandacht en bewegingsvoorstellingen van bizondere ademhalingsbewegingen uitgegaan, innig aan elkander verbonden zijn. Nadere onderzoekingen op apen-hersenen zullen thans noodig zijn, en de andere uitdrukkingsbewegingen der aandacht zullen evenzeer aan regelmatig onderzoek moeten worden onderworpen om het, in dit opstel aangeduide vraagstuk, verder te brengen.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS spreekt over eene: *„Eenvoudige afleiding van de toestandsvergelijking voor stoffen met uitgebreide en samengestelde molekulen".*

Beschouwt men de in zeker volume aanwezige hoeveelheid stof als bestaande uit stoffelijke punten, iets dat men ook doen kan in het geval van molekulen met uitgebreidheid, die weder uit atomen zijn samengesteld, dan geldt de vergelijking

$$\Sigma\, {}^1/_2\, m\, V^2 = {}^1/_4 \frac{d^2 \Sigma\, mr^2}{dt^2} - {}^1/_2\, \Sigma\, (Xx + Yy + Zz) \;.\;.\;.\;.\; (a)$$

mits men de in deze vergelijking voorkomende grootheden op alle stoffelijke punten toepast.

Zijn groepen dezer stoffelijke punten weder tot afzonderlijke systemen vereenigd, zooals dit bij molekulen, die niet als een enkel punt kunnen beschouwd worden, het geval is, dan wordt bovenstaande vergelijking:

$$\Sigma\, {}^1/_2\, m\, V_z^2 + \Sigma\Sigma\, {}^1/_2\, \mu\, V_r^2 = {}^1/_4 \frac{d^2\, \Sigma\, m\, r_z^2}{dt^2} + {}^1/_4 \frac{d^2\, \Sigma\Sigma\, \mu\, r_r^2}{dt^2} -$$

$$- {}^1/_2\, \Sigma\, (Xx_z + Yy_z + Zz_z) - {}^1/_2\, \Sigma\Sigma\, (Xx_r + Yy_r + Zz_r) \;.\;.\; (b)$$

waarin de index z op de zwaartepunten der systemen betrekking heeft, en de index r de waarde eener grootheid relatief ten opzichte van het zwaartepunt beduidt.

Voor den stationairen toestand, zoowel der zwaartepunten als der systemen zelven, vereenvoudigt zich deze vergelijking tot

$$\Sigma\, {}^1/_2\, m\, V_z^2 + \Sigma\Sigma\, {}^1/_2\, \mu\, V_r^2 = -\, {}^1/_2\, \Sigma\, (Xx_z + Yy_z + Zz_z) -$$
$$-\, {}^1/_2\, \Sigma\Sigma\, (Xx_r + Yy_r + Zz_r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Opdat een groep punten als systeem moge beschouwd worden, is het noodig dat dezelfde punten voortdurend, wat er ook gebeure, bij elkander zijn en $\Sigma\Sigma\, \mu\, r_r^2$ constant blijve.

Voor den term $-\, {}^1/_2\, \Sigma\, (Xx_z + Yy_z + Zz_z)$ kan geschreven worden ${}^3/_2\, (N + N_1)\, v$, zoodat de laatste vergelijking verandert in:

$$\Sigma\, {}^1/_2\, m\, V_z^2 + \Sigma\Sigma\, {}^1/_2\, \mu\, V_r^2 = {}^3/_2\, (N + N_1)\, v -$$
$$-\, {}^1/_2\, \Sigma\Sigma\, (Xx_r + Yy_r + Zz_r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

In deze vergelijking kunnen botsingen, die tusschen de stoffelijke punten plaatsgrijpen, geen waarde opleveren, daar dit in elk punt, waarin een botsing geschiedt, twee krachten van tegengesteld teeken geeft, die in een zelfde punt werkende tegen elkander wegvallen. De krachten in den term ${}^1/_2\, \Sigma\Sigma\, (Xx_r + Yy_r + Zz_r)$ zijn dus alleen de aantrekkende krachten tusschen de punten van het systeem en mogelijk ook de aantrekkende krachten, die op een systeem door de omringende worden uitgeoefend. Van deze laatste krachten is bij de transformatie van $-\, {}^1/_2\, \Sigma\, (Xx_z + Yy_z + Zz_z)$ tot ${}^3/_2\, (N + N_1)\, v$ wel aangenomen dat voor een systeem, dat niet aan de oppervlakte gelegen is ΣX gelijk 0 is, maar daaruit volgt nog niet dat $\Sigma X x_r$ gelijk 0 is.

Past men nu ook op de bewegende systemen zelven de viriaalvergelijking toe, dan moet ook daarvoor gelden:

$$\Sigma\, \Sigma\, {}^1/_2\, \mu\, V_r^2 = -\, {}^1/_2\, \Sigma\, \Sigma\, (X'x_r + Y'y_r + Z'z_r) \quad . \quad . \quad (e)$$

mits nu door X', Y' en Z' alle krachten, ook die op de oppervlakken als naar binnen gerichte drukkrachten aanwezig zijn, in aanmerking genomen worden. Nu bevinden zich deze systemen in een ruimte waarin een druk heerscht, die $N + N_1$ per oppervlakteeenheid bedraagt, en mochten wij dezen druk beschouwen als werkelijk uitgeoefend op de oppervlakte van elk systeem, dan zou de waarde die daardoor in het tweede lid geleverd wordt, gelijk zijn aan ${}^3/_2\, (N + N_1)\, b_1$, als wij door b_1, het gezamenlijk volume der systemen voorstellen.

Nu deze druk echter op elk systeem overgedragen wordt door de

botsingen met de andere systemen, moeten wij bij de berekening dezer waarde dien druk beschouwen als uitgeoefend op tweemaal grooter afstand en dus op de oppervlakte van een volume dat ten minste bij bolvormige systemen een lineaire afmeting heeft, die tweemaal grooter is dan die van het systeem. Van de aldus verkregen waarde moet de helft genomen worden, omdat een druk door het eerste systeem op een tweede uitgeoefend, te gelijkertijd een druk is, die door het tweede op het eerste wordt uitgeoefend. Vergelijking (e) wordt dan $b = 4\,b_1$ stellende,

$$\Sigma\,\Sigma\,{}^1/_2\,\mu\,V_r^2 = {}^3/_2\,(N + N_1)\,b - {}^1/_2\,\Sigma\,\Sigma\,(Xx_r + Yy_r + Zz_r)\;.\;(f)$$

Trekt men (f) van (d) af dan verkrijgen wij de bekende vergelijking

$$^3/_2\,(N + N_1)\,(v - b) = {}^1/_2\,\Sigma\,m\,V_z^2.$$

De vergelijking (f) kan beschouwd worden de voorwaarden te bevatten voor den stationairen toestand der molekulen zelven. In den gegeven vorm is zij echter alleen toepasselijk als het molekuul gedacht wordt te bestaan uit stoffelijke punten, die niet weder afzonderlijke systemen vormen. Is dit laatste wel het geval, dan zal het evenwicht van elk afzonderlijk systeem weder aanleiding geven tot een nieuwe vergelijking, die evenwel geen verandering zal brengen aan de vergelijking $^3/_2\,(N + N_1)\,(v - b) = {}^1/_2\,\Sigma\,m\,V_z^2$.

Voor een mengsel bestaande uit $n_1 + n_2$ molekulen vinden wij de viriaalwaarde van den oppervlaktedruk der gezamenlijke molekulen door de opmerking, dat de bijdrage tot den druk op de eenheid van oppervlakte voor de twee soorten van molekulen evenredig is aan de aantallen, die zich in de eenheid van volume bevinden, en dus ook evenredig aan n_1 en n_2. Voor botsingen met een molekuul van de eerste soort moet dan een oppervlaktedruk gelijk aan $\frac{n_1}{n_1 + n_2}(N + N_1)$ aangenomen worden, en voor botsingen met molekulen van de tweede soort een oppervlaktedruk gelijk aan $\frac{n_2}{n_1 + n_2}(N + N_1)$.

Wij vinden voor de grootheid, waarmede $^3/_2\,(N + N_1)$ moet vermenigvuldigd worden om de waarde aan te geven van het viriaal van den druk, die op de oppervlakken der bewegende systemen werkt, dezelfde waarde welke LORENTZ (Wied. Ann. 1881, Bd. XII, Heft 1) vindt n.l.:

$$b = \frac{{}^2/_3\,\pi\,(\sigma_1{}^3 n_1{}^2 + \sigma_2{}^3 n_2{}^2 + 2\,\sigma^3 n_1 n_2)}{n_1 + n_2}$$

Dat de waarde van b slechts bij oneindige verdunning gelijk is aan 4 maal het volume der molekulen, en bij mindere verdunning kleiner moet zijn, laat zich uit de vorige beschouwingen gemakkelijk aantoonen; zelfs is het dan niet moeielijk een eerste benadering voor de wijze, waarop b van het volume der stof afhangt, aan te geven. Bij de berekening van de vergelijking (f) is de viriaalwaarde van den druk op de bewegende systemen gelijk gevonden aan de helft van de viriaalwaarde van een druk $N + N_1$ werkende op evenveel oppervlakken als er systemen zijn, maar die systemen begrensd gedacht door een boloppervlak met een straal beschreven, welke tweemaal grooter is dan de straal der systemen zelven. Noemen wij die grootere bollen „afstandssferen".

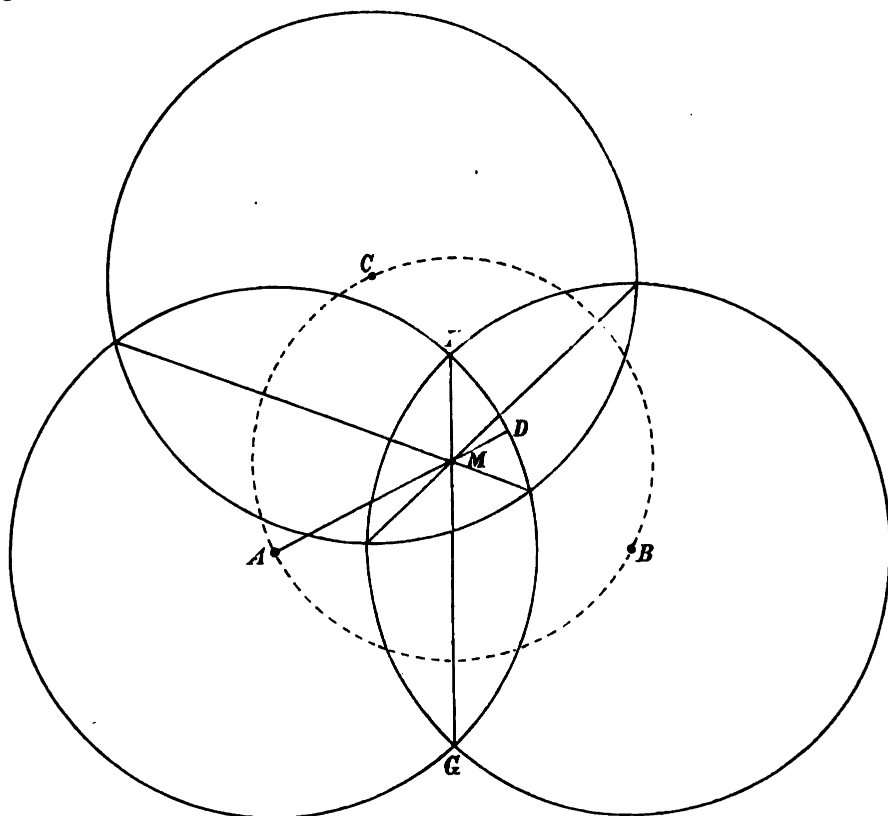
Al die afstandssferen zijn gedacht geheel buiten elkander te liggen, en geen punten met elkander gemeen te hebben. Daar het volume van al die sferen samen achtmaal het volume der molekulen groot is, is het geval dat al deze sferen buiten elkander liggen zeker niet mogelijk als het volume kleiner is dan $2\,b$.

Maar zelfs als het volume zoo groot is, dat bij de onderstelling van gelijkmatige verspreiding der molekulen in de ruimte de afstandssferen geheel buiten elkander liggen, zullen er, ten gevolge van de omstandigheid dat die verspreiding een geheel regellooze is, ten allen tijde een zeker aantal afstandssferen elkander bedekken. Nu is de vraag, in hoever moet de berekening van de viriaalwaarde van den druk $N + N_1$ op de molekuuloppervlakken hierdoor gewijzigd worden. Hebben we een paar molekulen, zoo gelegen, dat de afstandssferen elkander snijden, dan hebben wij niet twee geheele boloppervlakken, waarop de druk uitgeoefend wordt, maar een oppervlak bestaande uit twee gedeelten van sferische oppervlakken. De druk binnen de ruimte daardoor ingesloten is dezelfde, als wanneer zij uit twee gescheiden gedeelten bestond, maar de viriaalwaarde van den druk voor die twee molekulen samen is gelijk aan het dubbel van ${}^3/_2\,(N + N_1)\,(B - S)$, als B het volume van een afstandssfeer is en S het volume van het segment, dat van een afstandssfeer wordt afgesneden door het platte vlak, dat door de doorsnede gaat. Met andere woorden: wij moeten in plaats van de geheele afstandssfeer, in rekening brengen dat gedeelte van de afstandssfeer, dat tot aan het platte vlak der doorsnede reikt.

Wij komen dus tot hetzelfde resultaat, waartoe ik vroeger op

andere wijze gekomen was (Verslag Kon. Ak. van Wetenschappen Amsterdam, 31 Oct. 1896).

Ook een tweede correctie is aldaar aangeduid, en ofschoon de berekening dier tweede correctie tot zulke langwijlige integraties leidt, dat ik ze nog niet tot een einde heb gebracht, volgen hier eenige opmerkingen over de wijze, waarop deze correctie zou kunnen gevonden worden.



Laat A, B en C de oogenblikkelijke stand zijn van de drie centra der afstandssferen en M het middelpunt van den omgeschreven cirkel, dan zal de gemiddelde waarde van den inhoud van de ruimte, begrensd door de oppervlakte van de afstandssfeer A en door de platte vlakken FM en AMD, de tweede correctie voorstellen.

Nemen wij $AM = \alpha$ en $\angle AMG = C$ en zij de straal der afstandssfeer $= R$, dan is de waarde van het stuk FMD gelijk aan

$$I = {}^2/_3\, R^3\, Bg\, tg \left[tg\, C \frac{\sqrt{(R^2 - \alpha^2)}}{R}\right] -$$

$$- \alpha \sin C \left(R^2 - \frac{\alpha^2 \sin^2 C}{3}\right) Bg\, tg \frac{\sqrt{(R^2 - \alpha^2)}}{\alpha \cos C} +$$

$$+ \frac{\alpha \sin C\ \alpha \cos C \sqrt{(R^2 - \alpha^2)}}{3}.$$

Verplaatst C zich op den cirkel ABC, waarvan M het middelpunt is, dan blijft α en C evengroot en blijft dus I evengroot.

Laat voorloopig de afstand van A en B onveranderd blijven en C zich willekeurig verplaatsen, dan beweegt M zich langs de lijn FG. Noemen wij de hoogte, waarop M boven AB ligt, gelijk aan h, dan kan I als functie van h beschouwd worden door de opmerking, dat $\alpha^2 = h^2 + \frac{r^2}{4}$ (r de afstand AB) en $\sin C = \frac{r}{2\alpha}$ is. Draait men de geheele figuur om de lijn AB, en verdeelt men dan de geheele ruimte, waarin C geplaatst kan zijn, in volume-elementen ΔV, dan heeft men te bepalen

$$\int \frac{N}{V} I \Delta V.$$

Daar I als functie van h bekend is, moet ook ΔV als afhankelijk van h gegeven worden.

Stelt men nu nog den hoek, dien CM met FG maakt, voor door φ, dan is het ringvormige volume-element, waarin C ligt, voor te stellen door

$$2\pi\, d\varphi\, dh\, (h + \alpha \cos \varphi)^2.$$

Nemen wij φ tusschen 0 en de waarde, welke φ heeft als C op de afstandssfeer van A ligt, dan moet het dubbel dezer integraalwaarde genomen worden.

Daar de waarde van φ, als C op de sfeer van A ligt, geheel bepaald is door h, blijft de integratie naar h uit te voeren — en moeten de grenzen bepaald worden, waar tusschen h te nemen is.

De bovenste grens van h is natuurlijk $\sqrt{\left(R^2 - \frac{r^2}{4}\right)}$; de onderste grens wordt gevonden uit

$$h + \sqrt{\left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(R^2 - \frac{r^2}{4}\right)}$$

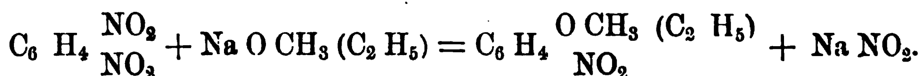
of

$$h = \frac{R^2 - \frac{r^2}{2}}{2\sqrt{\left(R^2 - \frac{r^2}{4}\right)}}$$

Deze onderste grens mag echter niet beneden $-\sqrt{\left(R^2 - \frac{r^2}{4}\right)}$ dalen, wat wel het geval zou zijn als $r > R\sqrt{3}$ is. Dit maakt dat men de integratie in 2 tempo's zal moeten verdeelen.

Scheikunde. De Heer LOBRY DE BRUYN doet eene mededeeling over: *„De substitutiesnelheid van een nitrogroep door een oxyalkyl"* naar aanleiding van de door hem aangeboden dissertatie van DR. A. STEGER.

Een onderzoek naar de snelheid van substitutie van atomen of atoomgroepen direct aan den benzolkern verbonden, door andere groepen had tot nu toe niet plaats gevonden; voor de kennis der eigenschappen van den benzolkern en den invloed der verschillende plaatsen op elkaar was een dergelijk onderzoek van belang. Eene omzetting welke daartoe zeer geschikt was, had ik vroeger ontmoet bij eene vergelijkende studie der drie dinitrobenzolen, de substitutie n.m. van een der nitrogroepen in ortho- en paradinitrobenzol door oxymethyl of oxyaethyl [1]) volgens de vergelijking:



$$C_6\,H_4\,{NO_2 \atop NO_2} + Na\,O\,CH_3\,(C_2\,H_5) = C_6\,H_4\,{O\,CH_3\,(C_2\,H_5) \atop NO_2} + Na\,NO_2.$$

Een voorloopige proef had mij reeds geleerd dat met natriummethylaat het paradinitro-benzol bij 0° zich sneller omzet dan het orthodinitrobenzol.

De heer STEGER heeft nu het quantitatief onderzoek der vier genoemde reacties bij temperaturen van 25°, 35° en 45° bestudeerd; daarenboven werd de invloed der concentraties, die van de aanwezigheid eener natriumverbinding en die der geleidelijke toevoeging van water nagegaan. De resultaten van die studie, door den heer STEGER als dissertatie gepubliceerd, bieden eenig algemeen belang aan, waarop ik hier even de aandacht meen te mogen vestigen.

Vooreerst is dan vastgesteld dat de substitutie bij paradinitrobenzol sneller verloopt dan bij orthodinitrobenzol; voor beide lichamen vindt met natriumaethylaat de omzetting sneller plaats dan met natriummethylaat, een verschijnsel dat zich aansluit aan de waarnemingen van anderen. De verhouding van ortho- tot paradinitrobenzol is voor de twee alkylaten niet dezelfde, een verschil dat kan teruggevoerd worden tot den invloed der twee alcoholen, die als oplosmiddel dienden. De invloed echter van de temperatuur, voor de twee dinitrobenzolen ongelijk, bleek voor elk hunner tegenover de twee alcoholaten dezelfde te zijn.

De vraag welke de invloed der concentratie was op de reactie-

[1]) Recueil 13 (1894) 101, 106.

snelheid, had belang met het oog op een onderzoek van HECHT, CONRAD en BRÜCKNER [1]) over de snelheid der aethervorming, van reacties dus die geheel vergelijkbaar zijn met de hier besprokene; zij verloopen toch volgens de vergelijking:



$$CH_3\,J + Na\,O\,CH_3 = CH_3\,O\,CH_3 + Na\,J, \text{enz.}$$

De genoemde onderzoekers hadden vastgesteld dat bij het proces der aethervorming de reactieconstante met de verdunning toeneemt. Het ligt voor de hand (wat in 1890 H. C. en BR. nog niet deden) thans hier te denken aan den invloed der met de verdunning toenemende electrolytische dissociatie dus aan de vermeerdering der oxyalkyljonen [2]) en de bovenstaande vergelijking te schrijven:



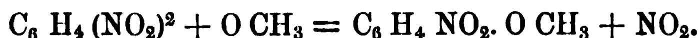
$$CH_3\,J + Na + O\,CH_3 = CH_3\,O\,CH_3 + Na + J$$

of daar het natriumjon aan de reactie niet meedoet:



$$CH_3\,J + O\,CH_3 = CH_3\,O\,CH_3 + J.$$

De door den heer STEGER bestudeerde reactie zou dan worden voorgesteld door



$$C_6\,H_4\,(NO_2)^2 + O\,CH_3 = C_6\,H_4\,NO_2.\,O\,CH_3 + NO_2.$$

Het bleek nu echter merkwaardiger wijze dat, in tegenstelling van het proces der aethervorming, de reactieconstante der laatstbedoelde omzetting niet door de concentratie wordt veranderd.

De vraag die zich als gevolg van dit resultaat nu van zelf aanbood was deze. Indien bij de aethervorming wel, bij de omzetting der dinitrobenzolen niet een regelmatige invloed der verdunning, zooals door de electrolytische dissociatietheorie geëischt wordt bestaat, welke is dan bij beide reacties de invloed der toevoeging eener stof met gelijknamige jon? Voegt men een natriumzout toe, dan zal de vermeerdering der concentratie van de natriumionen die der oxyalkylionen terugdringen en dus de reactieconstante doen dalen. Door H.

---

[1]) Z. f. phys. Ch. 5 (1890).

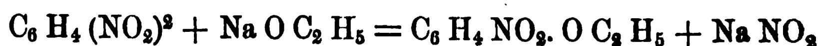
[2]) Noch $CH_3\,J$ noch $C_6\,H_4\,(NO_2)^2$ geleiden in alcoholische oplossing den electrischen stroom.

C. en Br. was deze vraag slechts terloops en onvoldoende bestudeerd.

Bij het onderzoek naar de snelheid der aethervorming onder toevoeging van toenemende hoeveelheden Na J bleek nu, dat de reactieconstante, in overeenstemming met wat de ionentheorie vordert, regelmatig afneemt. Aan den anderen kant echter leerde de proef dat voor de omzetting van orthodinitrobenzol eene verandering der snelheidsconstante door toevoeging van een natrium-zout niet merkbaar is. Men komt dus tot de op zich zelf onwaarschijnlijke conclusie, dat van twee overigens geheel gelijksoortige reacties de eene wel de andere niet onder den invloed staat der electrolytische dissociatie. Aannemelijker schijnt de veronderstelling dat de theorie der electrolytische dissociatie niet bij alle reactie's in oplossingen, waaraan electrolyten deelnemen, als verklaringsbeginsel kan worden toegepast en dat de omzettingen tusschen stoffen, die beiden of waarvan een zich als electrolyt gedraagt, nog van iets anders kunnen afhangen als van den aard en concentratie der jonen.

Tot de vragen waartoe dit resultaat voert, behoort in de eerste plaats die naar de verandering die het geleidingsvermogen van alkylaatoplossingen ondergaat door de verdunning.

De studie der hier besproken reactie heeft voor het orthodinitrobenzol nog eene uitbreiding ondergaan, welke eveneens eenige niet onbelangrijke resultaten heeft opgeleverd. Enkele waarnemingen van vroegeren datum hadden bewezen dat de toevoeging van zeer geringe hoeveelheden water de eigenschappen der alcoholen soms zeer sterk verandert. Wij besloten dus voor methyl- en aethylalcohol dien invloed eveneens na te gaan. Het resultaat was in meerdere opzichten onverwacht. Vooreerst bleek het dat reactieconstanten bleven optreden, zelfs bij alcohol-water mengsels met tot 50 pCt. water toe. Nu wordt algemeen aangenomen dat natrium-alcoholaat zich reeds met weinig water, althans gedeeltelijk, omzet in natron en alcohol. Was nu natron aanwezig dan mocht de vorming van nitrophenolaat verwacht en dus het gelijktijdig optreden van de twee volgende reacties tegemoet gezien worden:



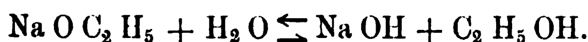
$$C_6 H_4 (NO_2)^2 + Na O C_2 H_5 = C_6 H_4 NO_2 . O C_2 H_5 + Na NO_2$$



$$\text{en } C_6 H_4 (NO_2)^2 + Na O H = C_6 H_4 NO^2 . OH + Na NO_2 .$$

In het laatste geval moest een tweede mol. natron het natrium-nitrophenolaat doen ontstaan en hierdoor de concentratie van de

natron eveneens achteruit gaan. Nu kon bij gelijktijdig verloop der twee reacties allerminst eene gelijke snelheid worden verwacht. Bij die ongelijke snelheid moest tevens het evenwicht tusschen Na OH en Na O $C_2 H_5$ worden gewijzigd en dus bij de drie genoemde reacties nog de volgende optreden:



$$\mathrm{Na\,O\,C_2\,H_5 + H_2\,O \leftrightarrows Na\,OH + C_2\,H_5\,OH.}$$

Vonden al deze reacties gelijktijdig plaats dan kon van eene constante geen sprake zijn. Toch werden zooals gezegd, voor de beide alcoholen, constanten gevonden, zelfs nog voor de met gelijk gewicht water verdunde alcoholen. De verklaring bleek gemakkelijk te kunnen worden gegeven. In tegenstelling met wat algemeen wordt aangenomen bleek het dat het natrium in met 50 pCt. water verdunde methylalcohol grootendeels aan oxyalkyl is gebonden. Zulks kon ook nog worden aangetoond door de quantitatieve bepaling van het gevormde natriumnitrophenolaat, hetwelk wegens de gele kleur van dat zout langs colorometrischen weg mogelijk was. De hoeveelheden welke daarvan waren gevormd, bleken zeer gering en bedroegen voor 50 pCt. en 60 pCt aethylalcohol slechts enkele percenten.

Er bleek nu nog eene andere eigenaardigheid, n.m. deze, dat de toevoeging van water de reactieconstante in methylalcohol doet stijgen van 0.0169 tot 0.0249, in aethylalcohol doet dalen van 0.0261 tot 0.0104. Voor een gehalte van ± 12 pCt. aan water is voor de beide alcoholen de constante dezelfde. Het viel nu in hooge mate te betreuren dat de steeds afnemende oplosbaarheid van orthodinitrobenzol in de verdunde alcoholen niet toeliet, de proef tot water toe door te voeren. De twee krommen die men uit de constanten en het watergehalte kan construeeren moeten noodzakelijkerwijze zich in één punt vereenigen, dat hetwelk de reactieconstante zou aangeven voor waterige natron, dus bij afwezigheid der alcoholen. Toch hebben wij onze proeven in zoover kunnen uitbreiden dat wij hebben vastgesteld voor de nog sterker verdunde alcoholen hoeveel van het nitrooxymethyl resp. nitrooxyaethylbenzol (nitroanisol en nitrophenetol) en hoeveel nitrophenol werd gevormd bij koking van dinitrobenzol met natron welke 40, 20 en 10 pCt. der alcoholen bevatte. Uit het resultaat dezer proeven, dat hier volgt, ziet men dat zelfs bij de zeer verdunde methylalcoholen de vorming van de oxymethylverbinding de hoofdreactie uitmaakt, terwijl bij aethylalcohol toch nog altijd een belangrijke hoeveelheid nitrophenetol wordt geboren.

Methylalcohol	k. pt.	tijd	dinitrobenzol	oxyalkyl-verbind.	
40%	81°	8 u.	3.03 gr.	2.7 gr.	± 96%
20 »	89	»	3.01 »	2.4 »	± 88 »
10 »	94°	16 u.	3. »	2.0 »	± 70 »
Aethylalcohol					
40%	86°	8 u.	3.2 »	2. »	± 63 »
20 »	92°	16 u.	3.3 »	1.15 »	± 35 »

Bij de voortzetting dezer onderzoekingen zal het in de eerste plaats ons doel zijn vast te stellen of ook bij de aethervorming in met water verdunde alcoholen een zelfde gedrag optreedt als bij de hier behandelde omzetting der dinitrobenzolen. Verder zullen wij trachten stoffen te vinden waarvan de omzettingen zich leenen voor een quantitatief onderzoek zoowel in alcohol en water als in elk mengsel dezer twee vloeistoffen met gelijktijdige bepaling van een der producten.

Scheikunde. — De Heer TH. H. BEHRENS doet eene mededeeling: „*Over eenige anomalieën in het stelsel van* MENDELEJEFF".

In den vierden bundel zijner „Beiträge zur Kenntnis des Isomorphismus" heeft de heer J. W. RETGERS beweerd, dat Telluraten niet isomorph zijn met Seleniaten en Sulfaten, dat Te nader bij Sn en Pt staat dan bij S, en in den zesden bundel heeft hij tegenover den heer MUTHMANN zijne opvatting staande gehouden. Hij wijst Te eene plaats aan tusschen Ru en Os (Fe = 56, Ru = 104, Fe = 128, Os = 195). Zijne beschouwingen rusten voornamelijk op twee feiten: op het gemis van mengkristallen, uit K_2SO_4 en K_2TeO_4 bestaande, en op de isomorphie van chlorotelluraten met chloroplatinaten en chlorostannaten. Daarnaast komen nog de verschillen der atoomgewichten van Sb, Te en J in aanmerking en het bestaan der verbinding H_2Te, analoog aan H_2S, maatgevend zijn echter voor hem de isomorphieën. Het eerste feit is door hem met behulp van K_2MnO_4 geconstateerd, dat wél met K_2SO_4 en met K_2SeO_4, maar niet met K_2TeO_4 gekleurde mengkristallen levert. Ik heb dit feit ten overvloede nogmaals geconstateerd met behulp van Ag_2CrO_4, dat met Ag_2SO_4 dadelijk gekleurde mengkristallen leverde, daarentegen *niet* met Ag_2TeO_4.

Waar hij van isomorphie der chlorotellurieten (hij schrijft: chlorotelluraten) met chlorostannaten en chloroplatinaten spreekt, geeft

de heer RETGERS geene proeven op. Controleproeven waren hier zeer wenschelijk. Met $K_2 Pt Cl_6$ konden geene mengkristallen verkregen worden, tengevolge van te ver uiteenloopende oplosbaarheid der verbindingen $K_2 Pt Cl_6$ en $K_2 Te Cl_6$. Daarentegen gelukte dit, ofschoon moeielijk, met $Cs_2 Sn Cl_6$ en $Cs_2 Te Cl_6$ en gemakkelijker met $Cs_2 Os Cl_6$ en $Cs_2 Te Cl_6$. Eindelijk werden uit sterk met zoutzuur bedeelde oplossingen ook fraaie mengkristallen van $Cs_2 Te Cl_6$ met $Cs_2 Ir Cl_6$ verkregen. Hier zijn de mengkristallen lichtbruin, de componenten messinggeel en roodbruin.

Om uit te maken, of Te nader bij Sn of bij Os en Ir staat, werden proeven met zuren gedaan, die tot een eigenaardig resultaat leidden. $Te O_2$ levert namelijk met $KHC_2 O_4$ goed ontwikkelde mikroskopische kristallen van een moeielijk oplosbaar dubbeloxalaat die in hooge mate op kristallen van kalium-zirkonium-oxalaat gelijken, wat wijze van onstaan, vorm en afmetingen aangaat.

De toenadering van Te tot de vierde groep van MENDELEJEFF leidde tot de vraag: hoever mag zich de isomorphie van $K_2 Sn Cl_6$ met analoge verbindingen van andere tetrachlorides uitstrekken? Voor de beantwoording dezer vraag kwam in de eerste plaats $Pb Cl_4$ in aanmerking. $Pb O_2$ wordt bij 0° door rookend zoutzuur tot eene gele vloeistof opgelost, waarin na toevoeging van Cs Cl donkergele octaëders ontstaan. Heeft men vooraf $Sn Cl_4$ toegevoegd, zoo ontstaan veel grootere lichtgele kristallen van denzelfden vorm. Uit gemengde oplossingen van $Sn Cl_4$ en $Pt Cl_4$ waren geene mengkristallen te verkrijgen, wèl daarentegen uit gemengde oplossingen van $Sn Cl_4$ en $Ir Cl_4$. Om het kristalliseeren van chloroïridaat tegen te gaan werd veel zoutzuur toegevoegd en daarna Rb Cl. Bij gewone temperatuur ontstaan weinig mengkristallen, en deze zijn zwak gekleurd, voegt men daarentegen Rb Cl bij kookhitte toe, zoo zijn de mengkristallen in de meerderheid en kunnen zoo donkerrood gemaakt worden als men verkiest. Door met Rb Cl te fractioneeren kan men serieën verkrijgen van zwartachtig rood tot flauw roodachtig geel. Minder gemakkelijk te bereiden zijn mengkristallen van $Cs_2 Sn Cl_6$ en $Cs_2 Os Cl_6$, ook loopt de kleurverandering van kleurloos tot lichtbruin minder in het oog. Ten slotte werden nog proeven genomen met $Sn Cl_4$ en $Mn Cl_4$, bereid door $Mn O_2$ bij 0° in rookend zoutzuur op te lossen. In eene dergelijke oplossing brengt Cs Cl donkerroode octaëders te voorschijn, op kristallen van $K_2 Ir Cl_6$ gelijkende. Voegt men vooraf $Sn Cl_4$ toe, zoo ontstaan mengkristallen, die met de zooeven beschrevene iridiumhoudende kristallen zouden kunnen verwisseld worden. Zij zijn wederom grooter dan de kristallen der componenten.

Deze laatste proeven zijn bijzonder leerzaam. Op grond der isomorphie van $K Mn O_4$ met $K Cl O_4$ heeft men Mn eene plaats in de zevende groep van Mendelejeff toegekend; met het oog op de isomorphie tusschen $K_2 Mn O_4$ en $K_2 SO_4$ zoude het in de zesde groep, op grond der zooeven beschrevene proef zoude het in de vierde, op grond der isomorphie van gewoon aluin en mangaanaluin in de derde en met het oog op manganoöxalaat en op ammonium-manganophosphaat zoude het naast Mg in de tweede groep moeten geplaatst worden. Van soortgelijke proteusachtige geaardheid is het chromium. Het zoude op grond van isomorphieën kunnen plaats vinden in de zevende, de zesde, de derde en met het oog op de chroomammoniumverbindingen in de achtste groep. Voor Te kan men tusschen drie groepen kiezen. Vat men de verbinding $H_2 Te$ in het oog, zoo behoort het tot de zesde groep, brengt men met Retgers de isomorphie van $K_2 Te Cl_6$ met $K_2 Os Cl_6$ en $K_2 Ir Cl_6$ op den voorgrond, zoo komt het in de 8e groep te staan, terwijl het met het oog op de isomorphie van $Cs_2 Te Cl_6$ met $Cs_2 Sn Cl_6$ en met het oog op het kalium-telluur-oxalaat naar de vierde groep kan verwezen worden. Hierbij dient echter in het oog te worden gehouden, dat de plaatsing in de zesde groep eenig en alleen op de samenstelling en de eigenschappen der verbinding $H_2 Te$ berust, dat het atoomgewicht hiervoor kleiner dan 126 behoorde te zijn (Sb = 120, Te = 123, J = 126.5) en dat het atoomgewicht van Te ook zijne plaatsing in de vierde en achtste groep in den weg staat. Immers in de vierde groep is in het geheel geen plaats naast Sn voor een element met een atoomgewicht van ruim 120 te vinden (Sn = 117.4, Ce = 141) en de plaatsing van Te in de 8e groep, tusschen Ru en Os sluit de hypothese in zich, dat in deze groep nog 17 nieuwe elementen te vinden waren. De atoomgewichten der algemeen erkende elementen dezer groep klimmen met 45 tot 48, terwijl de afstand tusschen Ru en Te 22 tot 24 is (Ru = 104, Te = 126—128), dus drie nieuwe elementen tusschen de eerste en tweede horizontale rij, 8 tusschen de tweede en derde (Ru = 104, Os = 195) en 6 onder de derde rij (Pt = 195, U = 240). Eene dergelijke aanvulling der 8e groep is niet onmogelijk maar ook niet waarschijnlijk. Waarschijnlijk zou de heer Retgers, indien hij de isomorphie van $Cs_2 Mn Cl_6$ met $Cs_2 Sn Cl_6$ gekend had, zich met de juiste bewering, dat telluraten *niet* isomorph zijn met sulfaten, vergenoegd, en niet in de 8e groep naar eene plaats voor Te gezocht hebben, met een verschil der atoomgewichten van 22 in plaats van 45.

De beteekenis van het isomorphisme voor scheikundige beschouwingen dient nog verder beperkt te worden, dan dit reeds door de

onderzoekingen van RETGERS geschied is. De verouderde voorstelling van isomorphe grondstoffen als oorzaak der isomorphie van verbindingen is van de baan, maar men mag zelfs niet van isomorphie tusschen sulfaten en chromaten, tusschen phosphaten, arseniaten en vanadaten spreken. In aluinen kan trivalent chromium in de plaats van aluminium gebracht worden, terwijl het zwavelzuur niet door chroomzuur kan vervangen worden, hetgeen in verbindingen met een- of tweewaardige metalen wèl doenlijk is. In ammoniumcalciumarseniaat kan phosphorzuur en vanadienzuur niet de plaats van arseenzuur innemen, terwijl in loodapatiet de genoemde zuren elkander, zonder wijziging der kristalvorm kunnen vervangen. Hier is de isomorphie tot nauw omschrevene groepen van verbindingen beperkt; in andere gevallen kunnen de groepen van isomorphen eenen enormen omvang aannemen. Een goed voorbeeld leveren de dubbelarseniaten van het type $(NH_4)_2\,Ca\,As\,O_4 + 6\,H_2\,O$. Hierin kan Ca met behoud van den kristalvorm door Ba, Sr, Pb, Mg, Mn, Fe, Co, Ni, Zn, Cd en Cu vervangen worden. Soortgelijke wijduitgestrekte vervanging treft men in de groep der tripelacetaten van het type $Na\,Mg\,(UO_2)_3\,(C_2\,H_3\,O_2)_9 + 9\,H_2\,O$ aan. Het geeft den indruk, als of in dergelijke gecompliceerde dubbel- en tripelverbindingen de vorm beheerscht en als het ware gestabiliseerd werd door volumineuse telkens terugkeerende kernen, m. a. w.: dat isomorphie en morphotropie eene oorzaak gemeen hebben. Voor de tripelacetaten heeft men de kern in het steeds terugkeerende $Na\,(UO_2)\,(C_2\,H_3\,O_2)_3$ te zoeken, en vindt hier naast de isomorphie morphotropie vertegenwoordigd in het streven der rhomboëdrische kristallen, den regulairen vorm van het natriumuranylacetaat na te bootsen. Ook ligt het voor de hand een verband te zoeken tusschen deze verschijnselen en de combinatie van isomorphie met morphotropie in sommige familiën van mineralen, b. v. de pyroxenen, waar vervanging van Mg door Ca, van Ca door Zn en Mn verandering van kristalstelsel teweegbrengt, met behoud van den habitus.

Scheikunde. — De Heer HOOGEWERFF biedt, ook namens den Heer VAN DORP, voor het Verslag eene mededeeling aan: „*Over de inwerking van methylalcohol op de imiden van tweebasische zuren*".

In April van dit jaar hebben wij in het Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas et de la Belgique eene kleine mededeeling geplaatst, waaruit blijkt, dat bij het verhitten van imiden van tweebasische zuren met zoutzuurhoudenden methylalcohol in sommige

gevallen de methylesters van de met de imiden correspondeerende amidozuren worden gevormd.

Dit werd althans waargenomen bij de phenylimiden van het barnsteenzuur en van het maleïnezuur, ook bij die, welke in het zuurradicaal gesubstitueerd waren. Het phenylimide van het maleïnezuur vormt b.v. met zoutzuurhoudenden methylalcohol den ester volgens de vergelijking

$$\begin{matrix} CH-CO \\ \| \\ CH-CO \end{matrix} > NC_6H_5 + CH_3OH = \begin{matrix} CH-CO.\ NHC_6H_5 \\ \| \\ CH-CO.\ OCH_3 \end{matrix} .$$

Bij het nader bestudeeren deze reactie is ons gebleken, dat de medewerking van het zoutzuur wel aan de estervorming bevorderlijk kan zijn, maar daarvoor niet noodzakelijk is. Verschillende imiden, door ons onderzocht, gaan bij verhitting met watervrijen methylalcohol, zonder bijvoeging van methylalcoholisch zoutzuur, gedeeltelijk over in de esters van amidozuren. Het best werkt men in toegesmolten buizen bij temperaturen tusschen 150°—200° en soms nog hooger; estervorming vindt echter ook plaats, wanneer men de imiden met methylalcohol aan den terugvloeikoeler geruimen tijd kookt.

Voorts konden wij in sommige gevallen aantoonen, dat deze esters bij verhitting met methylalcohol weder ten deele worden omgezet in imide en methylalcohol. Wellicht hebben wij dus hier met eene omkeerbare reactie te doen:

$$\text{imid} + \text{methylalcohol} \rightleftarrows \text{ester van het amidozuur.}$$

Misschien gelukt het ons hiervan het experimenteele bewijs te leveren.

In hun klassiek onderzoek over de estervorming uit zuren en alcoholen geven Berthelot en Péan de St. Gilles aan, dat de maximale hoeveelheid ester, welke gevormd kan worden, slechts weinig afhankelijk is van de temperatuur. Ook bij de vorming der esters van amidozuren uit imiden schijnt dit, ten minste somtijds, het geval te zijn.

Wij hebben uit de volgende imiden door verhitting met methylalcohol de esters der correspondeerende amidozuren bereid: succinimide, succinphenylimide, succinparanitrobenzylimide, maleïnphenylimide, phtaalphenylimide.

Succinimide $\begin{array}{l} CH_2—CO \\ | \\ CH_2—OH \end{array} > NH$, gedurende 3 uur met het achtvoudige gewicht watervrijen methylalcohol in toegesmolten buizen op 170° verhit, levert den methylester van het succinamidozuur $\begin{array}{l} CH_2—CO—NH_2 \\ | \\ CH_2—CO\,O\,CH_3 \end{array}$ in ruime hoeveelheid.

Wij bereidden dezen ester, dien wij in de literatuur niet vermeld vonden, ook door inwerking van methyljodide op succinamidozuur zilver en overtuigden ons, dat beide verbindingen identiek zijn. Kookt men het imide met methylalcohol aan den terugvloeikoeler, zoo heeft eveneens, alhoewel langzaam, estervorming plaats.

De omzetting van het succinphenylimide $\begin{array}{l} CH_2—CO \\ | \\ CH_2—CO \end{array} > N\,C_6\,H_5$ in den ester van het amidozuur, $\begin{array}{l} CH_2—CO—NH\,C_6\,H_5 \\ | \\ CH_2—CO—CO\,O\,CH_3 \end{array}$, die gemakkelijk plaats vindt, wanneer men zoutzuurhoudenden methylalcohol aanwendt, schijnt moeilijker te geschieden, wanneer men dezen alcohol alleen gebruikt. Wij hebben tot op 240° moeten verhitten om een bevredigend rendement te verkrijgen. Wij beschouwen onze proeven met dit imide nog niet als afgeloopen.

Wordt het succinparanitrobenzylimide $\begin{array}{l} CH_2—CO \\ | \\ CH_2—CO \end{array} > N\,CH_2\,C_6\,H_4\,NO_2$ met de zevenvoudige hoeveelheid methylalcohol eenige uren bij 170° verhit, zoo wordt eene kleine hoeveelheid van den ester $\begin{array}{l} CH_2\,CO.\,NH.\,CH_2.\,C_6\,H_4\,NO_2 \\ | \\ CH_2.\,CO\,O\,CH_3 \end{array}$ gevormd. Proeven omtrent estervorming bij lagere temperatuur werden hier niet genomen. Omgekeerd wordt deze ester bij verhitting op 170° met methylalcohol grootendeels omgezet in het imide.

Het maleïnphenylimide $\begin{array}{l} CH—CO \\ || \\ CH—CO \end{array} > N\,C_6\,H_5$ (1 deel) gaat door verhitting bij 170° met methylalcohol (7 deelen) ten deele over in den methylester van het maleïnphenylamidozuur $\begin{array}{l} CH—CO—NH\,C_6\,H_5 \\ || \\ CH—CO\,O\,CH_3 \end{array}$.

Reeds bij het koken aan den terugvloeikoeler heeft dezelfde reactie, alhoewel langzaam, plaats.

Het phtaalphenylimide $C_6H_4\begin{matrix} / CO \\ \backslash CO \end{matrix} > NC_6H_5$ levert bij verhitting met methylalcohol aan den terugvloeikoeler of bij hoogere temperatuur in toegesmolten buizen kleine hoeveelheden van den phtaalphenylamidozuren methylester $C_6H_4\begin{matrix} / CO-NH\,C_6H_5 \\ \backslash CO\,O\,CH_3 \end{matrix}$. Dat deze ester tegenover methylalcohol weinig bestendig is. bespeurt men, zoodra men tracht hem uit dit oplosmiddel om te kristalliseeren. De warme oplossing levert weldra niet onbelangrijke hoeveelheden van het phenylimide.

Eindelijk is ons bij vergelijkende proeven gebleken, dat de imiden met methylalcohol veel gemakkelijker de esters van amidozuren vormen, dan met aethyl- of propylalcohol. Het grootere estervormende vermogen, dat de eerste alcohol bezit [1]), toont zich ook bij deze proeven.

Aan de heeren VAN BREUKELEVEEN en VAN HAARST, die ons met toewijding bij dit onderzoek behulpzaam waren, brengen wij ook gaarne hier onzen dank.

Delft/Amsterdam, October 1898.

Wiskunde. — De Heer KLUYVER biedt voor de werken der Akademie een verhandeling aan van den Heer N. L. W. A. GRAVELAAR te Deventer, getiteld: *„John Napier's Werken"*. Deze wordt in handen gesteld van de Heeren KLUYVER en KORTEWEG om daarover verslag uit te brengen.

Natuurkunde. — De heer KAMERLINGH ONNES biedt voor het verslag aan: Mededeeling n°. 44, uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: *„Een verkorte open standaard manometer met drukoverbrenging door samengeperst gas"*.

§ 1. *Beginsel.* Voor nauwkeurige bepalingen van hooge drukkingen tot omstreeks 100 atmosferen zijn open kwik-manometers onmisbaar. Wanneer men uit de samendrukking van een of ander gas in een gesloten manometer, onder toepassing van de toestandsvergelijking van dit gas, den druk afleidt, zijn bepalingen met open manometers den grondslag der metingen en zal het bij nauwkeurige metingen wenschelijk zijn zoo mogelijk de aanwijzingen der gesloten

---

1) Zie MENSCHUTKIN. Lieb. Ann. **195**, p. 357.

manometers te controleeren door ze met die van den open manometer te vergelijken. Waar men echter den druk met een grootere nauwkeurigheid wenscht te bepalen dan de toestandsvergelijking van het gas, met hetwelk de gesloten manometer gevuld is, waarborgt, blijft wel geen ander middel over dan de metingen met een open manometer zelf te verrichten, en wel met een werktuig, dat toelaat een hoogen graad van nauwkeurigheid te bereiken.

Het veelvuldig gebruik van gesloten manometers [1]) bij de onderzoekingen in het Leidsche laboratorium en de noodzakelijkheid om bij enkele bepalingen (in 't bijzonder tot drukkingen van ongeveer 60 atmosferen) den druk met bijzonder groote nauwkeurigheid te meten, deed daar de behoefte aan een absoluten manometer reeds lang gevoelen. Open reuzen-manometers met een enkelen onafgebroken kwikdraad naar het voorbeeld van REGNAULT, AMAGAT en CAILLETET op te stellen, is daar onmogelijk. Slechts in bijzondere gevallen trouwens zal men in de gelegenheid zijn dit te doen en in 't algemeen zal men gebruik moeten maken van het in 1845 door RICHARDS het eerst in toepassing gebracht en door anderen overgenomen beginsel om den open manometer te verkorten, door hem te splitsen in naast elkaar geplaatste opvolgende manometers van geringe hoogte, bij welke de te meten druk de kwikzuil van den eersten manometer doet opstijgen, terwijl boven op die zuil een druk wordt uitgeoefend, welke zelf wederom gemeten wordt, doordat men hem naar den tweeden manometer overbrengt, waar hij de kwikzuil opdrijft onder een overdruk, die door den derden manometer wordt gemeten, enz. RICHARDS en zijn navolgers laten den druk door water overbrengen. Dit hulpmiddel is ook door THIESEN [2]) aangegeven en van diens ontwerp is uitgegaan bij de inrichting van den normaal-manometer van de Physikalisch-Technische Reichsanstalt,

---

[1]) Wanneer men betrekkelijk vlug met groote nauwkeurigheid allerlei drukkingen kan meten, dan wordt ook het gradueeren van gesloten manometers, na de vervaardiging ervan, zoo eenvoudig, dat men de metingen, uit welke men de schaalwaarde anders afleidt, achterwege kan laten. Een gesloten manometer op deze wijze gegradueerd, kan in beginsel als meetwerktuig met den metaalmanometer worden gelijkgesteld, doch heeft boven den laatsten voor, dat zijne aanwijzingen bij inachtneming van de noodige correcties, volkomen betrouwbaar en allicht veel gevoeliger zijn. Het gradueeren van den gesloten manometer nadat deze gereed is, ontheft den waarnemer van de meest tijdroovende en onzekere bepalingen. De nauwkeurigheid welke men bij gesloten manometers tot 100 atm. bereiken kan, is voldoende voor het ijken van metaalmanometers, die om vertrouwbaar te zijn herhaaldelijk moet worden gecontroleerd en bij nauwkeurige metingen voornamelijk als aanwijzers van bewerkingen in aanmerking komen.

[2]) Zeitschrift f. Instrumentenkunde, 1881, p. 114.

een toestel die, ofschoon naar het beginsel der vorigen gebouwd door zijn geheele inrichting aan veel hoogere eischen voldoet.

In de (schematisch) slangvormige hevelbuis van staande en omgekeerde U's bevindt zich in den evenwichtsstand in de boven ∩ helften water in de onder U helften kwik, en worden, wanneer aan het eene uiteinde druk wordt uitgeoefend, al de menisci tegelijk verschoven, zoodat de druk uit de verschuiving van een der menisci zou kunnen worden afgeleid. Op al de menisci wordt echter afzonderlijk ingesteld en daardoor is, gelijk WIEBE [1]) terecht zegt, eerst een standaard-instrument verkregen. Intusschen is het gezamenlijk bewegen der menisci een der bezwaren geweest, op welke men bij het werken met den standaard-manometer in de Phys. Techn. Reichsanstalt gestuit is. Immers men heeft zich daar, niettegenstaande de toestel op het bepalen van hoogeren druk was aangelegd, tevreden gesteld met het bereiken van 20 atmosferen, een grens zelfs niet hoog genoeg wanneer men de manometers van den dienst van het stoomwezen hier te lande door directe vergelijking met den absoluten manometer wil controleeren. (Onder de manometers, die door mij voor den Heer Hoofdingenieur van het Stoomtoezicht met den open manometer gecontroleerd zijn, komen er voor die tot 30, onder die, welke door mij voor den Heer Hoofdingenieur van Marine gecontroleerd zijn, die tot 60 gaan, ja er werden mij manometers, behoorende tot dezen tak van dienst toegezonden, die tot 100 atm. gaan).

De toestel van de Reichsanstalt heeft verder het gebrek, dat zoowel de kleine als de groote drukkingen, zonder onderscheid worden gemeten in buizen, die alle zoo nauw zijn als noodig is, opdat zij aan den hoogsten druk kunnen weerstand bieden, en dat die drukkingen, onverschillig of zij klein of groot zijn, worden afgeleid uit het evenwicht van eenzelfde aantal even lange vloeistofkolommen en instellingen op eenzelfde aantal kwikmenisci. Bij lagere drukkingen is dus de onzekerheid ten gevolge van de correctie voor capillaire neerdrukkingen en voor de temperatuur zoowel als de afleesfout noodeloos groot. Voor het doel, in den aanhef vermeld, kan deze toestel, die trouwens bestemd is om metaalmanometers te controleeren, niet dienen.

Toen ik voor het eerst nadacht over het vraagstuk om in het laboratorium te Leiden, waar ik slechts over geringe hoogte kon beschikken, geregeld drukkingen, grooter zelfs dan die welke REGNAULT op den toren van het Collège de France heeft bepaald, te meten met een absoluten manometer, waren mij de te voren genoemde

[1]) Vergelijk zijn belangrijk artikel in de Zeitschrift für Comprimirte Gase. 1897, pg. 8, 25, 82, 101.

verkorte manometers onbekend. Ik heb toen wel de overbrenging van druk door eene vloeistof, die met staal en kwik in aanraking mag blijven, overwogen, doch ik heb mij ten slotte niet van dit hulpmiddel bediend. Den manometer in meer op zich zelf staande partieele manometers, bij welke de druk van den eenen op den volgenden door samengeperst gas wordt overgebracht, te splitsen, schijnt op den eersten blik meer bezwaren op te leveren dan de in beginsel zoo eenvoudige overbrenging van den druk door water. Die bezwaren schenen mij echter, waar men gewoon is met gassen onder hoogen druk te werken, zeer goed te kunnen worden overwonnen. In het bijzonder kan men van de gebruikelijke stalen flesschen, gevuld met gas onder hoogen druk, partij trekken om in de ruimte tusschen de twee opvolgende kwikzuilen steeds nauwkeurig de gewenschte spanning te brengen, door met behulp van fijn te regelen hoogdruk-kranen gas in de koppelbuis der manometers toe te laten.

Door vast te houden aan dit denkbeeld heb ik het reeds zoover kunnen brengen, dat thans in een vertrek van het laboratorium drukkingen tot 60 atmosferen met een toestel, volgens dit beginsel gebouwd en bestaande uit 15 aan elkaar gekoppelde partieele manometers, door één onmiddellijke meting kunnen worden bepaald. Zeven der partieele manometers kunnen, aan elkaar gekoppeld, als differentiaal manometer van 28 atmosferen onder een druk van 100 atmosferen worden gebruikt, zoodat men na den druk van 60 atm. in eens te hebben vastgesteld, van dezen druk uit door een tweede bepaling met een kwikkolom van 28 atm. tot een druk van 88 atm. kan opklimmen, en van 88 atm. uit door een derde bepaling 100 atm. kan bereiken. De bedoelde toestel (in Fig. I afgebeeld) is geconstrueerd met de gewone hulpmiddelen van het laboratorium, is gemakkelijk uit elkaar te nemen, schoon te maken, op lekken te onderzoeken en van lekken te bevrijden en laat een hooge mate van nauwkeurigheid van aflezing toe. Zelfs voldoet hij in het gebruik voor wetenschappelijke waarnemingen beter dan ik had durven verwachten. Het komt mij nu dan ook voor, dat een verkorte manometer bestaande uit een overal even wijde buis, die afwisselend met water en kwik gevuld is, in het gebruik meer last zou opleveren en minder nauwkeurigheid zou toelaten dan deze toestel bestaande uit deelen, die elk op zich zelf hetzij als manometer, hetzij als differentiaal manometer kunnen worden gebruikt, van welke ieder de wijdte heeft overeenkomende met den druk, dien men daarin wenscht te bepalen, en aan welke verdere partieele manometers voor hoogere drukkingen kunnen worden toegevoegd zonder dat men in de reeds aanwezige eenige verandering behoeft te brengen.

§ 2. *De partieele manometers.* Aanvankelijk had ik gedacht buizen van 12 atm. lengte te nemen en deze aan te brengen aan een muur naast eene trap. Bij nadere overweging van verschillende bronnen van fouten bij de waarnemingen bleek het mij echter wenschelijk den geheelen toestel althans tot drukkingen van 60 atm. in eenzelfde vertrek langs den wand (zie fig. I) te schikken. Vlugge aflezing, in vele opzichten gewenscht, was dan slechts mogelijk als de lengte van de enkele buizen werd beperkt tot ruim 3.14 Meter zoodat de kwikhoogte erin 3.04 Meter, overeenkomende met 4 atmosferen, kan bedragen.

Iedere partieele manometer bestaat uit een enkel stuk glaswerk van aan elkaar gesmolten buizen, dat flink gereinigd en gedroogd kan worden. Het kwik, eenmaal in de manometerbuis gebracht, blijft steeds daarin en komt alleen met de zorgvuldig gereinigde glasoppervlakten en met het droge gas, dat den druk uitoefent, in aanraking. Ter plaatse waar een meniscus zal worden ingesteld, is de manometerbuis zoo wijd genomen, als wenschelijk is om de onzekerheid in capillaire depressie voldoende weg te nemen, en anders zoo wijd als de druk, waaraan de partieele manometer weerstand moet kunnen bieden, toelaat. De manometer is aan de beide uiteinden voorzien van geschikte koppelingen, door welke hij met de andere deelen van den toestel in verband kan worden gebracht, en de buizen, waaruit hij bestaat, zijn zoo gebogen, dat deze koppelingen met alle overige dicht bij elkaar beneden aan den toestel bij de kranen kunnen worden samengebracht.

Er is van drie typen van glazen buizen gebruik gemaakt. Van het eerste type wordt een voorbeeld geleverd door de buis *A* in den afgebeelden toestel. Het eene been van de U vormige wijdere buis (12 mm. diameter) heeft de halve lengte van het andere, aan de beide beenen zijn capillaire buizen aangesmolten, die naar beneden zijn omgebogen en tot beneden de U reiken. Dergelijke buizen als *A* kunnen in 't algemeen dienen waar men een geheel verloop van positieven druk van 0 tot 4 atm., (van o tot $m_o'—m_o$) op een zelfde buis wenscht af te lezen.

Men zou een manometer geheel uit buizen van dat type, elk voor r atmosferen kunnen construeeren, bij welke men dan den aanvullingsdruk boven nr atmosferen telkens zou kunnen aflezen op een buis, die tegen nr-atmosferen bestand is, terwijl elk der n voorafgaande buizen op een drukverschil van r atmosferen was ingesteld, maar deze manometer zou, wanneer hij op een hoogen druk is ingesteld, meer samengeperst gas bevatten dan noodig is.

Dit is niet wenschelijk, immers bij onveranderde doorsnede der buizen

150

ter plaatse van de kwikmenisci, en bij onveranderden afstand der laatste zal een temperatuurverandering in het tusschen twee kwikzuilen opgesloten gas een des te sterker verplaatsing der menisci ten gevolge hebben, naarmate het volume van het opgesloten gas grooter is. Men moet er dus naar streven het volume van de met gas gevulde ruimte zooveel mogelijk te beperken. Dit is ook reeds geraden omdat er anders bij de bewerkingen gas verkwist wordt, hetwelk met het oog op het behoud van den toestel en de mogelijkheid om de correcties met juistheid aan te brengen volmaakt droog en zuiver moet zijn; eindelijk omdat de uitwerking van een mogelijke ontploffing van een met gas onder hoogen druk gevulde buis evenredig is aan de hoeveelheid van het daarin samengeperste gas.

Ter besparing in dit opzicht, dient het tweede, tevens veel gemakkelijker dan A te behandelen, type, hetwelk door de buizen B_1, B_2 . . . in den afgebeelden toestel wordt voorgesteld. Deze buizen bestaan uit een wijder boven-reservoir, b, en beneden-reservoir, a, waarin de kwikmenisci worden ingesteld, uit een capillair, g, (zie Fig. 2) langs welke het kwik opstijgt en uit de naar beneden gebogen verbindingscapillairen, f, en h. De diameter der beide reservoirs is die, welke men zou kiezen voor een manometerbuis van het type A, die voor denzelfden druk berekend was en kleiner naarmate de druk, voor welken zij bestemd zijn, grooter is. Zoo zijn de diameters van manometers voor:

Atmosfeer	Binnen diameter	Buiten diameter
12	9 mM.	12.8 mM.
20	8	13.5
32	6,5	13.5
60	6,5	15.5

Ten einde het beneden-reservoir zoo kort mogelijk te kunnen nemen wordt de opstijgingscapillair nauw gekozen, waarbij men er echter op letten moet dat dit van grooten invloed op de beweging van het kwik is en maakt dat de instelling langzamer geschiedt. Daar de wrijvingscoëfficient van het kwik veel grooter is dan die van het gas zou men zonder verdere belangrijke vertraging in de instelling, de capillairen door welke alleen gas stroomt, nauwer kunnen nemen dan die, door welke kwik stroomt. Daar de afmetingen dier capillairen echter geen bezwaar opleveren, en het niet wenschelijk is ze nauwer te nemen dan bepaald noodig is (verg. § 7), zijn voor gas en kwik capillairen van nagenoeg dezelfde doorsnede gebruikt.

De capillaire buizen hebben eene doorsnede van 0.75 mM^2 tot 1.37 mM^2.

De lengte van het boven-reservoir bedraagt 8 cM. Deze lengte laat meer dan voldoende speelruimte bij het instellen van den meniscus, zonder dat de nauwkeurige bepaling van de kwikhoogte schade lijdt. Kleiner mag deze afmeting echter niet zijn, daar er anders te veel gevaar zou ontstaan. dat bij het stijgen van het kwik, dit uit zulk een reservoir zou overstorten, hetgeen ten gevolge zou hebben, dat al de andere manometers tevens zouden gaan overstroomen. De geheele toestel zou dan tijdelijk onbruikbaar worden en zelfs zouden de soldeerplaatsen aan het kranenbord gevaar loopen.

Naar de beschikbare capillairen en de boven-reservoirs is de lengte van de beneden-reservoirs berekend. Er is opgerekend, dat wanneer het reservoir zooveel kwik bevat als noodig is om de geheele capillair en het geheele beneden-reservoir te vullen, boven het kwik nog eene ruimte ter lengte van 4 à 5 cM. overblijft. Was hiervoor niet gezorgd, dan zou, bij mogelijk doorborrelen van gasbellen (bij het afblazen der manometers) allicht kwik kunnen overstorten, hetgeen, gelijk boven gezegd, met zorg moet worden voorkomen.

Een open manometer kan niet enkel bestaan uit buizen van het type B, daar hierin alleen op een bepaald drukverschil (stand van het kwik nagenoeg midden in het boven-reservoir) kan worden ingesteld. Met n van deze buizen, ieder metende een drukverschil van r atmosferen, kan men dus alleen nauwkeurig instellen op nr atmosferen. Er is dus voor instelling op de restdrukking boven nr atmosferen nog eene buis noodig; als zoodanig dient in den afgebeelden toestel de eerste buis, A.

Bij de constructie van verkorte manometers kan verder nog met voordeel gebruik gemaakt worden van buizen van het derde type, C, (zie fig. I). Deze onderscheiden zich van het type A daardoor, dat de beide beenen van de U evenlang zijn, en dus zoowel positieve als negatieve drukverschillen kunnen worden ingesteld, al naarmate men links op r_1 en rechts op r_2 of omgekeerd rechts op r_1 en links op r_2 instelt. Stellen wij ons voor, dat men de buizen A en B_1 tot B_8 bijv. te samen op 35 atm. heeft ingesteld en dat men den druk van 34.8 atm. wil meten, zoo kan men dit, terwijl de instelling in alle vorige buizen onveranderd blijft, bereiken door het kwik in buis C in te stellen op — 0,2 atm. drukverschil. De in fig. I afgebeelde buis, dient om op positieve en negatieve verschillen tot $^1/_2$ atmosfeer in te stellen.

§ 3. *De koppelingen en het kranenbord.* Bij den afgebeelden toestel is de buis A aan het eene uiteinde door een droogbuisje, Q, waarin P_2O_5 is uitgespreid, tegen vocht beschermd, met de buitenlucht in gemeenschap. Hier is dus een caoutchoucbuisje als koppe-

ling voldoende. Aan het andere uiteinde is echter de gewone koppeling, welke men aan de beide uiteinden van alle overige partieele manometers vindt, aangebracht. Aan de dikwandige glazen capillair (zie fig. 4) is, *p*, een stalen capillair *q*, bevestigd, welke laatste een overpijpje *W* met moertje *U* draagt. Dit moertje wordt (zie fig. 1) op den bijbehoorenden tap (aan T_1) van het kranenbord geschroefd; de staalcapillair maakt deze verbinding eene veerkrachtige. De gemeenschap tusschen de verdere manometers wordt eveneens verkregen door de koppelmoeren te schroeven aan de T-stukken, *T*, op het kranenbord. De horizontale armen van de T-stukken vormen de verbinding tusschen de opvolgende manometers, de stalen kranen in de verticale beenen van de T-stukken brengen de ruimte tusschen den benedenmeniscus in den eenen en den bovenmeniscus in den volgenden manometer in gemeenschap met de hoofdvoedingbuis *H*, uit welke, wanneer zij op voldoenden druk gebracht is, gas in die ruimte kan worden toegelaten om op de kwikzuilen den gewenschten druk uit te oefenen.

Deze hoofdvoedingbuis (van roodkoper met hard aangesoldeerde spruiten) wordt door de bronzen kraan *X* langs het stalen kruisstuk *N* gevuld uit een bus met op voldoenden druk samengeperst gas — droge lucht of zuurstof of waterstof, voor lagere drukkingen ook wel droog koolzuur — welk gas nog over P_2O_5 (in de droogbuis *D*) strijkt voor dat het in den toestel treedt. Het kruisstuk *N* brengt den manometer tevens in gemeenschap met de toestellen, in welke men den druk wil meten; als zoodanig is hier een metaalmanometer, *M*, afgebeeld. Van dezen metaalmanometer en van de kraan *Z* wordt ook gebruik gemaakt, om, wanneer bij *Z* verdere toestellen aangesloten zijn, den druk, die daarin heerscht, te meten voor men ze door de kraan *Y* met den open manometer in gemeenschap brengt.

§ 4. *Het instellen op een gegeven druk.* Het toelaten van het samengeperste gas in de verschillende manometerruimten moet met de noodige omzichtigheid geschieden. Overstorten van kwik uit den eenen manometer in den anderen moet in de eerste plaats worden vermeden; reeds boven werd op de onaangename gevolgen van dit overstorten gewezen. In de tweede plaats moet men er op letten, dat wanneer men in een der manometerbuizen bijv. B_2 het kwik doet opstijgen en daartoe, terwijl de kraan K_2 gesloten is, druk toelaat in het benedenreservoir, het gas in de afgesloten ruimte tusschen den bovenmeniscus in B_2 en den benedenmeniscus in den voorafgaanden manometer B_1 wordt samengeperst en dus de benedenmeniscus in B_1 verder naar beneden zal worden gedrukt. Een dergelijke verschuiving herhaalt zich in alle voorafgaande manome-

terbuizen bij het instellen van elke volgende manometerbuis. Wil men dus ten slotte de gewenschte instelling in al de reservoirs verkrijgen dan moet men (omdat niet ook nog elke ruimte tusschen twee manometers met een afzonderlijke kraan voor het aftappen voorzien is, waardoor het aantal kranen en verbindingen noodeloos vergroot zou zijn geworden) beginnen met in elken manometer aanvankelijk het kwik tot minder dan de volle hoogte op te drijven en wel slechts zoover, dat het door de volgende instellingen in de andere buizen van zelf op de volle hoogte wordt gebracht. Die hoogten zijn, om de vulling te vergemakkelijken, door duidelijke merkteekenen aangewezen (in de teekening als x_1, x_2 aangegeven).

Om den toestel op een gegeven druk te brengen, (bijv. als in de teekening op $46\frac{1}{4}$ atmosf.) begint men met na te gaan welk veelvoud van de geheele hoogte van den toestel het naast komt aan dien druk, hoeveel buizen van het type B men dus zal moeten gebruiken, en welken restdruk men in A zal moeten instellen.

Men opent nu alle kranen wijd, behalve K_0, KA en X. Dan laat men voorzichtig gas toe door X totdat het niveauverschil in A het gewenschte bedrag heeft bereikt (in ons geval $2\frac{1}{4}$ atm.). op circa 6 cM. na, waarna men X sluit. In al de andere manometerbuizen stijgt de druk tevens tot hetzelfde bedrag, doch de stand van het kwik blijft daarbij onveranderd. Thans sluit men K_1 en opent voorzichtig X weer zoolang tot het kwik in B_1 tot de merkstreep x_1 is gekomen; sluit K_2 (X is gesloten) en laat door X weer gas toe totdat het kwik in B_2 tot x_2 gestegen is, enz. totdat het kwik in B_{10} tot aan x_{10} staat, sluit X en K_{11} en laat door X weer druk toe totdat in ons geval het kwik in B_{11} juist midden in 't bovenreservoir staat. Dan staan ook in alle vorige manometerbuizen de menisci behoorlijk in de bovenreservoirs.

Men kan een gegeven druk steeds tot op een klein breukdeel van een atmosfeer nauwkeurig instellen.

Mochten er verschillen overblijven of komen tusschen den ingestelden druk en den druk, dien men wenscht te bepalen, zoo kan men met het differentiaalbuisje C, dat in het afgebeelde geval buiten gebruik is, die verschillen opheffen. Men laat in ons geval K_{12} tot K_{15} open, sluit K_{16} en laat door X meer gas toe, doch tapt tegelijkertijd door KA juist zooveel af, dat de menisci in B_{11} op dezelfde plaats blijven, en het gewenschte drukverschil in C is ingesteld. Dan sluit men X en KA.

Om geheel in overeenstemming te blijven met de beginselen van constructie van onzen toestel zou men C buisjes van verschillende doorsneden in voorraad moeten hebben en telkens die buis moeten

aankoppelen, welke met den te meten druk het meest in overeenstemming is.

Uit 't vorige blijkt, dat wanneer men op een druk heeft ingesteld en men tot een anderen wil overgaan, dit 't gemakkelijkst zal geschieden bij 4 atm. tegelijk. Men behoeft om 4 atmosferen te stijgen slechts de laatste buis, hier B_{11} door aftappen met KA te laten teruggaan tot 't merk x_{11} vervolgens KA en K_{12} te sluiten en door X weer gas toe te laten tot de vereischte instelling in B_{12} verkregen is. Om 4 atm. te dalen heeft men juist de omgekeerde bewerking te verrichten, nam. door KA af te tappen totdat het kwik in B_{12} weer beneden is gekomen; dan KA te sluiten en K_{12} te openen en door X weer gas toe te voeren tot het kwik in B_{11} in 't midden van 't bovenreservoir is gekomen.

Wil men tot drukkingen overgaan die een breukdeel van 4 atm. bijv. 2 atmosferen hooger zijn, zoo is eenig meerder overleg noodig; men zal in 't algemeen met alle gesloten kranen moeten werken, omdat bij het hooger instellen van A tevens alle menisci verloopen, doch men kan dikwijls ook wel volstaan met door de eene kraan K_1, A nagenoeg op den gewenschten nieuwen druk te brengen en daarna met het toelaten van den hoogeren druk door X de andere menisci weer op een behoorlijke plaats te brengen, wanneer maar bij de instellingen de speelruimte, die de reservoirs bieden, is beschikbaar gebleven. In geen van deze gevallen levert de instelling moeilijkheden op.

Tot drukkingen, die minder dan 4 atmosferen verschillen, door afdaling over te gaan, is echter iets meer omslachtig. Men zal dan eerst op 4 atmosferen minder moeten instellen en daarna door toevoeging van het overblijvend verschil, wanneer de stand van het kwik in buis A dit nog toelaat, tot den gewenschten druk moeten opklimmen. Laat de stand in de buis A dit niet toe, dan zal men de hoofdbuis moeten laten leegloopen, daarna de manometers afblazen en dan weder opnieuw van den druk 0 tot den gewenschten druk moeten opklimmen. Immers op de buis A kan men alleen met stijgenden druk instellen, daar bij dalenden druk kwik uit het bovenreservoir B_1 zou overstorten.

Wenschte men een toestel bij welken even snel op alle dalende als stijgende drukkingen kan worden ingesteld, dan zou men dezen geheel uit buizen van het type A moeten samenstellen en op de buis, in welke de hoogste druk heerscht, den restdruk boven het veelvoud van 4 atmosferen moeten aflezen. Of wel men zou aan een manometer bestaande uit B buizen ook een differentiaalbuis C van 2 atmosferen of twee, evenals de partieele manometers met een

eigen toevoerkraan gekoppelde, buizen C van 1 atmosfeer moeten toevoegen, van welke buizen dan weder de boven gemaakte opmerking omtrent den diameter geldt, tenzij men zich bij alle drukkingen tevreden wil stellen met het aflezen van twee (of vier) menisci in buizen berekend voor den hoogsten druk.

De standaardmanometer wordt uit den aard der zaak voornamelijk gebruikt om drukkingen, die zorgvuldig langen tijd constant gehouden worden, te bepalen, liefst zelfs door herhaalde aflezingen van eenzelfde instelling. Er bestond dus nog geen aanleiding om van de genoemde hulpmiddelen gebruik te maken.

§ 5. *Aflezing.* De stand der menisci wordt afgelezen op meetstaven L, vervaardigd van koperen buizen, die tusschen de manometerbuizen worden opgehangen in cardanische beugeltjes c_0, c_1...., hetgeen behalve het bevorderen van de nauwkeurigheid der metingen het voordeel heeft, dat de meetstaven zeer gemakkelijk zijn aan te brengen en weg te nemen. De meetstaaf in gebruik bij den manometer van het type A, waarin op verschillende hoogten wordt ingesteld (hier de eerste buis) is over de geheele lengte in mM. verdeeld. De meetstaven in gebruik bij de buizen van het type B zijn gewone koperen buizen op welke alleen aan de beide uiteinden korte verdeelde schaaltjes, α, zijn bevestigd. Er wordt op de menisci in de buizen B, die zich allen op nagenoeg 1 meter of op nagenoeg 4 meter boven den beganen grond bevinden, ingesteld met behulp van twee theodolieten (of waterpaskijkers). Een van deze is geplaatst op een vasten pijler, die zich in het vertrek bevindt, 4 meter vóór den muur, tegen welken de toestel is bevestigd. Verticaal daarboven is op een 3.5 meter hooge tafel, die op denzelfden pijler rust, een tweede theodoliet opgesteld. Naast dit geïsoleerde ophoogstuk of waarnemingstorentje wordt op den gewonen vloer een der in het laboratorium gebruikelijke waarnemingstrappen met platform geplaatst.

Het was zeer omslachtig hier, zooals gewoonlijk geschiedt, de menisci duidelijk zichtbaar te maken door over de buizen, achter welke een achtergrond van wit papier is gebracht, een hulsje van zwart papier te verschuiven, totdat in den kijker gezien de rand van dit hulsje den meniscus bijna aanraakt en de meniscus zwartspiegelend zich tegen den helderen achtergrond afteekent, te meer omdat ter beveiliging van den waarnemer, in 't bijzonder wanneer hij de kranen opent of sluit of naar lekken zoekt en dus met het oog dicht bij den toestel komt, vóór de manometer-reservoirs spiegelplaten P (fig. 1) (gesteund op dragertjes aan balkjes, τ, die tegen de gewone houten bevestigingsstrooken, l, langs den muur zijn geschroefd) zijn geplaatst.

De Heer J. C. SCHALKWIJK, assistent bij het Nat. Laboratorium, wien ik voor de ook verder aan dezen toestel besteede uitnemende zorg mijn hartelijken dank betuig, is op het denkbeeld gekomen achter den meniscus een teekening van zwarte tanden op witten grond aan te brengen (zie fig. 2 en 3), welke op den meniscus gespiegeld wordt. De aansluiting van het spiegelbeeld der tanden op den meniscus aan het directe beeld der tanden veroorlooft scherp te bepalen waar de top van den meniscus zich bevindt. De methode van instelling van den heer SCHALKWIJK zal ook in veel andere gevallen met vrucht kunnen worden aangewend.

De verlichting wordt verkregen door gloeilampjes, welke voor den toestel op geschikte wijze heen en weer getrokken worden.

Om den stand van het kwik in de buis *A* of in het buisje *C* af te lezen, wordt ook wel, wanneer het op de hoogste nauwkeurigheid niet aankomt en dus niet met een verplaatsbaren waterpaskijker behoeft te worden afgelezen, gebruik gemaakt van wijzers, bevestigd aan kokertjes, welke de glazen buis omgeven en daarlangs op- en neergeschoven kunnen worden.

§ 6. *Opmerkingen over het vervaardigen van den manometer.* De toestel is vervaardigd door den Heer G. J. FLIM, chef van een der instrumentmakerswerkplaatsen van het Laboratorium, wiens bekwame hulp daarbij van groote waarde was. Ofschoon de enkele manometerbuizen stukken van groote afmeting zijn, bleek de vervaardiging en het hanteeren, voornamelijk van het type *B*, geen bijzondere moeielijkheden op te leveren. Het behoeft echter nauwelijks gezegd te worden, dat elke bewerking met de uiterste zorg en met veel overleg moet geschieden, wanneer een zoo samengesteld toestel als de voltooide manometer ten slotte geen enkel lekje of ander gebrek zal vertoonen. Voor dengene, die zulk een toestel wenscht op te bouwen, kunnen de volgende opmerkingen misschien waarde hebben. Om een buis van het type *B* te vervaardigen, werden de afzonderlijke geblazen reservoirs met korte einden capillaire buis (± 15 cm.), in den juisten vorm gebogen, (zie fig. 2), met de verdere deelen, aan katrolletjes opgehangen of op steltafels geplaatst, bijeengebracht, met geschikte caoutchouc-buisjes, om in te kunnen blazen, voorzien en met de handblaasvlam (gevoed door een waterblaaspompje) aaneengesmolten. Op deze wijze kan men buizen, die tot een willekeurige hoogte reiken, aaneensmelten. Daar de manometerbuis van het type *B* voornamelijk uit capillaire buizen bestaat, vormt zij een zeer elastisch geheel. Zij wordt tusschen kurk met klampjes op een losse hulpplank gemonteerd, en schoongemaakt, uitgekookt en gedroogd met dezelfde voorzorgen als het thermometerglaswerk beschreven in Zittingsversl. 30 Mei '96, pag. 40.

Bij het uitkoken wordt de buis met de hulpplank in een hellenden stand geplaatst, geheel gevuld met de beide beenen in bakjes gedompeld, en met een BUNSEN-vlam over de geheele lengte regelmatig verwarmd. Na het drogen worden de uiteinden voorzien met de vooraf gereedgemaakte stalen dopjes, *p*, waaraan aan staalcapillairen (die evenals de thermometercapillairen Zittingsverslag van 30 Mei '96, p. 41 behandeld zijn), de overpijpjes *W* bevestigd zijn (fig. 4). De staalcapillair (verg. Zittingsversl. Dec. '94, p. 168) (35 cm. lang) is als l. c. p. met marinelijm in het dopje en in het overpijpje geschroefd, en daarna is de verbindingsplaats gesoldeerd met tin ten einde de zachte marinelijm met de noodige stevigheid op te sluiten, terwijl de soldeernaad tegen inwerking van kwik blijft beveiligd.

De bevestiging van de stalen dopjes aan de aan het uiteinde verwijde glazen capillairen vereischt bijzondere zorg (verg. het inkitten van de thermometer-capillair, Zittingsversl. 30 Mei, 1896 p. 41). Zij geschiedt even als toen met rood zegellak, dat beter bleek te voldoen dan verschillende andere, sedert dien tijd opzettelijk voor dit doel onderzochte, mengsels. Behalve op het l. c. vermelde moest er op gelet worden dat het lak niet met het capillaire staalbuisje in aanraking komt, voor alle lucht ontweken is, daar anders de weg voor de lucht versperd wordt, tengevolge waarvan de sluiting gebrekkig zou zijn. Met het opschuiven van het dopje en tegelijkertijd zacht verwarmen werd evenals bij het inkitten van het volumanometer-dopje (l.c.p.) voortgegaan totdat de lak tusschen het capillaire staalbuisje en de glaswand zichtbaar werd. Op de beschreven wijze gelukte het wel alle verbindingen volkomen sluitend te maken, doch juist bij de koppeling tusschen de glascapillair en de staalcapillair ontstonden licht gebreken en voor de bruikbaarheid van dezen manometer is de vertrouwbaarheid van deze verbinding van zoo groot belang, dat nog beproefd wordt of een betere kan worden verkregen. De manometerbuis is na het aanbrengen der koppelingen gereed om te worden geperst, teneinde op lekken te worden onderzocht.

Om de manometerbuis vervolgens met kwik te vullen wordt op het stalen capillair eind, dat door het overpijpje heensteekt een dunwandig glazen capillairtje gekit, waarvan de punt is dichtgesmolten, de manometer aan de kwikpomp luchtledig gepompt, en de punt onder kwik afgebroken. Door lucht toe te laten kan men dan zooveel kwik uitdrijven als wenschelijk is.

Elke manometerbuis wordt op een afzonderlijke plank β_1 met 4 klampjes *k*, (zie fig. 5) tusschen kurk vastgeklemd en deze tegen de plank, β_2, die door eene bevestigingsstrook, *l*, aan den muur is verbonden, geschroefd.

Wat de T-stukken van het kranenbord betreft deze zijn van staal gesmeed en daarna doorboord. Ook de hoogdrukkranen (het gewone Leidsche model) zijn geheel van staal vervaardigd teneinde bestand te zijn tegen kwik, dat onverhoopt in de horizontale verbindingskanalen der T-stukken mocht geraken; zij zijn boven deze verbindingskanalen geplaatst, opdat zij voor het kwik moeilijker te bereiken zijn. De voetplaten er van zijn met houtschroefjes op het kranenbord bevestigd. De verbinding van de kranen met de stalen T-stukken is weder door met marinelijm bevestigd soldeerwerk verkregen; al deze deelen bleken, evenals de koppeling door moeren en tappen, volkomen vertrouwbaar. Zijn de manometerbuizen aangekoppeld, dan wordt de geheele toestel door de kraan K_0 luchtledig gepompt, (waarbij tevens de linkerzijde van A aan de luchtpomp gekoppeld wordt) en vervolgens met het gas uit de persbus gevuld.

Bevinden zich dan nog lekken in den toestel, zoo openbaren deze zich wanneer de manometer op druk is gebracht door de beweging der kwikzuilen. Men spoort ze nader op door met een penseel met zeepwater of olie langs de verdachte naden te gaan, en kan ze in den regel verhelpen zonder een der particele manometers van den toestel af te nemen, (wat trouwens niet de minste moeite oplevert), dank zij de veerkracht van de glazen capillairen, de buigzaamheid van de staalcapillairen, de bewegelijkheid der planken en de geschikte plaatsing der koppelingen.

§ 7. *Correcties.* Bij de berekening van den druk uit de afgelezen kwikhoogte moeten de gewone correcties voor open manometers worden aangebracht.

Ik behoef hier verder niet uit te wijden over de geheel bekende en kleine correcties, welke de theodoliet-aflezingen (zie § 5) kunnen vorderen, omdat bij de hier gevolgde wijze van aflezing de kijker niet zuiver waterpas staat; alleen wil ik er op wijzen, dat de correctie voor de capillariteit zou kunnen worden aangebracht door de pijl van den meniscus met den afleeskijker te bepalen. Over die correctie is echter nog geen genoegzame ervaring verkregen en tot nog toe werd beproefd de beide menisci in eenzelfde buis door kloppen zooveel mogelijk gelijk te maken.

Er zijn twee correcties, welke uit de eigenaardige inrichting van den toestel voortvloeien, en bij deze meen ik een oogenblik stil te moeten staan.

De eerste is die voor het verschil van druk in het samengeperste gas bij den benedenmeniscus van de eene en den bovenmeniscus van de volgende manometerbuis. Wil men de correctie zeer gering maken, zoo kan men voor den drukaanvoer samenge-

perste waterstof gebruiken, voor zeer hooge drukking kan dit voordeel hebben, bij 60 atm. of 45600 mM. bedraagt de correctie voor alle waterstofzuilen samen nog slechts ongeveer 9 mM., bij 100 atm. of 76000 mM. slechts ongeveer 21 mM. zoodat de metingen, waarbij deze correctie moet worden aangebracht zeer nauwkeurige moeten zijn. Doch daar een geringe verontreiniging der waterstof op de correctie van grooten invloed is, zal dit gas wel alleen worden toegepast, wanneer men als in Leiden beschikt over een compressiepomp (Zittingsversl. Dec. '94, p. 168), met behulp waarvan men het weder samenpersen kan zonder dat het verontreinigd wordt. Samengeperste lucht geeft bij 60 atmosferen ongeveer 120 mM. eene correctie, die nog met volkomen zekerheid kan worden aangebracht. Bij lagere drukkingen kan men gebruik maken van het koolzuur uit de bussen, die in den handel voorkomen, wanneer men maar zorgt dat het goed gedroogd wordt. Bij eene vergelijking bij 48,6 atm. ongeveer werd op den manometer, na het aanbrengen van alle correcties, behalve die voor de verbindingsbuizen tusschen de partieele manometers, eene kwikhoogte afgelezen van 36943,3 mM. De correctie voor de koolzuurzuilen bedroeg slechts — 144,8.

Men heeft, wanneer de correctie voor de zuilen samengeperst gas in den manometer is aangebracht, nog in aanmerking te nemen de zuil van het gas, begrepen tusschen het niveau van den laatsten meniscus van den manometer en het niveau van de plaats, op welke men in de toestellen den druk meten wil. De zooeven aangehaalde bepaling had betrekking op den druk in toestellen, welke zich in een verwijderd vertrek bevonden; deze waren met den manometer verbonden door eene 40 Meter lange geleiding, gevuld met koolzuur; het niveauverschil bedroeg 0,65 Meter en de correctie was + 6,2 mM.

Een tweede correctie, die aan dezen toestel eigen is, moet worden aangebracht, wanneer het kwik in de manometerbuizen niet volkomen stil staat, daar zelfs een zeer langzame beweging ervan door de nauwe buizen een meetbaren druk vordert. Wordt eene snelheid van 0,1 mM. per minuut bij de menisci in een der partieele manometers waargenomen, zoo komt dit overeen met een overdruk en met eene correctie van ongeveer 0,1 mM. Voor het stroomen van het gas zou deze correctie onzeker zijn, daar gas overstroomen kan, zonder dat dit aan de beweging der menisci te bemerken is. De wegen, langs welke het gas van den eenen manometer naar den anderen stroomt mogen dus niet te nauw zijn. De diameter der staalcapillairen is 0,6 mM. Zij dragen tot de wrijving niet veel meer bij dan de glazen capillairen en deze zijn betrekkelijk wijd genomen (verg. § 2), zoodat,

wanneer de toestel in goede orde is, op de beweging van het gas niet behoeft te worden gelet.

Gewoonlijk geschiedt het vullen der buizen langzaam en verloopt er 4 à 5 minuten over het vullen van elke buis. Het evenwicht is dan bij het sluiten der kranen telkens vrijwel bereikt. Moest echter toch nog een kleinen overdruk worden aangebracht, dan bleek, zelfs in de meest verwijderde buis, het kwik reeds spoedig tot stilstand te komen. Na de instelling wordt in den regel 10 minuten gewacht om te constateeren, dat er geen verdere verandering plaats grijpt. Gedurende dien tijd kunnen verschillende aflezingen worden voorbereid of verricht, o.a. die van het 8-tal thermometers, welke de temperatuur aangeven.

Daar de temperatuur bij de waarnemingen zooveel mogelijk standvastig gehouden wordt, en de reservoirs (verg. § 2) zoo kort mogelijk zijn genomen, is ook de beweging van de menisci van de kwikzuilen door temperatuursverandering van het gas, wanneer eenmaal is ingesteld, zeer gering.

Aardkunde. — De Heer Martin doet mededeeling van de volgende door hem ontvangen circulaire van het Bureau van het „Congrès géologique international" dat in 1897 in Rusland is gehouden en waarheen hij was afgevaardigd.

CONGRÈS GÉOLOGIQUE INTERNATIONAL.

7-me session. Russie 1897.

A Monsieur le Professeur
K. Martin.

Monsieur,

Lors de la VII session du Congrès Géologique International qui s'est tenue à St. Pétersbourg au mois d'août 1897, un groupe de géologues de divers pays soumit à la délibération de l'Assemblée la proposition suivante relative à la création d'un **Institut flottant international:**

„Les formations marines jouent le rôle principal dans la stratigraphie et la connaissance de leur origine est tout à fait indispensable pour le géologue; ce n'est que l'étude approfondie des mers actuelles qui peut nous donner une base pour juger des modes de formation des sédiments et de la répartition des organismes dans les mers des périodes anciennes.

Les résultats obtenus sous ce rapport, surtout par les célèbres expéditions océaniques du Challenger, sont de la plus haute importance.

Mais ces expéditions furent isolées et temporaires. Un nombre très restreint de géologues ont eu l'occasion de jeter un coup d'oeil sur le fond des océans. Il semble indispensable pour les progrès de la géologie en général et pour l'éducation du géologue, que celui-ci soit mis en position d'étudier personnellement la biologie, la physique et l'histoire naturelle des mers.

Un Institut flottant international entretenu par tous les gouvernements pourrait rendre ce service à la Science.

Les soussignés demandent au Congrès de sanctionner ce voeu et de prier tous les gouvernements d'accorder les sommes nécessaires à la création et à l'entretien de cet Institut."

(Signatures)

Le Congrès approuva unanimement le projet et résolut de charger le Bureau du Congrès de le faire parvenir aux Institutions scientifiques supérieures des divers pays avec prière de faire les démarches nécessaires auprès de leur gouvernement respectif pour en assurer la réalisation prochaine.

En vous communiquant que le projet de la création d'un Institut flottant international a été accueilli favorablement par l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg qui a pris sur elle d'intervenir devant le gouvernement russe en faveur de l'entreprise, nous avons l'honneur, Monsieur, de vous prier de bien vouloir soutenir la proposition du Congrès auprès de l'Académie d'Amsterdam.

D'après les données dont le Bureau dispose, les dépenses d'installation d'un Institut flottant international s'élèveraient approximativement à 200,000—300,000 roubles et l'entretien annuel de l'Institut et du personnel éxigerait de 100,000 á 150,000 roubles.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de notre considération la plus distinguée.

Au nom du Bureau:

Le président: A. Karpinsky.
Les secrétaires: Th. Tschernyschew.
C. de Vogdt.

St. Pétersbourg, le 15/27 Septembre 1898.

De Heer MARTIN beveelt het plan in de belangstelling der Akademie aan en vraagt, te willen onderzoeken, of geldmiddelen hiervoor beschikbaar kunnen gesteld worden.

De Voorzitter belooft dat het Bestuur der Akademie deze zaak in overweging zal nemen.

Dierkunde — De Heer HOEK doet eene mededeeling namens den Heer Dr. M. C. DEKHUYZEN te Leiden, getiteld: *„Bekervormige roode bloedlichaampjes (chromokrateeren).*

De roode bloedlichaampjes van de *prik* (Petromyzon fluviatilis), levend onderzocht of gefixeerd, blijken een merkwaardige gedaante te bezitten, die aan de onderzoekers ontgaan is. Het zijn *klok-* of *bekervormige* cellen. Haar lichaam omvat een vrij diepe holte, die *„orale indeuking"* moge genoemd worden. De vrij wijde opening is *rond*, kan echter, bij de gemakkelijk van vorm veranderende cellen, spleetvormig of meer driehoekig worden. Iets *bezijden* de tegenover den mond gelegen aborale pool is nog een tweede, veel minder duidelijke *„aborale indeuking"*. Boven op een der polen gezien is de cel ietwat ovaal, bijna rond. Geen wonder dat een dergelijke gedaante niet herkend wordt, wanneer men het bloed in een dun laagje uitspreidt, het laat indrogen en dan fixeert. Er is nauwelijks een object denkbaar, beter geschikt om de bezwaren duidelijk te maken, die tegen de gebruikelijke indroogmethoden voor het onderzoek van het bloed moeten ingebracht worden.

Eigenlijke amoeboïde eigenschappen ontbreken, wèl herinneren sommige beschadigde cellen aan de *doorn-appelvormen* der roode bloedlichaampjes van zoogdieren en amphibiën.

De kern is ellipsoïde. Zij ligt in de nabijheid der aborale indeuking en schijnt hier met de grenslaag van het cellichaam in *samenhang* te zijn en wel vermoedelijk door bemiddeling van het *microcentrum* (de centrosomengroep). De intrekking is soms vrij spits toeloopend. Ook de bodem van de diepe orale indeuking schijnt in een, zij het dan ook veel losser, verband te staan met de kern. Onder den invloed van schadelijke momenten kan: òf de mond verstrijken en de cel bolvormig worden, òf wel de bodem der orale indeuking naar buiten worden gestulpt als een zak, die te binnenste buiten gekeerd wordt, zoodat een (heldere) blaas uit den mondring te voorschijn treedt, *òf wel kan de kern uit de mondopening worden uitgeworpen*. Aan preparaten, waar de grenslaag van het cellichaam zich als een scherp begrensd *vliesje* voordoet, is rondom den mond een ring zicht-

baar: de „orale ring". Rondom de aborale indeuking wordt in zulke preparaten ook wel — maar minder frequent — een „aborale ring" waargenomen. Welke periphere, orale en aborale *differentiaties*, *in de levende cel gepraeformeerd*, aan deze beelden ten grondslag liggen, is voorshands niet te zeggen.

Deze cellen mogen „*chromokrateeren*" genoemd worden, een woord, naar analogie van het in de zoölogie gebruikelijke chromo*cyt*, afgeleid van κρατήρ, beker. De wenschelijkheid, deze nieuwe benaming voor te stellen, vindt haar grond in de omstandigheid, dat de chromokrateere gebleken is te zijn een onder ver uiteenliggende diergroepen verspreid rood bloedlichaampje, voor de phylogenie van beteekenis en voor de zoogdieren een erfstuk van hoogen ouderdom.

De gewone roode bloedlichaampjes der zoogdieren (rat, cavia, konijn) *doorloopen een stadium, waarin zij kernhoudende chromokrateeren zijn* en wel als *rijpe* erythroblasten of *normoblasten*, *wanneer de kern reeds pyknotisch gedegenereerd is*, *welke cellen haar kern uitstooten door de orale indeuking.* Zij worden dan tot *bekervormige* jonge erythrocytoden (reeds aan Rindfleisch [1]) en Howell [2]) bekend): *kernlooze* chromokrateeren met diepe orale en minder diepe aborale indeuking. Ook bij de volwassen roode bloedlichaampjes van den *mensch* (vingertop) kan men aantoonen *dat de beide indeukingen van het biconcave schijfje niet gelijk zijn.* Hun chromokrateeren-natuur is zichtbaar te maken door fixatie van het uittredende bloed in osmiumzuur (volgens een waarneming van den Heer H. W. Blöte).

Geenszins zij beweerd dat *alle* kernen door *uitstooting* verwijderd worden, er schijnt geen reden om de door betrouwbare schrijvers geconstateerde gevallen, waarin de kern door intracellulaire degeneratie te gronde ging, te betwijfelen. In het versch gefixeerde dijbeenmerg van een hoogzwangere cavia werd in bijna alle leukocyten naast de polymorphe kern een rond lichaampje waargenomen, dat in alle opzichten met de pyknotische kern der rijpe normoblasten overeenstemde. Trouwens de reeds door Rindfleisch afgebeelde kernuitstooting is gemakkelijk waar te nemen b.v. in het dijbeenmerg van konijntjes van 3 weken oud.

Nu werden chromokrateeren, waarvan de vorm volkomen overeenstemt met de voor de prik beschrevene, ook waargenomen bij *Phoxichilidium femoratum*, een in de haven het Nieuwediep veelvuldig

---

1) Rindfleisch, Ueb. Knochenmark und Blutbildung. Archiv f. Mikrosk. Anatomie XVII. 1880.

2) Howell, The life history of the formed elements of the blood, especially the red bloodcorpuscles, Journal of Morphology. IV. 1890

voorkomende *Pycnogonide.* Juist ook dat typische ondiepe, somtijds spits toeloopende, naar de nabijgelegen kern wijzende uiterlijk van de aborale indeuking. *Ook werd kernuitstooting door de orale opening van een ietwat beschadigde cel waargenomen.*

Persoonlijk werden chromokrateeren alleen bij zoogdieren, prikken en de zooeven genoemde soort van Pycnogonide waargenomen. In de literatuur komen nu beschrijvingen en afbeeldingen van verschillende schrijvers voor, wier opgaven vooralsnog niet te controleeren waren wegens de moeilijkheid het somtijds zeldzame materiaal levend te krijgen. De schrijvers merken min of meer ter loops op, en met verwondering, zonder van elkander af te weten, dat zij bloedcellen gezien hebben, die bekervormig waren!

Dohrn zegt in zijn *Monographie der Pantopoden* des Golfes van Neapel etc. dat hij bij bijna alle Pycnogoniden in het bloed cellen heeft waargenomen, die hij „Ballons" noemde. „Sieht man sie im Blut circuliren, so erscheinen sie gefaltet, wie ovale Ballons aus Seidenpapier, die nicht mit Luft voll erfüllt sind."

Griesbach [1]) heeft de haemoglobinehoudende cellen van Pectunculus glycimeris afgebeeld, een Lamellibranche Mollusk. „Sie sehen mützenförmig aus, sie lassen sich vergleichen mit einem eingedrückten Gummiball, sie ähneln dem Hut eines Pilzes und durch die eingedrückte Stelle sieht man deutlich den Kern hindurchschimmern." Uit de afbeelding meen ik te mogen besluiten, dat wij hier bijna niet met iets anders als met chromokrateeren te doen kunnen hebben, althans met cellen, die een groot aantal eigenschappen met de beschrevene gemeen hebben.

Verder heeft Eisig in zijn *Monographie der Capitelliden* bij Chaetopode *Wormen* (Notomastus) althans *schotel*vormige roode bloedcellen afgebeeld. De figuren en mededeelingen van Cuénot [2]) betreffende Cucumaria Planci (een *Echinoderm*) en van Sipunculus en Phascalosoma (*Gephyreen*) mogen niet onvermeld blijven.

Dat eenzelfde, zeer karakteristieke celsoort, van een vorm, waarvan de *doelmatigheid* minstens zeer twijfelachtig, de beteekenis raadselachtig is (tenzij de bekervormige bloedcellen der Gephyreen chromokrateeren mochten zijn), voorkomt bij zóó uiteenliggende diergroepen als Pycnogoniden, Petromyzonten, Mollusken (misschien) en zoogdieren, wettigt, naar het mij voorkomt, het besluit *dat de chromokrateere is een erfstuk van de gemeenschappelijke voorvaderen der*

---

[1]) Griesbach, Beiträge zur Histologie des Blutes. Arch. f. Mikroskop. Anatomie. XXXVII. 1891.

[2]) Cuénot, Etudes sur le sang etc. Arch. d. Zool. expérimentale et générale. IX. 1891.

genoemde diergroepen, dat is van de wormen. Bij de ontogenese van het roode bloedlichaampje der zoogdieren treedt de voorvaderlijke bekervormige kernhoudende bloedcel als een kortstondig stadium weder te voorschijn.

Het onderzoek werd verricht aan het Physiologisch Laboratorium te Leiden en in het zoölogisch Station te Helder.

De aandacht op de prik werd gevestigd door de mededeelingen van GIGLIO TOS [1]).

Sterrenkunde. — De Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, getiteld: *„Eenige opmerkingen omtrent de 14-maandelijksche beweging der aardpool en over de lengte harer periode".*

1. In het onlangs verschenen N°. 446 van het *Astronomical Journal* wordt door Dr. CHANDLER wederom eene verhandeling gegeven over de beweging der aardpool. Hij behandelt daarin de waarnemingen in de jaren 1890 tot 1898 verricht, en gebruikt de oudere reeksen om opnieuw de lengte der 14-maandelijksche periode te onderzoeken. Omtrent dit laatste punt bestrijdt hij dan de meeningen vroeger door H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN en nu laatstelijk door mij (*Verslag Akad. Amsterdam.* 1898 *Juni*) geuit. Aan laatstgenoemd opstel wordt nog eene noot gewijd, welke aldus luidt:

„The memoir last referred to did not arrive until the present „article was written, but I interpolate this statement with regard „to it in order to enable astronomers to decide as to the justness „of the views therin set forth. Both of the gentlemen of the Leiden „observatory strenuously maintain that the mean period is more than „431 days, and that it is invariable. The formula V (d. i. de door „mij gegeven uitkomst) is deduced by a peculiar and arbitrary treat„ment of the results of observation, its initial epoch being based on „the Leyden observations alone, on the alleged ground that its errors „are far smaller than those of all other series which are rejected. „I must however deny the propriety of assigning a weight of zero, „relative to Leyden, to the extensive and precise series at Pulkowa „between 1863 and 1882 with the Vertical Circle and Prime Ver„tical Transit."

---

[1]) E. GIGLIO TOS, Sulle cellule del sangue della lampreda. Acad. reale delle scienze di Torino. 1896.

Het zij mij nu vergund aan deze opmerkingen van Dr. CHANDLER ook mijnerzijds eenige toe te voegen. Tevens grijp ik de gelegenheid aan om het vraagstuk van de lengte der 14-maandelijksche periode nog iets nader te beschouwen, waarbij tevens van zelf de uitkomsten ter spraak zullen komen, waartoe CHANDLER omtrent dit punt in zijn laatste opstel meent te moeten geraken.

2. In de eerste plaats bespreek ik de bedenkingen, welke CHANDLER tegen mijne behandelingswijze in het midden brengt en erken daarbij dadelijk dat het niet gebruiken der uitkomsten, te Pulkowa in de jaren 1865 tot 1882 verkregen, eene ernstige tekortkoming mijnerzijds zou wezen, wanneer ik er naar getracht had de waarnemingen vóór 1890 zelfstandig in mijn onderzoek op te nemen. Dit was echter geenszins het geval. Ik wilde alleen die uit het tijdvak 1890 tot 1897 aan eene discussie onderwerpen, doch, daar uit deze op zich zelven de lengte der 14-maandelijksche periode natuurlijk slechts met geringe nauwkeurigheid af te leiden viel, nam ik mijne toevlucht tot de uitkomsten vroeger door H. G. v. D. SANDE BAKHUYZEN afgeleid en saamgesteld. Ik meende die echter niet allen te mogen gebruiken, maar in de eerste plaats, om redenen die hieronder nader ter sprake komen, de waarnemingen vóór 1860 te moeten ter zijde laten, en ten slotte scheen het mij het best, voor het afleiden eener *voorloopige* uitkomst, van de waarnemingen tusschen 1860 en 1880 alleen de Leidsche te doen meestemmen. Ik ging daartoe over, daar laatstgenoemde veel geringere middelbare fouten bleken te bezitten dan alle andere gelijktijdige, *voor zooverre zij door* H. G. v. D. S. BAKHUYZEN *bewerkt waren*, terwijl het tevens bleek dat de Leidsche uitkomsten ongeveer midden tusschen de andere in lagen, zoodat het meenemen van deze de einduitkomst niet aanmerkelijk zou kunnen wijzigen.

Misschien had ik nu het geheel voorloopige karakter mijner uitkomst voor de periodelengte nog iets duidelijker kunnen aangeven; ik meende echter dat mijne bedoeling reeds voldoende bleek. Zeker geloof ik, de mij onder deze omstandigheden geboden voorzichtigheid bij het formuleeren mijner uitkomst niet uit het oog te hebben verloren. Zoo geef ik, na mijne uitkomst van 431.11 dagen, ook die welke zou volgen, wanneer men de gemiddelde epoche door H. G. v. D. S. BAKHUYZEN gevonden met de mijne verbond, nl. 430.36, terwijl ik ten slotte opmerk, dat gedurende de laatste 35 jaren de periodelengte *niet aanmerkelijk van* 431 *dagen kan hebben verschild*, en *eene zoo sterke veranderlijkheid*, *als* CHANDLER *aanneemt*, reeds nu door de waarnemingen wordt weersproken. Ik geloof dus te mogen

zeggen, dat de woorden van Dr. CHANDLER „strenuously maintain „that the mean period is more than 431 days, and that it is in„variable" het door mij ingenomen standpunt zeer onnauwkeurig weergeven [1]).

Dit moge volstaan om CHANDLER's opmerkingen over de door mij gevolgde handelwijze te beantwoorden; op zijne zakelijke aanmerkingen kom ik later van zelf terug.

3. Alvorens de uitkomsten te bespreken, welke mijne latere berekeningen omtrent de periodelengte hebben opgeleverd, wil ik een overzicht geven van de resultaten hieromtrent, waartoe CHANDLER in 1894 (Astr. Journ. N°. 322) was gekomen en van die welke hij nu laatstelijk heeft afgeleid.

Zijne formule van 1894 gaf voor de *Minimum-epochen* in de 14-maandelijksche beweging:

$$\left.\begin{aligned} T &= 2402327^{d} + 428^{d}.6\, E + 55^{d}\, \sin\, \Psi \\ \text{waarin}\quad \Psi &= (t - 1865.25)\,.\,5^{\circ}.48 = E \times 6^{\circ}.43 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dit laatste met voldoende benadering.

Daaruit volgt als periodelengte, osculeerend voor de epoche E:

$$P = 428^{d}.6 + 6^{d}.2\, \cos\, (E \times 6^{\circ}.43) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De periodelengte kan dus varieeren van $434^{d}.8$ tot $422^{d}.4$, en de cyclus dezer verandering omvat 56 perioden of 66 jaren. De maximumduur zou bereikt zijn in 1865, de minimumduur nu in 1898 plaats vinden.

In zijne laatste verhandeling gaat CHANDLER van deze formule uit, en hij toetst die aan de waarnemingen van 1890 tot 1897. Hij gebruikt daartoe niet de x en y van ALBRECHT, maar door hem zelven afgeleide waarden, welke intusschen in algemeen beloop met eerstgenoemde overeenstemmen. De periodelengte, waarvan wordt uitgegaan, bedraagt dus ongeveer 423 dagen en uit de waarnemingen wordt daarvoor nu eene verbetering van + 5 d. gevonden, welke intusschen, naar CHANDLER opmerkt, geheel onzeker zou zijn, daar het niet vaststaat dat de lengte der jaarlijksche periode *juist* een jaar bedraagt. Intusschen wordt iets later, nevens de voor de gemiddelde epoche gevonden verbetering van + 8 dagen, eene van

[1]) Evenmin zijn zijne woorden juist, waar zij H. G. v. D. S. BAKHUYZEN betreffen. Zie o.a. Astr. Nachr. N°. 3275, pg. 163 bovenaan.

+ 4 dagen voor de periodelengte aangenomen en, daar het CHANDLER bewezen toeschijnt dat de periodelengte veranderlijk is, voegt hij daarvoor aan de formule voor de epochen een kwadratische term toe.

Die formule wordt dan:

$$T = 2412646^d + 427^d.0\,E - 0^d.08\,E^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarbij de uitgangsepoche 24 perioden later gesteld is dan bij de vorige formule.

Deze formule aan de oudere waarnemingen toetsende, bleek zij aan die sedert 1835 redelijk goed te voldoen, maar in het geheel niet aan die van POND, welke voor de epoche eene afwijking van 166 dagen overlaten. Hoewel nu vroeger door CHANDLER aan de uitkomst van POND's waarnemingen veel gewicht gehecht werd, schijnt het toch dat hij de elementen van formule (3) als de „revised elements" beschouwd wil zien, die hij wenschte te bepalen. Alleen rijst hieromtrent weder twijfel, als men onder de „conclusions", die in een ander deel der verhandeling (pg. 107) uit „substantially all the competent testimony available" getrokken worden, vindt: (*b*) „that the mean period since 1825 is 428 days within a small fraction of a day", terwijl toch formule (3) ons voor deze grootheid $431^d.6$ geeft en (*d*) dat eene verandering der periodelengte eenparig met den tijd onbestaanbaar is met de waarnemingen vóór 1860, terwijl in conclusion (*e*) eene verandering per saltum tusschen 1830 en 1860 evenzeer onbestaanbaar met de feiten genoemd wordt. Hoe dit echter zij, in het volgende zal ik formule (3) als CHANDLER 1898 aanduiden.

De verschillen tusschen de epochen naar deze formule en naar die van 1894 berekend zijn tusschen 1870 en 1894 vrij klein, maar groeien daarbuiten snel aan. Zoo vindt men voor CH 98—CH 94 in 1830 — 126 d., in 1860 + 38 d., in 1898 + 25 d. en in 1900 + 32 d.

4. In de eerste plaats heb ik nader onderzocht, wat de waarnemingen van 1890—97 ons reeds op zich zelven omtrent de lengte der 14-maandelijksche periode leeren kunnen. In mijne vorige mededeeling onderzocht ik nog de x der drie laatste jaren alleen; thans deed ik hetzelfde voor de 3 eerste jaren en handelde daarna op gelijke wijze met de y.

Zoo verkreeg ik de navolgende uitkomsten voor de gemiddelde maximum-epochen, waaraan ik die voor het geheele tijdvak 1890—96 toevoeg.

	Waarn.	W—E. B.	W—Ch.94	W—Ch.98
x				
1890—1896	2412439	—6	+ 13	+ 6
1890—1892	2412006	—7	+ 3	0
1894—1896	3413300	—7	+ 28	+ 13
y				
1890—1896	2412438	—7	+ 12	+ 5
1890—1892	2412007	—6	+ 4	+ 1
1894—1896	2413298	—9	+ 26	+ 11

Leidt men dan uit de partieele uitkomsten, welke 3 perioden uit elkander liggen, de periodelengte af, dan vindt men:

uit de x 431^d.3
„ „ y 430 .3

De verrassende overeenstemming met de resultaten uit groote tusschentijden verkregen, moest wel als gedeeltelijk toevallig beschouwd worden. Teneinde nu nader te onderzoeken welke nauwkeurigheid hier te bereiken valt, ben ik weder teruggegaan tot de oorspronkelijke waarden voor de coördinaten x en y, zooals zij door Albrecht afgeleid zijn. In mijne voorgaande mededeeling gaf ik op pag. (53) 12 eene vergelijking dezer waarden met de volgens mijne formule berekende. Op geheel dezelfde wijze voerde ik nu vergelijkingen uit met formules, waarin achtereenvolgens als lengte der 14-maandelijksche periode 423 en 428 dagen aangenomen was, maar die overigens, ook wat de gemiddelde epoche dier beweging (welke niet ver van 1893.0 valt) betreft, met de bij de vroegere vergelijking gebruikte overeenstemden. Deze periodelengten waren ontleend aan de beide formules van Chandler.

Ik zal deze vergelijkingen zelven hier niet mededeelen, maar geef alleen de gevonden sommen van de kwadraten der afwijkingen en de middelbare waarden dezer laatste, waarbij ik ook de vroeger voor periodelengte 431^d gevonden waarden herhaal:

Periode	$\Sigma \Delta x^2$	M. afw.	$\Sigma \Delta y^2$	M. afw.
431	1207	± 0''.040	1582	± 0''.046
428	1322	± 0 .042	1651	± 0 .047
423	1699	± 0 .047	2083	± 0 .052
„	1708	± 0 .047	1976	± 0 .051

Men ziet dat eene 428-daagsche periode aan de oorspronkelijke waarnemingen nagenoeg even goed voldoet als een 431-daagsche. Daarentegen laat een 423-daagsche aanmerkelijk grootere fouten over, die slechts weinig verkleind worden, wanneer men nu ook nog de jaarlijksche beweging opnieuw gaat afleiden, zooals de in de laatste plaats opgegeven getallen aantoonen.

Onze uitkomst is dus, dat de waarnemingen van 1890—97 reeds op zich zelven eene 423-daagsche periode onwaarschijnlijk maken, maar veel verder dan dat kan men ook niet gaan.

5. In de tweede plaats ben ik weder tot het gebruik maken van oudere waarnemingsreeksen overgegaan, doch alvorens dit onderzoek te bespreken, wil ik voorop stellen dat het ook nu geenerlei aanspraak maakt op volledigheid. Ik heb slechts de uitkomsten uit waarnemingen, welke reeds door anderen bewerkt waren, opnieuw met elkander en met mijne resultaten 1890—97 in verband gebracht, en ik heb daaruit de besluiten getrokken, welke mij het waarschijnlijkst voorkwamen. Eene uitzondering maken alleen de waarnemingen van Pulkowa 1863—1875, omtrent wier uitkomsten, volgens de bewerking door IVANOFF in twee belangrijke verhandelingen [1]) gegeven, ik zelf eene berekening uitvoerde.

Het eerst deed zich de vraag voor, tot hoever men bij het gebruiken van oudere waarnemingen mag teruggaan, en deze hangt weder samen met die andere vraag, of men in de 14-maandelijksche beweging voortdurende continuiteit aanneemt, of wel de mogelijkheid niet uitsluit, dat daarin meer of minder plotselinge veranderingen kunnen plaats grijpen. CHANDLER neemt onder de conclusies die hij in zijne laatste verhandeling formuleert, zooals ik reeds opmerkte, ook deze op „that a change per saltum between 1830 and 1860 is „incompatible with the facts". Mij komt het integendeel voor, dat er alleszins reden is de mogelijkheid van zulk eene verandering tusschen 1840 en 1860 aan te nemen.

Ik grond mij daarbij vooreerst op de waarden voor de amplitude, zooals zij voor en na 1860 gevonden zijn, en die ik hier laat volgen. Ik heb daarbij een paar malen de uitkomsten van twee verschillende bewerkingen eener zelfde waarnemingsreeks opgenomen.

---

[1]) A. IVANOFF, Variations de la latitude de Poulkovo déduites des observations 1863—75. (Mélanges math. et astr. T. VII.) St. Pétersbourg 1894.

A. IVANOF, Recherches définitives sur les variations de la latitude de Poulkovo (Bull. Acad. Pétersb. Serie V. T. II). St. Pétersbourg 1895.

Waarnemingsreeks.		Amplitude.	Autoriteit.
Greenwich Muur C. ..	1825—1836	0″.126	Ch. A. J. 315
Greenwich Muur C. ..	1836—1850	0 .060	Ch. A. J. 320
Pulkowa 1e Vert.	1840—1855	0 .035	" " " 296
Pulkowa Vert. C.	1840—1849	0 .056	H. G. B. A. N. 3275
" " "	" "	0 .08	Ivanof Rech. déf.
Greenwich Tr. C.	1851—1858	0 .069	H. G. B. A. N. 3261
Greenwich Tr. C.	1858—1865	0 .175	H. G. B. A. N. 3261
Washington 1e Vert. .	1862—1867	0 .126	" "
Leiden Fund. Sterren.	1864—1868	0 .156	Uitk. Wilterdink.
" Polaris........	1864—1874	0 .158 [1])	" "
Greenwich Tr. C.	1865—1872	0 .233	H. G. B. A. N. 3261
Pulkowa Vert. C. Pol.	1863—1870	0 .226	" "
" " "	1871—1875	0 .179	" "
" " Alle St.	1863—1875	0 .127	Ivanof Rech. déf., E. F. B
" 1e Vert.	1875—1882	0 .236 [2])	Ch. A. J. 297
" Vert. C.	1882—1891	0 .145 [3])	Nyrén Bull. Pét. T. 35
" " "	" "	0 .139	H. G. B. A. N. 3261
Greenwich Tr. C.	1880—1891	0 .141	Ch. M. N. 53 119
Madison.............	1883—1890	0 .152	Ch. A. J. 307
Lyon...............	1885—1893	0 .175	" " 334
Samenst. Albrecht.....	1890—1896	0 .148	E. F. B. Ak. Amst. 1898
"	1890—1892	0 .167	Uitk. E. F. B.
"	1894—1896	0 .131 [4])	" "

[1]) Deze uitkomsten wijken een weinig af van die welke H. G. B. in A. N. 3261 mededeelde. Weldra zal het onderzoek van den Heer WILTERDINK uitvoerig door hem bekend gemaakt worden.

[2]) De uitkomst door NYRÉN gegeven uit 1875—87 in Bull. Pét. T. 35 nl. 0″.33 is zeker vergroot door de jaarlijksche beweging.

[3]) Uitkomst voor de totale beweging, waarop echter de jaarlijksche weinig invloed schijnt gehad te hebben.

[4]) Uitkomsten nu door mij afgeleid voor de partieele groepen.

Men ziet uit deze samenstelling vrij duidelijk dat de amplitude gedurende de jaren 1836—1858 aanmerkelijk kleiner gevonden werd dan in het volgende tijdvak. Voor een aantal reeksen zijn de middelbare fouten afgeleid (zie A. N. 3261); ook in verband daarmede kan men, geloof ik, tot de waarschijnlijke realiteit van het waargenomen verschil besluiten. Daarentegen is van eene veranderlijkheid der amplitude na 1860 niets te bespeuren en voor het minst mag men besluiten, dat de waarnemingen eene min of meer plotselinge verandering tusschen 1850 en 1860 veel waarschijnlijker maken dan eene continue voortgaande of periodieke.

Nu leidt de dynamische theorie der rotatie eener in zijn geheel of in sommige deelen niet absoluut vaste aarde juist tot hetzelfde resultaat. Zij leert ons [1]), dat bij langzame seculaire massa-verplaatsingen de as van het grootste traagheids-moment in hare bewegingen volkomen door de rotatie-as gevolgd wordt, dat bij periodieke verplaatsingen de rotatie-as eene beweging verkrijgt van dezelfde periode als die der traagheidsas, welke zich bij hare eigene beweging optelt, doch dat bij plotselinge massa-verplaatsingen de traagheidsas zich alleen verplaatst, zoodat dus de openingshoek van den kegel, welken de rotatie-as om haar heen beschrijft, verandert en in deze beweging eene discontinuiteit intreedt. De amplitude verandert en in het algemeen ook de phase, doch daarna zet de beweging zich weder in de oude periode voort.

Mag men zich echter in dit vraagstuk door eene dynamische theorie laten leiden? Door CHANDLER wordt dit beslist ontkend. Hij meent dat zij zich hier eene blinde leidsvrouw heeft getoond en dat haar te willen volgen afkeurenswaardig conservatisme verraadt.

Zeker is het dat door verkeerd conservatisme meermalen de vooruitgang der wetenschap vertraagd is en, zoo het nog noodig ware, zou de schoone ontdekking door CHANDLER zelven van de naar hem genoemde poolbeweging wederom bewijzen dat een onbevooroordeeld ondervragen der waarnemingen, zonder de leiding van eenige theorie, een vraagstuk in de juiste banen leiden en aan de wetenschap een belangrijken dienst bewijzen kan. Doch daartegenover zal men toch wel mogen verlangen dat, wanneer uit waarnemingen het besluit wordt getrokken dat eene theorie onjuist of onvolledig is, ook aangetoond worde dat dit besluit onafwijsbaar is en dat de waarnemingen met de meer eenvoudige theorie beslist onvereenigbaar zijn. Tevens mag eene theorie, al kleven aan haar misschien nog onvol-

---

[1]) Zie o. a. HELMERT, Die math. und phys. Theorien der höheren Geodäsie Bd. II pag. 417.

komenheden, zoo zij maar in het algemeen op een juisten grondslag opgebouwd is, zeker daar een woord medespreken, waar de waarnemingen nog geen uitsluitsel geven. Zoo mag dan ook hier hare stem gehoord worden.

6. Naar waarneming en theorie beide moet dus eene min of meer plotselinge verplaatsing der rotatieas tusschen 1850 en 1860 mogelijk geacht worden, en zoo meen ik, dat men vooreerst ter afleiding der periodelengte slechts waarnemingen na dien tijd zal mogen gebruiken.

In de volgende tabel worden nu alle bepaalde maximum-epochen na 1858 saamgesteld, die voor mij toegankelijk waren en mij eenigszins vertrouwbaar voorkwamen. Vooreerst zijn alle uitkomsten van H. G. v. d. S. Bakhuyzen opgenomen, benevens die van Wiltkerdink voor Leiden, verder verscheidene die door Chandler afgeleid waren, dan mijne uitkomst uit de waarnemingen 1890—96 en eindelijk eene maximum-epoche die ik afleidde uit de uitkomsten van alle

Waarnemingsreeks.	E.	Epoche.	Gew.	W—E.B.I.	Aut.
Greenwich Tr. C. ...1858—65	—18	2400745	1	— 60	H. G. B.
Washington 1e Vert. 1862—67	—14	2506[1])	2	— 24	"
Pulkowa V. C. Pol. .1863—70	—13	3035[1])	2	+ 74	"
Leiden Fund. sterren 1864—68	—12	3394	2	+ 2	Wilt.
" Polaris ......1864—74	—12	3386	2	— 6	"
Greenwich Tr. C. ...1865—72	—12	3435	1	+ 43	H. G. B.
Pulkowa Vert. C. ...1863—75	—10	4277	4	+ 23	Iv., E. F. B.
" V. C. Pol...1871—75	— 8	5146[1])	2	+ 30	H. G. B.
" 1e Vert.....1875—82	— 3	7290	2	+ 18	Ch.
" Vert. C.....1882—91	+ 3	9867	4	+ 8	H. G. B.
Greenwich Tr. C. ...1880—91	+ 3	9870	1	+ 11	Ch.
Madison ....1883—90	+ 5	2410704	1	— 16	"
Lyon ....1885—93	+ 6	1151[2])	2	0	"
Samenst. Albrecht...1890—96	+ 9	2439	6	— 6	E. F. B.

[1]) Ook Chandler bewerkte deze waarnemingsreeksen; zijne uitkomsten wijken slechts resp. + 4, + 5 en — 5 dagen af.

[2]) Gonnessiat, wiens waarnemingen van 15 poolsterren hier gebruikt zijn, vond zelf eene epoche 3 dagen later. Bull. astr. T XI. Later is door hem eene formule met 4 termen afgeleid. C. R. T. 124. pag. 930.

waarnemingen met den vertikaal-cirkel te Pulkowa 1863—1875, zooals die door IVANOFF bewerkt zijn. Ik gebruikte daartoe zijne tabel op pag. 269 der *Recherches définitives*, en loste de daaruit gevormde 14 vergelijkingen op zonder op de bijgevoegde gewichten te letten. De door mij gevonden epoche komt geheel overeen met die welke IVANOFF zelf uit een kromme afleidde.

De kolom E. bevat de rangnummers der maxima, waarbij ik de gemiddelde maximum-epoche van mijne vorige mededeeling als nul-epoche aannam. De volgende kolom bevat de maximum-epochen op Greenwich gereduceerd en daarnaast zijn de gewichten aangegeven, die ik aan die uitkomsten toekende. Wegens de duidelijk tot een aanzienlijk bedrag optredende systematische fouten, was het moeilijk die gewichten streng te bepalen; de middelbare fouten volgende uit de onderlinge overeenstemming der waarnemingen eener zelfde sterrenwacht mochten daartoe niet den uitsluitenden maatstaf leveren. Zij zijn dus naar eene ruwe schatting bepaald; de door H. G. v. D. S. BAKHUYZEN aangenomen waarden nam ik over en voor de overige reeksen ging ik op soortgelijke wijze te werk. De kolom W—E.B.I bevat de afwijkingen van mijne in de vorige mededeeling afgeleide formule en de laatste de autoriteiten aan welke de gebruikte uitkomsten ontleend zijn.

De reeksen van Greenwich, welke H. G. v. D. S. BAKHUYZEN ten slotte niet in zijne berekening opnam, daar hunne uitkomsten reeds in die der andere reeksen vervat zijn, liet ik reeds dadelijk weg. Daarentegen heb ik, nevens de epoche, afgeleid uit de door IVANOF gevormde uitkomsten uit alle waarnemingen met den vertikaalcirkel te Pulkowa 1863—1875, ook nog die opgenomen, welke H. G. v. D. S. BAKHUYZEN uit de waarnemingen van Polaris alleen, resp. van GYLDÉN en NYRÉN afleidde. Wel berust het eerstgenoemde resultaat op veel meer waarnemingen, maar het zou kunnen zijn dat het dooreenmengen der uitkomsten van beide waarnemers, welk punt ook door IVANOF zelf in zijne eerste verhandeling p. 516 besproken wordt, in meerdere of mindere mate geschaad heeft.

Ik heb nu getracht mijne eerste formule naar de aldus saamgestelde uitkomsten te verbeteren, en heb daartoe alle vergelijkingen welke zij opleverden streng volgens hare gewichten opgelost. Op het eerste gezicht schijnen de verschillen W—E.B.I een niet lineairen gang te verraden, maar bij nadere beschouwing blijkt dit toch grootendeels schijn, en, met het oog op de soms aanzienlijke verschillen tusschen dicht bijeen liggende epochen geloofde ik de eenvoudige onderstelling van een constanten periodeduur ook nu nog niet te mogen verlaten. Ik verrichtte 2 oplossingen: de eerste

maal de uitkomst volgens IVANOF opnemende en die uit de Polaris-waarnemingen van GYLDÉN en NYRÉN weglatende, een tweede maal door in plaats van de eerste uitkomst de beide laatste op te nemen [1]).

Zoo werd verkregen:

1e *Oplossing:*	Δ epoche	+ 0.1
	Δ periodeduur	+ 0.06
2e *Oplossing:*	Δ epoche	+ 4.7
	Δ periodeduur	— 0.45

Men ziet dat het volgen van den eenen of den anderen weg omtrent de waarnemingen van Pulkowa, nog een vrij grooten invloed heeft.

Voor de nulepoche en den periodeduur zelven verkrijgt men in beide gevallen:

II*a*	2408565	431.17 dagen.
II*b*	2408570	430.66 „

Hoewel nu de eerste oplossing mij ten slotte de voorkeur schijnt te verdienen, geef ik hieronder de afwijkingen der waarnemingen van beide, en daarnevens die van de beide formules van CHANDLER van 1894 en 1898. Om te doen zien hoe de uitkomsten der waarnemingen vóór 1858 zich ten opzichte der latere verhouden, neem ik ook eerstgenoemde op.

Gaat men de overeenstemming der formules met de waarnemingen 1858—1896 na, dan ziet men dat die voor de formules van CHANDLER, niettegenstaande hunne grootere saamgesteldheid niet beter is dan voor de mijne. Als men, teneinde in dit opzicht E. B. IIa met Ch.94 en Ch.98 te vergelijken, zooals rechtmatig is, de beide Polaris-reeksen van Pulkowa weglaat, dan vindt men dat de som der kwadraten van de afwijkingen met de gewichten vermenigvuldigd voor E.B.IIa nog het kleinst is. De gewichtsverdeeling oefent hier echter een zeer grooten invloed uit.

Wat dit tijdvak betreft, zou ik dus als uitkomsten van mijn onderzoek willen aangeven:

1°. Er is vooralsnog geen voldoende grond in de 14 maandelijksche beweging sedert 1860 eene niet eenparige snelheid aan te nemen.

---

[1]) Ik verrichtte ook nog eene oplossing, waarbij de periodeduur eenparig veranderlijk werd aangenomen, doch vermeld die niet, daar de uitkomst als niet meer dan een rekenresultaat te beschouwen is.

		W—E. B. IIa.	W—E. B. IIb.	W—Ch. 94	W—Ch. 98
Greenwich Muur C.....	1825—1836[1]	+ 142 d.	+ 116 d.	+ 44 d.	+ 163 d.
" "	1836—1850[1]	+ 22	0	+ 2	+ 7
Pulkowa 1e Vert......	1840—1855[1]	— 9	— 30	— 23	— 27
" Vert. C.......	1840—1849[2]	— 50	— 71	— 59	— 70
Greenwich Tr. C.......	1851—1858[2]	— 92	— 108	— 82	— 127
Greenwich Tr. C.......	1858—1865	— 59	— 73	— 61	— 98
Washington 1e Vert....	1862—1867	— 23	— 35	— 38	— 61
Pulkowa Vert. C. Pol..	1863—1870	+ 75	+ 63	+ 56	+ 37
Leiden Fund. Sterren...	1864—1868	+ 3	— 8	— 19	— 34
" Polaris.........	1864—1874	— 5	— 16	— 27	— 42
Greenwich Tr. C.......	1865—1872	+ 44	+ 33	+ 22	+ 7
Pulkowa Vert. C. Alle St.	1863—1875	+ 23	+ 14	— 5	— 13
" " Pol.	1871—1875	+ 30	+ 22	— 3	— 4
" 1e Vertik....	1875—1882	+ 18	+ 12	— 17	— 7
" Vert. C......	1882—1891	+ 8	+ 5	— 12	0
Greenwich Tr. C.......	1880—1891	+ 11	+ 8	— 9	+ 3
Madison..............	1883—1890	— 16	— 18	— 25	— 19
Lyon.................	1886—1893	0	— 2	— 3	0
Samenst. Albrecht.....	1890—1896	— 7	— 7	+ 13	+ 6

2°. De periodelengte heeft in dit tijdvak niet veel afgeweken van 431 dagen.

Deze uitkomsten zijn geheel in strijd met die van CHANDLER's laatste verhandeling, en in de besluiten, waartoe ik in mijne voorgaande mededeeling kwam, en welke in hoofdzaak overeenkwamen met de vroegere uitkomsten van H. G. v. D. S. BAKHUYZEN, wordt slechts weinig verandering gebracht. Daar de epochen volgens beide oplossingen IIa en IIb omstreeks 1893 samenvallen en er wel geen reden is voor de periodelengte van de eenvoudige waarde 431.0 dagen af te wijken, welke tusschen beide oplossingen in ligt, zoo neem ik voor het oogenblik als einduitkomst aan:

1) Naar CHANDLER.

2) Naar H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Elementen II der 14-maandelijksche beweging sedert 1860.

Maximum-epoche voor Greenwich	2412446
Periodelengte.	$431^d.0$
Amplitude.	0."156 [1])

Wat in de tweede plaats het tijdvak vóór 1858 betreft, daaromtrent laat zich geloof ik nog niet veel zeggen. Terwijl de veel kleinere amplitude in dit tijdvak gevonden het in mijn oog volkomen rechtvaardigt de uitkomsten daaruit niet met de nieuwere te verbinden, durf ik uit de waargenomen epochen zelven niets afleiden. De uitkomsten 1836—1858 zijn wegens de kleine amplitude zeer onzeker en over de zekerheid der uitkomsten uit de POND'sche waarnemingen kan ik geen oordeel uitspreken.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt, namens den Heer N. J. VAN DER LEE, een opstel aan, getiteld: „*De invloed van den druk op de kritische mengtemperatuur*".

Door ALEXEJEW werden in 1886 (Wied. Ann. Bd. 28) onderzoekingen gepubliceerd, door hem verricht om na te gaan den invloed van de temperatuur op de onderlinge oplosbaarheid van twee vloeistoffen, die maar gedeeltelijk in elkaar oplosbaar zijn. Voor de onderzochte vloeistofparen bleek er eene temperatuur te bestaan, waarboven menging in alle verhoudingen plaats vindt (kritische mengtemperatuur). Het bestaan van deze temperatuur was reeds vroeger vermoed. Ook had in 1880 (Verh. Kon. Ak.) Prof. VAN DER WAALS er op gewezen, dat eveneens de druk eene rol bij dit verschijnsel zoude moeten spelen, en gevonden, dat bij een aether-water mengsel de meniscus, die de twee phasen scheidt, bij verhoogden druk vlakker wordt. Ofschoon dit zou wijzen op een naderen van de phasen, wat samenstelling betreft, werd echter volkomen menging niet bereikt. ALEXEJEW schijnt in deze verhandeling aanleiding gevonden te hebben bij de door hem onderzochte mengsels eveneens den invloed van den druk na te gaan, doch met negatief resultaat (de beschrijving van deze laatste proeven heb ik niet kunnen raadplegen. Ze zijn mij alleen uit aanhalingen bekend). Bij de theorie van het ψ-vlak (J. D. VAN DER WAALS: „Théorie moléculaire d'une substance composée de deux matières différentes. Arch. Néerl. T. 24 of Versl. Kon. Ak. 23 Febr. 1889) werd eveneens de invloed

[1]) Middelwaarde uit de voorgaande samenstelling afgeleid.

van den druk op de onderlinge oplosbaarheid nagegaan. In 1894 verscheen (C. R. T. CXIX p. 512) de beschrijving van onderzoekingen, ondernomen door J. DE KOWALSKY, naar aanleiding van deze theorie. Van invloed van den druk werd daarbij niets bespeurd — zelfs niet bij zeer hooge drukkingen — behalve bij een drievoudig mengsel van aethylalcohol, isobutylalcohol en water. Een druk van 900 atm. deed de vloeistof homogeen worden bij eene temperatuur gelegen ongeveer 3° beneden de mengtemperatuur. In den laatsten tijd werd door KLOBBIE (Zeitschr. f. phys. Chem. 24. 617. 1897) voor mengsels van water en aether bij een druk van 100 atmosferen een merkbaren invloed van den druk gevonden, zonder dat hij echter de grootte ervan bepaalde.

Het doel van de hier te beschrijven proeven was: iets van den invloed van den druk op de menging van vloeistoffen te vinden.

Van de door ALEXEJEW onderzochte mengsels scheen het meest geschikt voor dit onderzoek het paar water-phenol. De kritische mengtemperatuur daarvan is gelegen bij ongeveer 67°. Het gebruikte phenol was van MERCK & Co. en werd van te voren onderzocht door het smeltpunt te bepalen. Het werd in donker bewaard in toegesmolten glazen buisjes, elk ongeveer de hoeveelheid bevattende noodig voor ééne proef. De verhouding van de mengsels werd geregeld door afgewogen hoeveelheden der twee stoffen bij elkaar te voegen. Daar de bepalingen gedaan werden voor mengsels, waarvan de mengtemperatuur dicht bij de kritische gelegen was, waren de vloeistoffen bij kamertemperatuur in twee phasen gesplitst. Het mengsel werd daarom goed dooreengeschud, zoodat er eene emulsie ontstond. Hiervan werd dan snel eene hoeveelheid gegoten in een capillairtrechter, waarmede de vloeistof in de glazen persbuis werd gebracht. Deze persbuis bestond uit een rechte, dikwandige glazen buis van ongeveer 3 m.M. binnendiameter. Zij was aan ééne zijde dichtgesmolten, voorzien van eene verdikking, zooals die bij de CAILLETET-buizen is aangebracht, en gekit in een koperen montuur. Nadat in deze buis eene voldoende hoeveelheid van het te onderzoeken mengsel gebracht was, werd de roerder erin gedaan. Deze roerder bestond uit eene gemagnetiseerde naald, waarom een nauwsluitende glazen capillair werd geschoven, die daarna ter weerszijden werd toegesmolten en voorzien van glazen bolletjes om aankleven aan de glaswanden te voorkomen. Voor het in beweging brengen van dit staafje werd gebruikt eene electromagnetische roerinrichting, zooals die, beschreven door A. VAN ELDIK (Versl. Kon. Ak. 1897). Na het inbrengen van den roerder werden luchtbellen zooveel mogelijk verwijderd, en daarna kwik in

de buis gebracht. Hiertoe werd eerst eene niet te groote hoeveelheid voorzichtig boven in de buis gedaan. Zorgde men hierbij, dat het kwik maar eene zeer geringe snelheid verkreeg, dan bleef, tengevolge van de capillariteit, dit bovenin hangen. Vervolgens kon men het gemakkelijk langs een capillair naar beneden laten glijden, tot op enkele c.M. boven het oppervlak van het mengsel. Nu kon met een capillairtrechter kwik worden bijgegoten, waarbij luchtbellen konden worden vermeden. Eindelijk werd de geheele kwikdraad naar beneden gelaten, tot het benedenoppervlak ervan het bovenoppervlak van het mengsel raakte. Nadat nu nog de buis verder geheel met kwik was aangevuld, kon zij worden omgekeerd en in een stalen vat worden geplaatst, dat met de perspomp in verbinding stond. Binnen dit stalen vat bevond zich een glazen vat, met kwik gevuld, zoodanig, dat de onderzijde van de glazen buis beneden het kwikoppervlak kwam. De ruimte werd verder met glycerine aangevuld en het glazen vat met eene koperen moer afgesloten. Voor volledige afsluiting werden caoutchoucringen gebruikt.

De druk kon met dit toestel geruimen tijd standvastig worden gehouden, en werd afgelezen op een metaal-manometer, voor de proeven nieuw in gebruik genomen. Deze manometer was, naar opgave, gecontroleerd. Daar de invloed van den druk niet zeer groot bleek te zijn, kwamen kleine drukverschillen niet in aanmerking, en was het niet noodig een nauwkeuriger instrument te gebruiken. Deze geringe grootte, die uit de theorie en in verband met de vermelde proeven van te voren was vermoed, maakte het noodzakelijk de waarnemingen te verrichten dicht bij de mengtemperaturen. Hierbij deed zich de moeilijkheid voor, dat de warmte, die bij de samendrukking zou worden ontwikkeld, de oorzaak zou kunnen worden, dat de temperatuur van het mengsel, wanneer men die eerst beneden de mengtemperatuur had, boven deze zou stijgen. Het mengen zou in dat geval geen direct gevolg van den druk zijn. Het was dus van groot belang eene inrichting te maken, waardoor men geruimen tijd de temperatuur om de glazen buis standvastig zou kunnen houden: immers op die wijze zou het mogelijk zijn den genoemden storenden invloed weg te nemen. De pogingen om een geschikten thermostaat te verkrijgen voerden tot de volgende inrichting, in vele opzichten overeenkomende met die, beschreven door W. Watson (Phil. Mag. Vol. 44 July 1897): een glazen cylinder hoog 30 c.M. en met een diameter van 5.5 c.M., is aan beide zijden gesloten met een caoutchouckurk. Deze kurken zijn in het midden doorboord, zoodat een glazen cylinder van gelijke hoogte

als de eerste en met een middellijn van 2.6 c.M. concentrisch met deze geplaatst kan worden. Het aldus verkregen ringvormig cylindrisch vat wordt geplaatst zóó, dat de as verticaal komt. Twee openingen in de bovenste kurk aangebracht geven gelegenheid twee glazen buizen aan te brengen. De eerste van deze wordt met een kraan afgesloten en dient om vloeistof in het vat te brengen. De tweede is (glas op glas) door middel van een caoutchoucslangetje verbonden aan eene andere verticaal geplaatste glazen buis, die door een koeler leidt, en even daarboven horizontaal is omgebogen. Zij voert verder naar een T stuk, waaraan verbonden zijn 1° een open manometer 2° een tweede T stuk. Het eene been van dit laatste T stuk heeft eene klemkraan, die verbinding geeft met de buitenlucht. Het andere been voert naar twee groote gesloten flesschen, samen ongeveer 40 Liter inhoudende, en van daar naar eene klemkraan, die gelegenheid geeft verbinding te maken met een waterluchtpompje. Op deze wijze is dus het vat in verbinding met eene groote ruimte waarin de druk kan verminderd worden. Het regelen van dezen druk, afgelezen met behulp van den open manometer, heeft gemakkelijk plaats door de twee genoemde kranen. In het vat wordt nu eerst eene kleine hoeveelheid kwik gebracht, voldoende om den bodem te bedekken, en aldus het caoutchouc te beschermen, en daarop eene hoeveelheid aethylalcohol, die nu bij verschillende drukkingen aan den kook kan worden gebracht. De daarvoor benoodigde warmte wordt geleverd door een wisselstroom, gemakkelijk te verkrijgen door de in het laboratorium aanwezige installatie van „Electra". Deze stroom wordt geleid door eene spiraal, gewonden om den binnencylinder van het kookvat, waarvan de uiteinden door het glas van den buitencylinder zijn gesmolten. Eene noodzakelijke voorwaarde voor het standvastig blijven van de temperatuur bleek te zijn, dat de spiraal geheel en al onder de kookvloeistof gedompeld bleef.

De met het mengsel voorziene glazen persbuis werd nu ongeveer in de as van den binnencylinder geplaatst, met een thermometer erbij, en het busje van de electromagnetische roerinrichting erom gehangen. Daarna werd de ruimte aan beide zijden afgesloten met watten. De thermometer was geheel binnen dat deel van den binnencylinder, waar de temperatuur gebleken was dezelfde te zijn. Correctie voor het uitsteken van den kwikdraad behoefde dus niet plaats te hebben. Binnen deze zelfde ruimte bevonden zich het te onderzoeken mengsel en het blikken busje.

Het mengsel werd nu eerst ongeveer op de mengtemperatuur gebracht, waarvoor ongeveer 1 uur noodig was. Daarna werd onder

voortdurend roeren de temperatuur een weinig verhoogd, eenigen tijd gewacht en weer verhoogd enz., tot de troebeling (het bewijs voor het nog aanwezig zijn van twee phasen) geheel was verdwenen. De temperatuur werd nu afgelezen. Daarna werd, door op dezelfde wijze af te koelen, de temperatuur bepaald, waarbij wederom troebeling optrad. Door deze waarnemingen eenige malen te herhalen, kon zeer nauwkeurig de mengtemperatuur bepaald worden. (De gebruikte thermometer was vergeleken met een op de Reichsanstalt geverifieerde normaal-thermometer). Op dezelfde wijze werd de mengtemperatuur bepaald bij verhoogden druk. Van deze waarnemingen zijn de resultaten de volgende:

22 °/₀ $x = 0.05$

druk:	norm.	30	60	90	120	150	180 atm.
mengtemp.:	66.7	66.7	66.9	67	67.1	67.2	67.3

34 °/₀ $x = 0.09$

druk:	norm.	30	60	90	105	130 atm.
mengtemp.:	67.6	67.6	67.8	67.8	68	68.1

38 °/₀ $x = 0.11$

druk:	norm.	60	90 atm,
mengtemp.:	67.3	67.5	67.7

47 °/₀ $x = 0.15$

druk:	norm.	60	90	120 atm.
mengtemp.:	64.8	65.1	65.3	65.3

49 °/₀ $x = 0.16$

druk:	norm.	30	60	90	120	150	180 atm.
mengtemp.:	65	65	65.1	65.2	65.3	65.5	65.6

55 °/₀ $x = 0.18$

druk:	norm.	30	60	90 atm.
mengtemp.:	61.2	61.2	61.3	61.3

(Het percentage aan phenol is hier opgegeven. Bij de theorie van het ψ-vlak onderstelt men $M_1(1-x)$ van de éene en $M_2 x$ van de

andere stof aanwezig, waarbij M_1 en M_2 de moleculair gewichten voorstellen. Hier is $M_2 = C_6 H_5 OH$.)

Deze waarnemingen toonen aan, dat vermeerdering van druk de mengtemperatuur doet stijgen. In verband gebracht met de theorie van het ψ-vlak, wijzen ze erop, dat de lengteplooi een plooipunt heeft aan de zijde der grootere volumina, en dat zij hare holle zijde bij dat plooipunt keert naar de x-as. Daar verder theoretisch in het algemeen kan worden aangetoond, dat bij verhoogde temperatuur de plooi zich zoodanig verplaatst, dat de projectie van de connodale lijn op het XV-vlak valt binnen die van een vorige connodale lijn, volgt hieruit tevens, dat de lengteplooi door temperatuurverhooging zal verschuiven naar de zijde van de x-as. Bij een zekere temperatuur zullen de twee connodale lijnen elkaar snijden. Dit geeft 3 coëxisteerende phasen. Bij temperatuursverhooging naderen de snijpunten elkaar, m. a. w. de phasen zullen meer en meer aan elkaar gelijk gaan worden. Eindelijk raken de twee lijnen: er is nu maar één vloeistofphase meer met de dampphase coëxisteerend. Deze temperatuur is de kritische mengtemperatuur genoemd. Echter is dit slechts ééne der vele kritische mengtemperaturen, want bij hoogere temperatuur is het mogelijk door drukverhooging ook twee vloeistofphasen te verkrijgen, die eveneens in samenstelling en moleculairvolumen gelijk kunnen worden. Ook dan is er dus een kritische temperatuur. De kritische mengtemperatuur stijgt dus bij het onderzochte mengsel door drukverhooging.

Beschouwt men nogeens het geval dat de twee connodale lijnen elkaar snijden, dan is gemakkelijk in te zien, dat de twee snijpunten noden zijn van de lengteplooi. Bij temperatuursverhooging naderen deze elkaar, en wanneer de lijnen tot raking zijn gekomen, is dus het raakpunt te beschouwen als twee samengevallen noden. Hieruit blijkt, dat wanneer er raking is van de twee connodale lijnen, het raakpunt een plooipunt is van de lengteplooi. De spinodale lijn van de lengteplooi zal dus ook raken aan de connodale lijn van de dwarsplooi. Een gevolg hiervan is, dat het differentiaal quotient $\frac{dp}{dx_1}$ (zie T. M. bldz. 15) in dit geval 0 zal moeten zijn, wat wijst op een maximum of minimum van de lijn $p = f_1(x_1)$ d.i. de lijn, die de betrekking aangeeft tusschen de samenstelling en de spanning van den verzadigden damp van het mengsel.

Om deze conclusie proefondervindelijk na te gaan werden eenige dampspanningen gemeten volgens de methode aangegeven door LEHFELDT (Phil. Mag. July 1898), waarvan de uitkomsten hier volgen;

4.8%	$x = 0.01$	10.1%	$x = 0.02$	18,9%	$x = 0.04$
T.	P. in m.M.	T.	P. in m.M.	T.	P. in m.M.
72.4	263	77.2	321	72.2	260
73 9	280	77.3	323	72.3	262
74.9	291	77.5	325	72.9	269
75.1	294	81.9	388	73.7	277
76.1	306	85	438	75.5	299
77.4	323			75.7	301
78.5	338			76.5	312
79.9	357			77.7	328
81.6	382			77.9	331
83	403			78.9	344
83.8	416			79.6	353
85.4	443			80.5	367
86.6	464			81.6	384
87	471			83	405
				84.4	428

33.6%	$x = 0.09$	50.9%	$x = 0.17$
T.	P. in m.M.	T.	P. in m.M.
71.2	251	71.2	251
72.2	261	71.4	253
73.1	272	72.4	264
74.1	284	73.7	277
74.4	288	74.6	289
75.5	300	76	306
76.7	315	77.2	321
76.9	318	78.3	337
77	319	79.3	351
77.7	328	81.3	378
78.7	343	81.8	386
79.4	352	82.8	401
79.9	360	83.8	417
80.9	375	85.6	448
81.6	385	86.6	462
82.6	400	86.7	468
84.2	426	86.8	470
85	440		

77.2%	$x = 0.39$	84.%	$x = 0.5$
T.	P. in m.M.	T	P in m.M.
73.3	253	75.9	212
73.5	254	76.3	215
74.5	262	77.5	229
75.7	276	77.9	234
76.5	282	79.7	253
77.7	296	81.6	274
78.9	311	82.8	287
79.3	315	85.8	323
80.6	330	89	381
81	336	89.1	382
81.6	344	89.4	389
83.2	367		
84.4	387		
86.2	419		
86.4	422		
87.6	444		

Uit deze cijfers werden door interpolatie de volgende gevonden voor de lijnen $p = f_1(x_1)$ (de getallen voor zuiver water zijn ontleend aan de tabellen van LANDOLT. Aan de medegedeelde cijfers zoude nog eene kleine correctie moeten worden aangebracht, die echter niet van invloed is op het algemeen beloop der spanningslijnen).

%	x	75°	77°	79°	81°	83°	85°
0	0	289	314	340	369	400	433
5	0.01	293	318	344	373	403	436
10	0.02	294	319	345	374	405	438
19	0.04	294	319	345	374	405	438
34	0.09	294	319	346	375	406	440
51	0.17	294	319	345	374	404	438
77	0.39	268	289	310	336	364	397
84	0.5	201	223	245	267	290	311

Ofschoon uit deze cijfers de juiste plaats ervan niet kan bepaald worden, blijkt toch, dat er een maximum is, hetwelk ongeveer overeenkomt met waarde 34% ($x = 0.1$), dus ongeveer met de samenstelling bij de kritische mengtemperatuur der 3 phasen.

Aardkunde. — De Heer VAN BEMMELEN biedt namens Dr. J. LORIÉ te Utrecht voor de werken der Akademie eene verhandeling aan, getiteld: „*Beschrijving van eenige nieuwe grondboringen.*" Deze wordt in handen gesteld van de Heeren VAN BEMMELEN en VAN DIESEN om daarover verslag uit te brengen.

Voor de Boekerij worden aangeboden, door den Heer HOFFMANN de dissertatie van den Heer H. J. COERT: „*Over de ontwikkeling en den bouw van de geslachtsklier bij de zoogdieren, meer in het bijzonder van den eierstok*", en door den Heer HOEK de dissertatie van den Heer H. C. REDEKE: „*Onderzoekingen betreffende het urogenitaalsysteem der Selachiers en Holocephalen.*"

Na resumptie van het behandelde wordt de vergadering gesloten.

(9 November 1898.)

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 26 November 1898.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

Het Proces-Verbaal der vorige Vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van den Heer STOKVIS, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2°. Schrijven van den Heer P. DROSTE, d.d. 14 November 1898, Administrateur van het P. W. Korthalsfonds, ter begeleiding van de som van *f* 600.—, die uit genoemd fonds ter bevordering der

kruidkunde is toegestaan. Dat bedrag is aan den Penningmeester van de Nederlandsche dierkundige Vereeniging ter hand gesteld.

3°. Uitnoodiging van de Académie impériale militaire de Médecine te St. Petersburg tot bijwoning van de plechtigheden bij gelegenheid van het 100-jarig bestaan van die inrichting op 18 (30) December 1898. Geen der aanwezige leden geeft den wensch te kennen naar deze feestviering te worden afgevaardigd. De Heer STOKVIS, die door ongesteldheid afwezig is, zal schriftelijk worden uitgenoodigd.

4°. Circulaire van de Royal Geographical Society te Londen, verzoekende ondersteuning voor een uit te zenden Engelsche antarctische Expeditie.

Deze circulaire wordt door den Voorzitter in de belangstellende overweging der Leden aanbevolen.

Wiskunde. — De Heer KLUYVER brengt, ook namens den Heer KORTEWEG, het volgende verslag uit over de verhandeling van den Heer N. L. W. A. GRAVELAAR, getiteld: „JOHN NAPIER's *Werken*".

In bovengenoemde verhandeling heeft de schrijver beoogd om, met nauwkeurige vermelding der talrijke door hem gebruikte bronnen, een uitvoerig en betrouwbaar overzicht te geven van den hoofdinhoud van JOHN NAPIER's werken. Zooveel mogelijk heeft hij alle geschriften over NAPIER geraadpleegd, in het bijzonder die, welke handelen over de geschiedenis van de ontdekking der logarithmen en over de logarithmotechnie der zeventiende eeuw. Hoewel hij overal naar aanleiding van de behandelde stof opmerkingen en gevolgtrekkingen maakt, heeft de schrijver er zich van onthouden om in eene doorloopende beoordeeling van de waarde van NAPIER's uitvindingen en ontdekkingen te treden. Zijn doel was hoofdzakelijk om door bijeen te verzamelen alles, wat aangaande NAPIER bekend was, of nog opgespoord kon worden, een juist inzicht in de beteekenis van den wetenschappelijken arbeid van den Schotschen geleerde te bevorderen.

De verschillende geschriften van NAPIER worden naar de tijdsorde behandeld. Bij elk werk volgen op de uitvoerige titelbeschrijving een opgave der verschillende edities en andere bibliographische mededeelingen, waaraan door den schrijver de meeste zorg is besteed. Alle aanhalingen uit NAPIER's werken zijn aan de oorspronkelijke uitgaven ontleend, die het den schrijver gelukte, zij het ook dikwerf met groote moeite, zich te verschaffen.

De verhandeling vangt aan met eene inleiding, waarin NAPIER's

levensloop zoo goed mogelijk wordt geschetst, voornamelijk met behulp van de mededeelingen, vervat in het werk van MARK NAPIER, Memoirs of JOHN NAPIER of Merchiston, etc., Edinburgh, 1834.

Er blijkt, dat NAPIER als streng calvinist ijverig deelnam aan den godsdienstigen strijd zijner dagen, en dat hij in den aanvang gelijkelijk zich wijdde aan de beoefening van de theologie en van de wiskunde. Wat de theologie betreft, hield vooral de vraag naar eene duidelijke verklaring van de Openbaring van Johannes zijn geest bezig; daarover handelt dan ook zijn eerste geschrift van het jaar 1593, getiteld: A Plaine Discovery of the whole Revelation of St. John, van welk werk van 1593 tot 1645 zoowel in Engeland als op het vasteland, niet minder dan zeventien verschillende uitgaven verschenen. Door eene korte beschrijving en eenige aanhalingen stelt de schrijver zijne lezers in staat om zich eenig denkbeeld te maken van den inhoud van dit geschrift, dat onder NAPIER's tijdgenooten en hunne onmiddellijke nakomelingen zooveel waardeering vond. Maar ook lang vóór de uitvinding der logarithmen heeft NAPIER als beoefenaar der mathematische wetenschappen en van hunne toepassingen zich naam gemaakt. Van 1596 dagteekent een klein geschrift getiteld: Secrett inventions etc., in extenso door den schrijver medegedeeld, waarin sprake is van brandspiegels, geschut en ander krijgstuig, door NAPIER uitgevonden ten bate van de verdediging des lands. Verder blijkt uit SKENE's De Verborum Significatione, dat reeds in 1597 op het gebied der landmeetkunde aan NAPIER groot gezag werd toegekend.

Naar tijdsorde volgt op de Plaine Discovery in 1614 het werk getiteld: Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, waaraan NAPIER in de eerste plaats zijn roem als wiskunstenaar dankt. De schrijver bespreekt vrij uitvoerig de verkeerde opvattingen, die langen tijd aangaande den inhoud van dit werk hebben bestaan. Oudere schrijvers, zooals MONTUCLA, vereenzelvigen NAPIER's logarithmen, met wat thans natuurlijke logarithmen heeten en zien geheel over het hoofd, dat NAPIER bij de samenstelling van zijne tafel aan een zoogenaamd grondtal niet heeft gedacht. De schrijver uit het vermoeden, dat de uitgave in 1619 van SPEIDELL's New logarithmes, the first invention whereof, was by the Honourable Lo: JOHN NEPAIR, Baron of Marchiston, welk werk logarithmen met e als basis bevatte, aanleiding heeft gegeven tot het misverstand. Onder de schrijvers, bij welke men MONTUCLA's dwaling terugvindt, worden thans genoemd: CALLET, DUHAMEL, BIOT, DE COMBEROUSSE, BALTZER, VAN SWINDEN, DE GELDER, LOBATTO. Eene andere en meer belangrijke vraag treedt bij de bespreking van NAPIER's werken over

de logarithmen op den voorgrond. Het is bekend, dat de logarithmen, zooals NAPIER zich die dacht, spoedig hebben moeten wijken voor die van een bruikbaarder soort, waarover gesproken wordt in het aanhangsel, behoorende bij de Mirifici logarithmorum Canonis Constructio. Dit werk werd in 1619, twee jaar na NAPIER's dood, door zijn zoon ROBERT uitgegeven en werd door HENRY BRIGGS van toelichtingen en aanteekeningen voorzien. De bedoelde vraag is nu, wie van beiden, NAPIER of BRIGGS, het eerst aan logarithmen met het grondtal 10 of $^1/_{10}$ heeft gedacht. Over het algemeen zijn latere schrijvers geneigd geweest, aan deze betere soort van logarithmen hoofdzakelijk den naam van BRIGGS te verbinden. Eerst in 1835 hebben BIOT in zijne: Analyse et restitution de l'ouvrage original de NAPIER, etc., en na hem BERNHARDT, WACKERBARTH en GÜNTHER gepoogd, aan NAPIER's arbeid meer recht te doen wedervaren. De schrijver heeft nu zooveel mogelijk bijeengebracht alle materiaal, dat ten aanzien van de gestelde vraag nog meer licht zou kunnen verspreiden. Hij wijst er op, dat BRIGGS, groot vereerder van NAPIER en zeer bevriend met diens zoon ROBERT, den uitgever van de Constructio, tijdens NAPIER's leven nooit pogingen deed om zich een aandeel in de eer der uitvinding te verzekeren, en dat eerst in 1624 door BRIGGS in zijn Arithmetica logarithmica over de verbeterde logarithmen gesproken wordt als een denkbeeld, dat hij zelfstandig en geheel onafhankelijk van NAPIER heeft opgevat. Daar tegenover staat, dat NAPIER over de gewijzigde logarithmen sprekende, hetzij in het aanhangel van de Constructio, hetzij elders, nimmer van BRIGGS melding maakt, en dat BRIGGS in de door hem gegeven toelichtingen op de Constructio zich niet de geringste toespeling op zijn eigen aandeel in de volmaking van NAPIER's ontdekking veroorlooft. Ten slotte komt de schrijver tot het besluit, dat de beschikbare bescheiden niet veroorloven om te beslissen, van wien het denkbeeld der verbetering is uitgegaan, dat men deze uitvinding waarschijnlijk heeft te beschouwen als een uitvloeisel van de gedachtenwisseling tusschen NAPIER en BRIGGS, en dat men ongetwijfeld NAPIER onrecht doet, indien men, zooals te dikwijls is geschied, uitsluitend aan BRIGGS de uitvinding toeschrijft.

Afgescheiden van de behandeling van deze prioriteitsquestie, geeft de schrijver zoowel van de Descriptio als van de Constructio eene nauwkeurige inhoudsbeschrijving, die voor den lezer, welke geen gelegenheid heeft om tot die werken zelf door te dringen, eene zeer welkome aanvulling oplevert van de mededeelingen, die men dienaangaande in andere geschiedkundige werken, bijv. in CANTOR's Vorlesungen, vindt. Zeer uitvoerig vindt men aangegeven, hoe de

Canon was ingericht, welke eigenaardige opvattingen NAPIER oorspronkelijk van zijne kunstmatige getallen had, hoe hij te werk ging om de grondtafel te berekenen en daaruit de logarithmen der sinussen af te leiden, en tot welke hulpmiddelen hij bij het gebruik van den Canon zijne toevlucht nam, om interpolatie te vermijden.

Is in het voorafgaande uitsluitend over de logarithmen gesproken, de schrijver wijst er op, dat NAPIER's ontdekking het gevolg is van zijn streven om de in zijn tijd zeer omslachtige berekeningen der bolvormige driehoeksmeting te vereenvoudigen, en de Descriptio en de Constructio bevatten dan ook, zooals bekend is, veel belangrijks ten aanzien van de trigonometrie. De schrijver, sprekende over NAPIER's oplossing der rechthoekige boldriehoeken en over de figuur van vijf rechthoekige en vijf rechtzijdige driehoeken, waarmede NAPIER zijn bekenden regel meetkundig bewees, betoogt, dat wat NAPIER op dit en aanverwant gebied leverde, zich aansluit aan en steunt op hetgeen PITISCUS en VAN LANSBERGE reeds hadden aangegeven, naar wier werken NAPIER verwijst, dat NAPIER echter ongetwijfeld de voorlichting kon ontberen van NATHANIEL TORPORLEY, met wiens geschrift Diclides cœlometrica hij echter bekend geweest moet zijn. Voor de scheefhoekige boldriehoeken komen ter sprake de bekende analogieën, die NAPIER zonder bewijs in de Constructio mededeelde, en de aanteekeningen, welke BRIGGS daarbij gaf. Tot zijne bevreemding heeft de schrijver gevonden, dat ten aanzien van deze formules, geheel ten onrechte, veelal verwezen wordt naar die plaats in de Descriptio, waar wel de naam „analogia" voorkomt, maar waar over den veel minder bekende stelling wordt gehandeld.

Behalve aan de uitvinding der logarithmen is nog heden ten dage NAPIER's naam verbonden aan de zoogenaamde „Neper's bones" of rekenstaafjes, waarvan het gebruik in de Rabdologia van 1617 is verklaard. De schrijver bespreekt ook den inhoud van dit geschrift, waarin behalve de rekenstaafjes nog andere tamelijk zonderlinge en thans geheel vergeten instrumentale hulpmiddelen voor het verrichten van verschillende rekenkundige bewerkingen zijn aangegeven. Van meer belang is wellicht, zooals de schrijver mededeelt, dat op een paar plaatsen van dit werk, onder vermelding van STEVIN's Thiende van 1585, voor het eerst de komma als decimaalteeken dienst doet, en dat op eene andere plaats hier voor het eerst in een gedrukt werk eene verkorte vermenigvuldiging wordt aangetroffen.

Met groote voorliefde behandelt de schrijver voorts een onvoltooid gebleven, en volgens zijne meening waarschijnlijk van vóór 1594 dagteekenend, werk van NAPIER, zijn Ars logistica en zijn Algebra, van eene inleiding voorzien en uitgegeven door MARK NAPIER in

1839. De wijze, waarop NAPIER in dit nog weinig bekende werk een overzicht geeft van de zeven rekenkundige bewerkingen, geeft den schrijver aanleiding om te verklaren, dat NAPIER hier niet alleen verre zijne voorgangers en zijne tijdgenooten, maar zelfs veel schrijvers van den tegenwoordigen tijd overtreft. Dat NAPIER, toen hij de Ars logistica schreef, het verband tusschen logarithme en exponent, door hem index genoemd, nog niet heeft ingezien, kan met zekerheid worden vastgesteld.

Naar aanleiding van de hier voorkomende complementaire vermenigvuldiging herinnert de schrijver aan de onderstelling van LEPAIGE, dat het bij deze vermenigvuldiging gebruikte kruis OUGHTRED er toe gebracht zou hebben, om dit teeken als maalteeken te gebruiken. Ten aanzien van deze onderstelling geeft de schrijver te kennen, dat men zijns inziens niet uitsluitend op de vrij zeldzaam voorkomende complementaire vermenigvuldiging moet letten, maar meer op andere tallooze gevallen, waarin kruiselings vermenigvuldigen was voorgeschreven. Verschillende voorbeelden daarvan, ontleend aan STIFEL en ALBERT GIRARD, voert hij tot staving van zijne bewering aan.

Een ander punt in de Ars logistica komt den schrijver voor van gewicht te zijn. Even vóór het handschrift van NAPIER afbreekt, spreekt deze van een groot algebraïsch geheim, waarvan hij thans den grondslag heeft gelegd, dat voor zoover hij weet, nog door niemand is onthuld, maar waarvan later zal blijken, hoezeer het aan deze kunst en aan de overige deelen der wiskunde ten voordeele strekt. Men heeft getracht deze geheimzinnige woorden te verklaren. MARK NAPIER heeft gemeend, dat zijn groote voorzaat hier de invoering der imaginairen in de algebra op het oog had. Den schrijver komt terecht deze onderstelling onhoudbaar voor. Hij betoogt, dat het den wiskundigen van vóór 1594 aan een helder inzicht in den aard der imaginairen ontbrak. Ten bewijze daarvan citeert hij den helderzienden STEVIN, waar deze naar aanleiding van eenige zonderlinge opvattingen van BOMBELLI onverholen van zijne geringschatting en afkeer van alle bemoeiing met imaginaire getallen doet blijken, eene zienswijze, die ook na STEVIN nog wel aanhangers gevonden heeft. Volgens den schrijver moet de duistere zinsnede anders worden verklaard. Hij vestigt de aandacht er op, dat men, toen NAPIER vermoedelijk deze woorden schreef, nog steeds gewoon was de oplossing der vierkantsvergelijkingen te laten berusten op meetkundige beschouwingen, waardoor men minstens drie verschillende, door de teekens der coëfficienten bepaalde, gevallen van oplossing had te onderscheiden. NAPIER nu ontdekte eene analytische

oplossing, die alle gevallen tegelijk omvatte en deze uitkomst werd door hem verkregen, door te letten op de tweewaardigheid van den te trekken vierkantswortel. De schrijver betoogt verder, dat hoewel VIÉTA en STEVIN, de tijdgenooten van NAPIER, ongetwijfeld met de behandeling der vierkantsvergelijkingen volkomen vertrouwd waren, er voor dezen laatste reden bestond om te gelooven, dat hij het eerst de tweewaardigheid der evenmachtswortels had ingezien.

Evenals nu de logarithmen NAPIER's arcanum arithmeticae uitmaken, zegt de schrijver, is dit beginsel der tweewaardigheid zijn arcanum algebrae, waarvan hij ook bij de oplossing der hoogere machtsvergelijkingen de grootste verwachtingen koesterde.

Het zal wel nimmer gelukken de beteekenis van NAPIER's geheimzinnige uitlating op afdoende wijze vast te stellen, en wij moeten ons hier bepalen met te verklaren, dat hetgeen de schrijver tot verdediging van zijne vernuftig gevonden onderstelling aanvoert, haar ontegenzeggelijk een zekeren graad van waarschijnlijkheid verleent.

Ten slotte eindigt des schrijver's verhandeling met de commentaar der beide boeken van NAPIER's Algebra, die over de herleiding van wortelvormen en over de algemeene rekenkunde handelen.

Ons oordeel over het werk van den heer GRAVELAAR samenvattende, kunnen wij hem niet anders dan lof geven voor de wijze, waarop hij zijn taak heeft volbracht, en die overal getuigt van zijn streven om zoo volledig mogelijk te zijn.

Door de groote belezenheid, die hij zich heeft verworven, door de nauwgezetheid, waarmede hij alle geschriften van NAPIER zonder onderscheid heeft bestudeerd, is hij er in geslaagd een geheel te leveren, dat hoewel het uit den aard der zaak niet geheel en al een oorspronkelijk karakter dragen kan, voorzeker van groote waarde is voor ieder, die zich een duidelijke voorstelling wenscht te vormen van den invloed, dien NAPIER op de ontwikkeling der wiskunde heeft gehad. Gewaagt men veelal, wanneer van NAPIER sprake is, slechts van zijne uitvinding der logarithmen en van zijne verdiensten op het gebied der trigonometrie, door ook het licht te laten vallen op NAPIER's minder bekende geschriften, is door den heer GRAVELAAR een juister en vollediger beeld van den grooten wiskundige ontworpen.

Wij hebben de eer aan de Afdeeling voor te stellen om deze verdienstelijke verhandeling in de werken der Akademie op te nemen.

J. C. KLUYVER.
D. J. KORTEWEG.

De conclusie van het verslag om deze verhandeling op te nemen in de Werken der Akademie wordt goedgekeurd.

Aardkunde. — De Heer VAN DIESEN brengt, ook namens den Heer VAN BEMMELEN, het volgende verslag uit over de verhandeling van Dr. J. LORIÉ, getiteld: „*Beschrijving van eenige nieuwe grondboringen*”.

Ondergeteekenden hebben de eer aan de Afdeeling verslag uit te brengen over de door Dr. J. LORIÉ aangeboden verhandeling, die in de vergadering van 29 October l.l. in hunne handen is gesteld. De titel is: *Beschrijving van eenige nieuwe grondboringen.*

In het jaarverslag, dat de Geologische Commissie in de Januari-vergadering uitbracht, kon zij reeds uitzicht geven op mededeeling der bevinding bij een ingesteld onderzoek van aardmonsters, afkomstig van eenige boringen, die tot verschillende, enkele zelfs tot aanzienlijke diepten, waren verricht op een zestal plaatsen van Nederland.

Dat onderzoek heeft zich uitgestrekt tot meer boringen dan toen werden genoemd. De Heer LORIÉ beschrijft thans de samenstelling van de monsters grond, opgehaald bij boringen, ten getale van:

2	bij	Assen,	2	bij	Haarlem,
6	„	Nijkerk,	1	„	Overveen,
2	„	Bussum,	1	„	Vogelenzang,
1	„	Alkmaar,	1	„	Katwijk a/d Rijn,
1	„	Zaandam,	1	„	Grave,
1	„	Aalsmeer,	1	„	Breda,
1	„	IJmuiden,	2	„	Steenbergen.

Te samen bij 23 boringen.

Voor het meerendeel zijn de monsters grond door den schrijver zelf onderzocht. Slechts van 2 te Nijkerk en van 1 te Zaandam heeft hij de beschrijving moeten opmaken uit hem ter hand gestelde lijsten. Van de zoo belangrijke 2de en diepere boring te Mariëndaal, waar op geringe diepte, onder het Diluvium het Plioceen optreedt, heeft hij de grondmonsters niet kunnen verkrijgen, en zich dus tot die der eerste boring (21 Meters) moeten bepalen.

Omtrent de 2de boring te Haarlem en de boringen te Overveen, te Vogelenzang en te Leiden verwijst hij naar zijne „Contributions à la Géologie des Pays-Bas”, stuk V, alwaar wij vermeld vinden, dat de monsters grond bewaard en door hem onderzocht werden. Ten aanzien van de beschrijving der eene boring te IJmuiden is de vraag bij ons gerezen, of ook hierbij geen melding behoorde gemaakt te worden van de eenige jaren vroeger, ten behoeve van de

sluisbouw gedane boringen, waarvan de uitkomst is afgebeeld in bestek N°. 100 van den dienst van 1891—1893.

Op eene teekening stelt hij de ligging voor van de grondlagen, die bij 17 der boringen zijn waargenomen, maar zouden tot verduidelijking de namen der plaatsen nog moeten worden bijgevoegd, en de volgnummers IV, V, VI, VII, VIII iets moeten dalen. Op twee schetskaartjes, die als houtsneden tusschen den tekst gedrukt zouden kunnen worden, is de plaats der boorpunten bij Assen en bij Nijkerk aangewezen. Op het eerste kaartje zouden de nummers I en II nog dienen te worden gesteld bij de twee punten, waarvan de uitkomst der boring beschreven wordt. Op de beschrijving van de monsters van elke boring laat de Heer LORIÉ eene beschouwing volgen over de soort en de dikte der geologische lagen, welke uit de monsters mogen afgeleid worden. Onder de beschouwingen, in wier waardeering wij ons trouwens niet mogen begeven, trok bijzonder onze aandacht de opmerking, dat bij de boring te Aalsmeer reeds op 10 Meter beneden A. P. het grinddiluvium en wel met groote keien een aanvang neemt. Daar diluviaalzand gemakkelijk water doorlaat, mag verband worden gezien in zijn aanwezigheid en het nabij Aalsmeer opwellend water in den Haarlemmermeerpolder, vermoedelijk ter plaatse, waar door uitdieping der tochten de zandlaag, die op het diluviale grindzand rust, is ontbloot en ingegraven.

Wij zien in de beschrijving eene belangrijke aanwinst van bouwstoffen voor de samenstelling der nieuwe geologische kaart, en vinden dus vrijheid hare opneming in den bundel van „Mededeelingen omtrent de geologie van Nederland" aan te bevelen.

De bovengemaakte opmerkingen en enkele andere verbeteringen, die in kantaanteekeningen door ons vermeld zijn, zouden aan de overweging van den schrijver kunnen worden onderworpen.

's Gravenhage,
Leiden, November 1898.

VAN DIESEN.
J. M. VAN BEMMELEN.

De conclusie van het verslag om deze verhandeling op te nemen in de Werken der Akademie wordt goedgekeurd.

Dierkunde. — De Heer HUBRECHT spreekt over: „*Bloedvorming in de placenta van Tarsius en andere zoogdieren.*"

Omtrent het eerste ontstaan van de roode bloedlichaampjes der zoogdieren is tusschen de verschillende onderzoekers, die zich daarmede in de laatste dertig jaren hebben bezig gehouden, nog geen eenstemmigheid bereikt. Gedeeltelijk kan dit het gevolg zijn van den

wensch om de kernlooze roode bloedlichaampjes der volwassen zoogdieren als gelijkwaardige morphologische elementen te beschouwen met de kernhoudende roode bloedlichaampjes der lagere vertebraten en der zoogdier-embryonen.

Tegen deze beschouwing zijn SCHÄFER, SEDGWICK-MINOT en vroeger ook RANVIER (wiens proefondervindelijk bewijs ten vorige jare door VOSMAER echter voldoende wederlegd werd) opgekomen. De beide eerstgenoemde beschouwen de kernlooze zoogdier-bloedlichaampjes als plastiden, die gevormd worden in cellen, op analoge wijze als de chlorophylkorrels in planten-cellen. De meerderheid der overige onderzoekers houden de kernlooze zoogdier-bloedlichaampjes voor cellen waaruit de kern òf is uitgestooten (RINDFLEISCH, VAN DER STRICHT, BIZZOZERO, SAXER, KOSTANECKI, HOWELL, MONDINO), òf allengs binnen de bloedcel verdwijnt (KÖLLIKER, NEUMANN, SANFELICE, SPULER, LÖWIT, ELIASBERG, FREIBERG, GRÜNBERG, ISRAEL, PAPPENHEIM). DISSE schreef daarover in 1895: „Eine sichere Entscheidung der Frage nach dem Modus der Entkernung der rothen Blutzellen erscheint einstweilen unmöglich, da die directe Beobachtung des Vorgangers der Entkernung im strömenden Blut unthunlich ist."

Wanneer men in de geconserveerde placenta van zeer verschillende zoogdieren en in zeer verschillende ontwikkelingsstadiën de aldaar langs elkander heenstroomende bloedlichaampjes van het embryo met die van de moeder vergelijkt, dan wordt men getroffen door twee feiten. Vooreerst dat de kernen der embryonale bloedlichaampjes in vele opzichten verschillen van de kernen der alleroudste bloedcellen die in de „area vasculosa" der navelblaas ontstaan. Ten tweede, dat eerstgenoemde „kernen" en niet het haar omgevende lichaampje in grootte en zeer dikwijls ook in kleur-opslorpend vermogen geheel overeenstemmen met de kernlooze bloedlichaampjes van de moeder, zoodat zich als van zelf de vraag voordoet òf, zoo de kernvoerende embryonale bloedlichaampjes door uitstooting van de „kern" in kernlooze zoogdierbloedlichaampjes overgaan, het niet veeleer die zoogenaamde „kern" (die van een normale celkern merkbaar verschilt) zou wezen, die aan het definitieve kernlooze bloedlichaampje gaat beantwoorden, dan het hulsel waaruit zij werd uitgestooten.

Waarneming van een geheel andere reeks van verschijnselen in de placenta van Tarsius spectrum komen dit vermoeden bevestigen. Deze maken het waarschijnlijk dat tijdens de wording der Tarsius-placenta een deel van het celmateriaal, dat bij die wording eene actieve rol speelt, bloedlichaampjes levert, die in het daar doorheenstroomende moederlijke bloed vrijkomen. Deze bloedlichaampjes, geheel

overeenkomende met die welke wij in de moederlijke bloedvaten allerwege aantreffen, zijn dan niet uit het celplasma maar uit het kernplasma afkomstig en bestaan niet uit het voor de celkern typische chromatine, maar in hoofdzaak uit nucleolaire zelfstandigheid, die naast de chromatine in veel celkernen een rol speelt. Op velerlei wijze doet zich die haematopoiese in de Tarsius-placenta voor. Hier en daar zien wij een nucleolair lichaampje, terwijl het kernvlies onduidelijk wordt en eindelijk verdwijnt, naar buiten treden, en terwijl het zich onder de circuleerende bloedlichaampjes mengt van deze onherkenbaar worden. Naast deze meer eenvoudige wijze van ontstaan vinden wij andere, waarbij groote, zoogen. reuzencellen met gelobde en in allerlei richting uitbottende kernen een rol spelen. Talrijke kernfragmenten worden daaruit vrijgemaakt, terwijl de kern zelve te gronde gaat. Zij zijn van gelijke grootte, verhouden zich allen op gelijksoortige wijze tegenover de meest verschillende kleurmiddelen en zouden als „haematogoniën" kunnen worden aangeduid. Alle overgangen van deze haematogoniën tot normale bloedlichaampjes werden waargenomen en evenzoo hare herkomst uit de vergroote celkern (en niet uit het celplasma) vastgesteld. Naast moederlijke, nemen ook embryonale trophoblastcellen, onder geheel overeenkomstige woekeringsverschijnselen aan deze bloedvorming deel, en worden ook de door deze geleverde lichaampjes in de moederlijke bloedbanen rondgevoerd.

Aan de reuzencellen der Tarsius-placenta kan niet op houdbaren grond destructieve beteekenis worden toegekend: zij zijn wel degelijk opbouwende elementen, die niet alleen bloedlichaampjes, maar ook wanden van bloed-lacunen leveren; een dubbele rol die solide celstrengen bij lagere vertebraten zoo dikwijls vervullen.

Vermelding verdient, dat de rol die reuzencellen met eigenaardig prolifereerende kernen bij de bloedvorming in het beenmerg en in de lever en milt van zoogdieren vervullen door NEUMANN, KÖLLIKER, PEREMESCHKO, KUBORN, SAXER, ELIASBERG, FREIBERG e. a. uitdrukkelijk op den voorgrond gebracht wordt, terwijl vele van hen in de kernproliferatie dezer reuzencellen (wel te onderscheiden van de bijv. in het beenmerg daarnaast voorkomende andere reuzencellen, de osteoklasten) de eerste aanleiding tot vorming van bloedlichaampjes zien, zij het ook dat geen van hen de meening heeft uitgesproken, dat deze laatsten niet als cellen, maar als kernderivaten moeten worden beschouwd. Doen wij dit laatste op grond van hetgeen wij bij Tarsius waarnemen, dan wordt ook licht geworpen op de ontwikkeling van de volwassen kernlooze bloedlichaampjes uit de embryonale kernhoudende, hierboven als soortgelijk verschijnsel aangeduid.

Overeenkomstige haematopoietische verschijnselen worden in de placenta van Tupaja waargenomen, die in bijzonderheden verschillen, maar in hoofdzaak overeenkomen met wat hier voor Tarsius beschreven werd.

Of ook bij andere zoogdieren bloedvorming in de placenta voorkomt, moet nauwkeurig worden nagegaan. Voor de vleermuis-placenta geeft NOLF, voor de konijnen-placenta MAXIMOW, voor den mensch SIEGENBEEK VAN HEUKELOM afbeeldingen van met het moederlijk bloed vermengde lichaampjes, die ik in gedaante en herkomst met mijne „haematogoniën" op eene lijn wensch te stellen en van welke eerst- en laatstgenoemde uitdrukkelijk verklaren, dat zij zich door zekere kenmerken van polynucleaire leucocyten laten onderscheiden.

Geen van hen brengt echter het waargenomene met haematopoiese in verband. Trouwens hebben vroeger MASQUELIN en SWAEN bij het konijn (1880) en FROMMEL bij de vleermuis (1888) reeds beweerd bloedvorming in de placenta te hebben waargenomen. Hunne waarnemingen hebben tot heden weinigen overtuigd en komen in de bijzonderheden met de mijne niet overeen. Op grond van hetgeen ik aan konijn, egel, spitsmuis of mol kon waarnemen heb ik nooit tot het bestaan van haematopoietische processen in de placenta durven besluiten: alleen de ongewoon duidelijke beelden die Tarsius aanbiedt dwingen mij tot de hierboven zeer in het kort geschetste gevolgtrekking, die echter allerminst eene generalisatie bedoelt te zijn. Zeer zeker missen bijv. de Ungulata en de Lemuriden, sommige Edentata en vermoedelijk ook de Cetacea zoodanige haematopoiese. Hare sterke ontwikkeling bij Tarsius staat misschien in verband met de ongunstige verhouding waarin zich het kleine, tengere moederdier tegenover het relatief groote foetus bevindt, terwijl na elken partus gemeenlijk onverwijld eene nieuwe zwangerschap intreedt, eene omstandigheid, die voor de moeder misschien eenigszins uitputtend, maar voor den verzamelaar van embryologisch materiaal buitengewoon gunstig is.

Binnen kort hoop ik deze korte mededeeling aan te vullen door eene meer uitvoerige, met afbeeldingen toegelicht, die in het verslag van het Zoölogisch Congres, in 1898 te Cambridge gehouden, het licht zal zien.

Deze mededeeling geeft aanleiding tot een discussie tusschen den Heer MAC GILLAVRY en den Spreker.

Plantenkunde. — De Heer BEIJERINCK spreekt: „*Over een Contagium vivum fluidum als oorzaak van de Vlekziekte der Tabaksbladen*," en biedt hierover een uitvoerig opstel voor de Verhandelingen der Akademie aan.

De bladvlekziekte der tabaksplant, ook wel mozaïekziekte genoemd, bestaat in een verkleuring van het bladgroen, vleksgewijze over de bladschijf verdeeld, later gevolgd door het afsterven van een gedeelte of van al het weefsel, waaruit de vlekken oorspronkelijk bestonden. De verkleuring wordt gewoonlijk het eerst zichtbaar nabij de bladnerven en bestaat dan in een sterke vermeerdering van het bladgroen; later worden juist de tusschenruimten tusschen de sterk groene vlekken aangetast door een verbleekingsproces, dat meestal niet verder gaat dan tot geelkleuring, maar in enkele gevallen tot albinisme aanleiding geeft. De donkergroene plekken groeien aanvankelijk sterker dan het overige gedeelte der bladschijf, waardoor zij tot blaasachtige uitpuilingen worden, die zich uit de bovenvlakte der bladschijf verheffen. Dit laatste verschijnsel ziet men echter vaker bij de kunstmatige infectieproeven dan op de tabaksvelden, waar ook de zieke bladschijven vlak plegen te blijven. De derde phase der ziekte bestaat in het plaatselijk afsterven van honderden of duizenden, onregelmatig over de bladschijf verspreide kleine vlekjes, die spoedig bruin worden, zeer broos zijn en reeds bij het afplukken der bladen in gaten kunnen veranderen. Zij maken het tabaksblad geheel waardeloos om als dekblad voor sigaren te dienen.

De Heer ADOLF MAYER toonde in 1885 aan, dat deze ziekte besmettelijk is. Hij perste het sap uit zieke planten, vulde daarmede capillairbuisjes, stak deze in gezonde planten en bevond, dat na een tijdsverloop van twee à drie weken deze eveneens ziek werden.

In 1887 trachtte ik de vraag te beantwoorden of zich niet een of andere parasiet liet aanwijzen, aan welke de ziekte kon worden toegeschreven. Gemakkelijk was aan te toonen, dat indien dit het geval mocht zijn, alleen aan bacteriën kon worden gedacht, omdat bij het mikroskopisch onderzoek op geenerlei wijze iets van mikroben te ontdekken valt. De bacteriologische kultuurmethoden leerden, dat aërobe bacteriën onmogelijk de ziekte konden veroorzaken, zij ontbreken geheel, zoowel in de weefsels der gezonde als der zieke planten. Later ben ik tot dezelfde gevolgtrekking gekomen ten aanzien der anaëroben. Het stond toen vast, dat hier een voorbeeld van een ziekte was gevonden, welke door een contagium wordt veroorzaakt, dat niet overeenstemt met het begrip, dat aan het con-

tagium fixum is verbonden. Dit gaf mij aanleiding om in 1897 en 1898 nieuwe infectieproeven uit te voeren ten einde de eigenschappen van het contagium nader te leeren kennen. De voornaamste resultaten, welke daarbij zijn verkregen, zijn de volgende. [1])

Vooreerst bleek, dat het uit de zieke planten geperste sap, door zeer dichte bougies gefiltreerd, volkomen bacteriënvrij doorliep, zonder aan virulentie te verliezen. Hierbij werd in het filtraat zoowel naar aëroben als naar anaëroben gezocht, echter zonder eenig gevolg. Het bougiefiltraat is omstreeks 3 maanden bewaard, daarbij bacteriënvrij gebleven en heeft voor herhaalde proeven gediend; steeds is de ziekte daardoor opgewekt. Of en wanneer het werkeloos wordt is nog niet vastgesteld.

Ten einde de vraag te beantwoorden of het virus als corpusculair of wel als opgelost en vloeibaar moest worden aangemerkt, werd fijngewreven bladmoes van zieke planten over dikke agarplaten uitgespreid en aan diffusie overgelaten. Een uit discrete deeltjes bestaand virus zou op de oppervlakte van de agar moeten achterblijven en de agar in de diepte niet virulent kunnen doen worden; een in water opgelost virus zou daarentegen tot op zekere diepte in de agarplaat kunnen doordringen. Na een diffusietijd van omstreeks tien dagen, welke op grond van de mij bekende diffusiesnelheid van diastase en trypsine als voldoende langdurig werd beschouwd, werd de oppervlakte van de agarplaat eerst met water en daarna met sublimaatoplossing gereinigd en voorzichtig met een scherpe platinaspatel verwijderd, zoodat het binnendeel van de agar bereikt kon worden, zonder met de aan de oppervlakte klevende deeltjes in aanraking te komen.

Infectieproeven met deze diepere lagen uitgevoerd veroorzaakten even goed de ziekte als het bougiesap, zoodat er geen twijfel mogelijk schijnt, of het contagium moet als geschikt voor diffusie en dus als vloeibaar worden beschouwd.

De infectieproeven met het perssap geschiedden door inspuiting met de PRAVAZ'sche spuit. De daarvoor meest geschikte plaats is de stengel, en wel bepaaldelijk de jongste, nog in groei verkeerende deelen ervan. Hoe meer de plaats van inspuiting nabij den eindknop is gelegen, des te eerder worden de gevolgen daarvan zichtbaar. Het onderzoek leerde namelijk, dat alleen die bladen voor de infectie vatbaar zijn welke nog in een toestand van celdeeling en

[1]) Mijn proeven werden genomen gedeeltelijk met de te Amerongen gekweekte variëteit, gedeeltelijk met planten uit Erfurter zaad. Van verschillende kanten ontving ik zieke planten, waarvoor ik hier aan de zenders mijn dank betuig.

groei verkeeren. Meristemen zijn verreweg het gevoeligst. Door van dit laatste feit gebruik te maken en het virus voorzichtig zeer nabij actieve meristemen in te spuiten, gelukte het mij in den laatsten tijd de gevolgen der infectie reeds na drie à vier dagen waar te nemen, terwijl men anders twee à drie weken daarop wachten moet. Volwassen bladen, ja, zelfs bladen wier cellen nog in de periode van celstrekking zijn, maar zonder zich meer te deelen, zijn niet vatbaar voor de infectie.

Daar de hoeveelheid virus, welke aanleiding kan geven tot het ontstaan van een groot aantal zieke bladen, uiterst gering kan wezen, en het sap van deze bladen geschikt is om een onbegrensd aantal nieuwe planten te infecteeren, is het duidelijk, dat het virus zich in de plant vermenigvuldigen moet. In verband met het voorgaande kan dit alleen geschieden in en met de in celdeeling verkeerende cellen der plant, terwijl een vermeerdering van het virus in de volwassen weefsels der plant niet bestaat. Deze eigenschap van het virus herinnert aan de werking der cecidiogene stoffen, welke eveneens alleen op groeiende en in celdeeling verkeerende plantendeelen invloed uitoefenen. Buiten de plant schijnt het niet mogelijk te zijn het virus tot vermeerdering of groei te brengen. Dit moet besloten worden uit het feit, dat bougiesap, gemengd en langdurig bewaard met het sap van gezonde planten, niet alleen niet aan virulentie wint, maar juist in dezelfde mate aan virulentie verliest alsof het met water alleen verdund ware geworden. Het is niet moeielijk om zich daarvan te overtuigen want de hoeveelheid van het gebruikte virus is van grooten invloed op de verschijnselen en het verloop der vlekziekte. Indien namelijk een groote hoeveelheid van het virus tegelijk in de plant wordt ingespoten, vertoonen de eerste zieke bladen, welke zich uit den knop ontwikkelen, niet alleen de gewone aan de ziekte eigenaardige kenmerken, maar bovendien een zeer opmerkelijke vertraging en staking van den groei, waardoor het blad vooreerst veel kleiner blijft dan normale bladen, maar waarbij ook, door het kort blijven van sommige zijnerven, diepe, onregelmatige insnijdingen in den rand ontstaan. Daar het bladgroenweefsel slechts onvolkomen tot ontwikkeling komt en vooral nabij de nerven de chlorophyllvorming onvolkomen is, verkrijgen deze bladen een zeer opvallend streperig aanzien en behooren, naar hun vorm, tot de echte monstrositeiten. [1]) Bij het gebruik van een kleine hoeveelheid van het virus ontstaan zulke misvormingen in het geheel niet, zoodat

---

[1]) Bij een mijner planten had zulk een blad de gedaante van een ascidium aangenomen.

het mij toeschijnt, dat een vermeerdering van de virulentie van het sap, onder de bovengenoemde omstandigheden, mij niet zou hebben kunnen ontgaan.

Ik beschouw het daarom als bewezen, dat de reproductie van het virus alleen kan plaats hebben op de beschreven wijze, met en door middel van de celdeeling der plant. Het komt mij voor, dat dit feit in verband moet staan met de vloeibare of opgeloste natuur van het virus, want van een contagium fixum, ook al ware het zoo fijn, dat het zich aan de directe mikroskopische waarneming zou onttrekken, is het niet wel in te zien, waarom het zich niet, evenals de parasietische bacteriën, ook buiten de voedsterplant zou kunnen vermeerderen. Zelfs schijnt het niet onmogelijk, dat een mikroskopisch onzichtbaar, maar toch corpusculair contagium, tot het ontstaan van makroskopisch zichtbare koloniën op kultuurgelatine aanleiding zou kunnen geven. Een opgelost en voor diffusie geschikt virus, gelijk dat der vlekziekte, moet in de gelatine of agarplaten naar binnen dringen en, indien het daar voor reproductie vatbaar is, de chemische natuur van de als voedsel aangeboden stoffen doen veranderen, hetgeen wellicht aan verandering van kleur of brekingsvermogen der platen zou kunnen worden waargenomen. Bij het „uitzaaien" van het virus op moutextractgelatine, en op platen verkregen door stolling van een planteninfusie met 2 % rietsuiker en 10 % gelatine, — volgens mijn ondervinding uitmuntende kultuurgronden voor „planten-bacteriën", — konden zulke veranderingen volstrekt niet worden waargenomen. Bovendien is reproductie van een opgeloste stof wel is waar niet ondenkbaar, maar het is moeielijk zich voor te stellen hoe zij zou moeten geschieden. Een deelingsproces toch in de molekulen, dat tot vermenigvuldiging daarvan aanleiding geeft, stuit naar het mij voorkomt op groote bezwaren; zelfs het begrip van „molekulen welke zich voeden", komt mij voor onduidelijk, zoo niet tegenstrijdig te zijn. Tot zekere hoogte is er dus een verklaring van de vermeerdering van het contagium gelegen in de omstandigheid, dat het daarvoor aan het protoplasma van de levende cel moet gebonden zijn en daardoor dan als 't ware bij de reproductie wordt meegesleept; in elk geval schijnen twee raadsels daardoor tot één teruggebracht te zijn [1]).

---

[1]) Wellicht zal men op grond van deze overwegingen aan de mogelijkheid denken, dat de enzymen, op overeenkomstige wijze als het contagium fluidum, in de cellen gereproduceerd worden en dus eveneens tot op zekere hoogte als zelfstandig bestaand zouden kunnen worden beschouwd. Ik wensch dienaangaande het volgende op te merken. Zuivere gist in diastasehoudende voedingsvloeistoffen gekultiveerd, neemt daaruit een niet onbelangrijke hoeveelheid diastase op, die er moeielijk door uitwas-

Wordt de grond, waarin tabaksplanten groeien met het virus besmet, dan ziet men na eenigen tijd de ziekte in den eindknop verschijnen. Het tijdsverloop is daarbij verschillend en afhankelijk van de grootte der plant; bij kleine planten zag ik twee weken, bij grootere drie tot zes weken na de infectie de eerste ziekteverschijnselen aan de nieuwgevormde bladen in den eindknop. Wortel en stengel moeten daarbij het virus soms tot op zeer aanmerkelijke afstanden wegvoeren en voortgeleiden. Verschillende waarnemingen schijnen te bewijzen, dat deze geleiding bij uitzondering langs het xyleem, dus met den waterstroom geschiedt, gewoonlijk echter den zoogenoemden afdalenden sapstroom volgt en dan vermoedelijk langs de phloeembundels plaats heeft. Het eerste moet afgeleid worden uit de volgorde, waarin de ziekteverschijnselen optreden bij het invoeren van een groote hoeveelheid van het contagium in de stengelorganen, waarbij het allereerst die gedeelten der jonge bladen ziek worden, welke aan de sterkste transpiratie zijn onderworpen, zooals de toppen en de randen daarvan, die vrij uit den eindknop naar buiten steken. Tot de geleiding van het virus langs het phloeem moet worden besloten uit de volgende waarneming. Worden de middelnerven van volwassen of in strekking, maar niet meer in celdeeling verkeerende bladen geïnfecteerd, dan blijven deze zelve gezond, maar het virus keert daaruit eerst naar den stengel terug om van daaruit op de gewone wijze de meristemen van de knoppen en de in aanleg verkeerende bladen te besmetten. De terugkeer van 't virus uit het blad naar den stengel moet ongetwijfeld langs den weg van den neerdalenden sapstroom geschieden, dat is langs het phloeem.

Van den wortel uit is de besmetting mogelijk zelfs nog bij planten die reeds twee of meer decimeters hoog zijn. Of hiervoor wortelverwondingen noodzakelijk zijn is nog niet uitgemaakt; waarschijnlijk kunnen de wortels door hun gesloten oppervlakte het virus uit den grond opzuigen. Daar de besmetting alleen in de knoppen en de meristemen kan geschieden, geeft het aantal gezonde bladen, welke beneden aan de plant voorkomen, een aanwijzing omtrent het tijd-

---

schen geheel aan te onttrekken is. Groeit deze gist echter verder voort in een diastasevrij medium, dan is de diastase spoedig geheel verdwenen. Dat dit zou kunnen worden toegeschreven aan incongruentie tusschen het protoplasma der gistcel en het diastasemolekuul, zoodat de blijvende verbinding wellicht met andere mikroben of met de weefselcellen van hoogere organismen zou kunnen gelukken, is niet waarschijnlijk daar de gistcel toch niet absoluut vrij is van diastaseachtige lichamen en bijv. een weinig glukase bevat. Voorloopig moet ik dus een dergelijke beschouwing voor onvruchtbaar houden.

stip wanneer de infectie heeft plaats gehad, indien het virus door den wortel is binnengedrongen.

Het virus kan zonder verlies van virulentie gedroogd worden en dan bijv. in den grond overwinteren, maar het wordt daarbij toch gedeeltelijk vernietigd, evenals vele bacteriën- en gistsoorten. Ook de bladen behouden na het drogen hun virulentie. De kleinste stukjes van twee jaar in het herbarium bewaarde bladen, waren nog geschikt om groote, krachtige planten te infecteeren, zoodat het stof der broze zieke bladen ongetwijfeld tot de verspreiding der ziekte aanleiding geeft.

Gelijk te verwachten was wordt het virus in vochtigen toestand niet alleen door kookhitte, maar reeds bij 90° C. vernietigd. De laagste letale temperatuur heb ik nog niet vastgesteld; ik verwacht dat die bij omstreeks 70° à 80° zal gelegen zijn.

Boven werd er op gewezen, dat bij den invoer van een groote hoeveelheid virus eigenaardige bladmonstrositeiten ontstaan. Een ander, maar zeldzamer gevolg van de kunstmatige infectie is het bont of albicaat worden der bladen. Ik heb dit tot nu toe nog bij te weinig planten waargenomen, om met eenige zekerheid te kunnen aangeven hoe het kan worden voortgebracht, maar ik heb eenige hoop, dat dit door verdere proeven duidelijker zal worden.

Dat het albinisme of bont, ten minste een der vormen, waaronder het voorkomt, zekere verwantschap vertoont met de vlekziekte, wordt reeds door een oppervlakkige beschouwing van de laatste aannemelijk. Intusschen moet aangenomen worden, dat er een belangrijk verschil tusschen beiden bestaat, wat de wijze van overdraging betreft. Deze toch vereischt, voor zoover uit de weinige proeven dienaangaande kan worden afgeleid, bij het gewone albinisme een directe vergroeiing, door enten of oculeeren verkregen, van het bonte individu met het groene, dat men bont wenscht te maken. Infectie daarentegen, van groene planten met het sap of het fijngewreven weefsel van bonte variëteiten der zelfde soort, schijnt nooit eenig resultaat te geven, verhoudingen dus, welke geheel verschillen van die bij de tabaksziekte. Mijn bovengenoemde bonte planten wijzen er evenwel op, dat er nog een andere weg moet zijn, waar langs planten bont kunnen worden, namelijk door een buiten de plant bestaand virus.

Waarschijnlijk zijn er nog verschillende andere plantenziekten, welke op overeenkomstige wijze als de vlekziekte der tabaksplant ontstaan. De door Erwin Smith onder de namen van „Peach Yellows" en „Peach Rosette" beschreven ziekten van de perzikboomen in Amerika (U. S. Department of Agriculture, Farmers' Bulletin N°. 17, Washington 1894) worden volgens de beschrijving,

ongetwijfeld door een contagium fluidum veroorzaakt, maar het is nog twijfelachtig of de overbrenging daarvan alleen geschieden kan door enten en oculeeren, of, hetgeen waarschijnlijker is, ook langs andere wegen.

Een vraag van den Heer VAN WYHE wordt door den Spreker beantwoord, zoo ook de opmerking van den Heer HUGO DE VRIES over den door den Heer BEYERINCK gekozen naam voor het door hem ontdekte contagium. Op laatstgenoemde opmerking antwoordt de Spreker, dat hij het kenmerk van *leven* zoekt in het vermogen van zich te kunnen reproduceeren.

Scheikunde. — De heer BAKHUIS ROOZEBOOM spreekt: „*Over Stol- en Smeltverschijnselen bij stoffen, welke tautomerie vertoonen*".

De jongste ontdekkingen omtrent tautomerie-verschijnselen, welke hebben aan het licht gebracht, dat tautomere stoffen in vloeibaren staat opgevat moeten worden als mengsels van tweeërlei soort molekulen met verschillende structuur, hebben het vraagstuk aan de orde gesteld, hoe de verwikkelde smelt- en stolverschijnselen bij dergelijke stoffen verklaard kunnen worden, wanneer beide vormen of een van beide in vasten staat kunnen optreden.

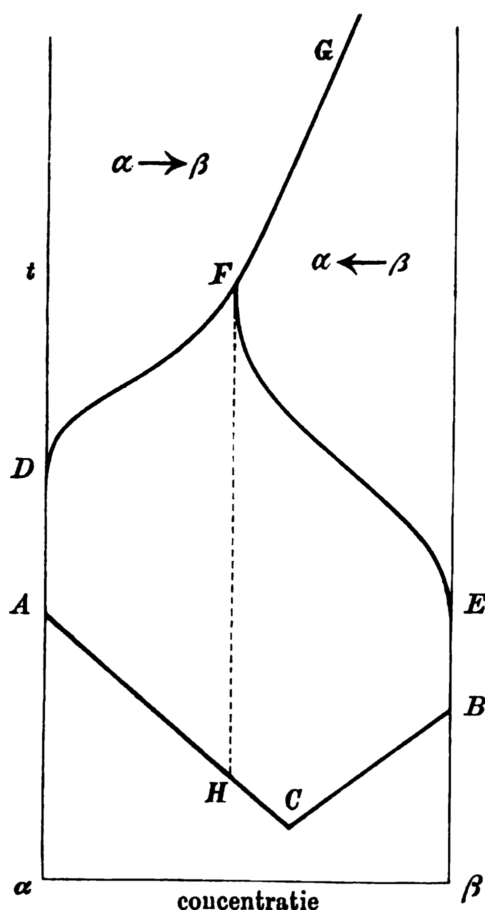
Hieromtrent zijn het laatste jaar enkele merkwaardige onderzoekingen verricht door BANCROFT en zijne leerlingen, welke zich vastgeknoopt hebben aan eene theoretische beschouwing van DUHEM.

Bij eene poging om de onderzoekingen van CLAISEN op dit gebied te ontwarren, was spreker tot geheel dezelfde uitkomsten gekomen, welke zich laten vereenigen tot een volkomen overzichtelijke grafische voorstelling.

Nu BANCROFT deze reeds heeft gepubliceerd zou geene aanleiding bestaan hierop terug te komen, indien niet alle voorbeelden door hem gekozen, betrekking hadden op gevallen, waarin alle smelt- en stolpunten in het temperatuurgebied liggen, waarbij in vloeibaren staat nog een evenwichtstoestand bereikt wordt tusschen de twee vormen. Hieraan is gewoonlijk het nadeel verbonden, dat bij de smelting en stolling geene zekerheid bestaat over de mengverhouding der twee vormen. Daardoor is het niet mogelijk quantitatieve voorstellingen te ontwerpen.

Tot recht begrip der verschijnselen is het derhalve gewenscht voorop te stellen eene afleiding van het gedrag van tautomere stoffen, wier stoltemperaturen beneden de temperatuurgrens liggen,

waarbij in vloeibaren staat nog omzetting tusschen twee vormen mogelijk is.



Noemen wij de beide vormen *α* en *β*, en stellen wij eene figuur op, waarin de mengverhouding van *α* en *β* op de horizontale as van 0—100 en de temperatuur op de vertikale as gemeten wordt.

In de gemaakte veronderstelling vertoont de stolling zich als het gewone meest eenvoudige type van de stolling van mengsels van twee stoffen, d.i. van de smeltpunten *A* en *B* der beide modificaties uitgaande, hebben wij twee smeltlijnen *A C* en *B C*, samenkomende in het punt *C*, beneden hetwelk *elk* vloeibaar mengsel volkomen stolt tot een conglomeraat van *α* en *β* kristallen.

Wij nemen nu aan dat bij hoogere temperaturen niet alle mengverhoudingen in vloeibaren staat mogelijk zijn, maar er zich een evenwichtstoestand instelt bij een voor elke temperatuur bepaalde mengverhouding van *α* en *β*. Wij stellen deze mengverhoudingen voor door de lijn *F G* welke willekeurig van links naar rechts stijgende geteekend is, hetgeen het geval voorstelt dat de overgang $\alpha \rightarrow \beta$ onder warmte-absorbtie geschiedt.

Het omgekeerde is ook mogelijk, of wel een vertikaal beloop als deze warmte nul is.

Links van de lijn *F G* is het gebied waarin de omzetting $\alpha \rightarrow \beta$, rechts dat, waarin de omzetting $\alpha \leftarrow \beta$ plaats vindt.

Indien nu bij lagere temperatuur beide omzettingen uitblijven dan ligt — naar analogie van vele andere verschijnselen uit den jongsten tijd — het vermoeden voor de hand, dat de overgang uit het gebied van *wederkeerig evenwicht* tot het gebied van geen evenwicht, gevormd wordt door twee gebieden van *eenzijdig evenwicht*, gelijk voorgesteld worden kan door de splitsing der lijn *G F* in twee

lijnen FD en FE, welke beneden zekere temperaturen op elk der assen uitloopen.

Verhit ik nu de vaste modificaties slechts weinig boven hun smeltpunt, dan zullen zij weer bij dezelfde temperaturen stollen kunnen als waarbij zij gesmolten zijn.

Verhit ik ze echter hooger en houd ik ze eenigen tijd bij eene temperatuur die behoort tot het gebied der eenzijdige of der wederkeerige evenwichten, dan zal er meer of minder omzetting in de vloeistof plaats hebben tusschen de twee modificaties, welke naar gelang van snelheid van afkoeling zich min of meer wijzigt. Van al deze omstandigheden zal afhangen op welke wijze de stolling verloopt, na terugkeer tot dit gebied.

Uit de figuur zijn de volgende conclusies af te leiden.

Geval I. De stof α of β wordt na smelting geruimen tijd verhit bij eene temperatuur, welke gelegen is *boven* die van het punt F. Daarna wordt de vloeistof *langzaam* afgekoeld.

Onverschillig hoe hoog de verhittingstemperatuur was en of van α of β werd uitgegaan, vangt nu de stolling aan in het punt H [1]) onder afzetting van vast α, totdat zij in C voltooid wordt onder afzetting van vast $\alpha + \beta$.

Geval II. De stof α wordt na smelting geruimen tijd verhit bij een temperatuur *beneden* F gelegen, daarna *langzaam* afgekoeld.

Het beginstolpunt is nu variabel, altijd hooger gelegen dan H, temeer naarmate de verhitting tot lagere temperatuur geschiedde. De eerste afzetting is vast α, zij verloopt tot C als eindpunt.

Uitgaande van β is, naarmate de verhitting meer beneden F geschiedde, het beginstolpunt eerst lager dan H, met afzetting van α, daarna dalend tot C, daarna rijzend langs CB onder afzetting van β. Het eindstolpunt blijft C.

Geval III. De stof α of β wordt na smelting geruimen tijd verhit bij eene temperatuur *boven* F, maar daarna *snel* afgekoeld.

Het beginstolpunt ligt, onverschillig of α of β uitgangspunt is, rechts van H, des te meer naarmate hooger verhit en sneller afgekoeld werd.

Het aanvangspunt der stolling kan zelfs voorbij C verschuiven

---

[1]) Het punt H ligt loodrecht onder F, of scherper nog onder het punt van FE waar aan deze kromme een vertikale raaklijn kan getrokken worden.

zoodat β de eerst afgezette stof wordt, mits de lijn $F\,G$ genoegzaam rechts loopt. Eindstolpunt blijft C.

Geval IV. De stof α of β wordt na smelting geruimen tijd verhit bij eene temperatuur *beneden* F en daarna *snel* afgekoeld.

De resultaten zijn voor α zoowel als voor β dezelfde als in Geval II.

Geval V. Indien de verhitting niet lang genoeg geschiedt om tot het eindevenwicht in den vloeistoftoestand te komen, zal — onafhankelijk van de ligging der verhittingstemperatuur — bij snelle afkoeling hetzelfde resultaat verkregen worden als in Geval II.

De snelheid van afkoeling, waarvan in Geval III—V sprake is, wordt verondersteld zoo groot te zijn, dat de vloeistof geene gelegenheid vindt hare bij hoogere temperatuur verkregen mengverhouding α/β te wijzigen Indien de snelheid van afkoeling minder groot is, heeft dit alleen ten gevolge, dat de verschillen tusschen het verkregen eerste stolpunt en het punt H minder groot worden dan bij zeer snelle afkoeling. De afwijkingen blijven echter in denzelfden zin.

De schijnbaar grillige verschijnselen van stolling laten zich derhalve bij kennis der lijnen $G\,F$, $F\,D$ en $F\,E$ met volkomen zekerheid vast stellen. Omgekeerd zou uit de waarneming der stoltemperaturen, nadat de stof α of β te voren een scherp afgebakenden weg doorloopen had, te concludeeren zijn tot de ligging van verschillende punten dezer lijnen, en alzoo hare richting vast te stellen zijn, als dit langs andere wegen niet mogelijk was.

De beschreven verschijnselen zullen zich niet alleen kunnen voordoen bij tautomere vormen, maar bij al die stoffen, welke in vloeistoftoestand twee modificaties kunnen geven, welke wederkeerig in elkaar om te zetten zijn.

Ook vele optische isomeren, die bij hoogere temperatuur evenwichten vertoonen, vallen dus onder deze categorie. Daar kan echter zeer dikwijls de zaak verwikkeld worden, omdat na transformatie van de d- of de l-verbinding ook de mogelijkheid ontstaat, dat zich de racemische verbinding van d—l in vasten staat afzet. Hiermee is echter ook gemakkelijk rekening te houden.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS spreekt over: „*Volumecontractie en drukcontractie bij mengsels.*"

De onderstelling van AMAGAT (C. R. 11 Juillet 1898), dat in een mengsel elk gas kan geacht worden het volume in te nemen, dat het afzonderlijk onder denzelfden druk en bij dezelfde temperatuur innemen zou, komt overeen met de onderstelling, dat bij menging onder standvastigen druk geen volumeverandering plaatsgrijpt, en dat er dus noch van positieve noch van negatieve contractie zou sprake zijn. Daar bij groote dichtheden (vloeistofdichtheid) menging in het algemeen met contractie gepaard gaat, kan de stelling, ook voor geringe dichtheden, slechts als een benadering bedoeld zijn. Voor geringe dichtheden kan deze stelling getoetst worden aan de toestandsvergelijking voor een mengsel.

Voor een molekulaire hoeveelheid van een mengsel, bestaande uit $m_1(1-x)$ en m_2x gewichtshoeveelheden geldt:

$$pv = MRT\frac{v}{v-b_x} - \frac{a_x}{v}$$

of bij benadering

$$pv = MRT - \frac{1}{v}(a_x - b_x MRT) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Voor elk der bestanddeelen zou voor een molekulaire hoeveelheid gelden

$$pv_1 = MRT - \frac{1}{v_1}(a_1 - b_1 MRT) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en

$$pv_2 = MRT - \frac{1}{v_2}(a_2 - b_2 MRT) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Stellen wij $v = v_1(1-x) + v_2x + \Delta_v$, en nemen wij in aanmerking dat $a_x = a_1(1-x)^2 + 2a_{12}x(1-x) + a_2x^2$
en $b_x = b_1(1-x)^2 + 2b_{12}x(1-x) + b_2x^2$ is, dan verkrijgen wij, als wij van vergelijking (1) aftrekken de som van $(1-x)$ maal vergelijking (2) en x maal vergelijking (3)

$$p\Delta_v = -\frac{1}{v}(a_x - b_x MRT) + \frac{(1-x)(a_1 - b_1 MRT)}{v_1} + \\ + \frac{x(a_2 - b_2 MRT)}{v_2}.$$

Daar zowel pv als pv_1 en pv_2 bij benadering gelijk zijn aan MRT, kunnen wij schrijven:

$$MRT\,\Delta_v = \{a_1(1-x) + a_2 x - [a_1(1-x)^2 + 2\,a_{12}\,x(1-x) + a_2 x^2]\}$$

$$- MRT\{b_1(1-x) + b_2 x - [b_1(1-x)^2 + 2\,b_{12}\,x(1-x) + b_2 x^2]\}$$

of

$$MRT\,\Delta_v = -x(1-x)\{[2\,a_{12} - a_1 - a_2] - [2\,b_{12} - b_1 - b_2]\,MRT\}$$

of

$$\Delta_v = x(1-x)\left\{\frac{a_1 + a_2 - 2\,a_{12}}{MRT} - (b_1 + b_2 - 2\,b_{12})\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

Uit deze vergelijking (4) volgt 1°. dat de absolute waarde der volumeverandering bij gegeven temperatuur onafhankelijk is van de drukking, waaronder de menging plaats heeft, natuurlijk zoolang deze blijft beneden de grens, waarvoor bovenstaande berekeningen nog als voldoende benaderingen geoorloofd zijn; 2°. dat de maximum-waarde dezer volumeverandering gevonden wordt voor $x = \frac{1}{2}$, dus als de te mengen stoffen gelijk volume hebben. Zoo zal voor lucht, die uit zuurstof en stikstof wordt samengesteld de volumeverandering slechts $^{16}/_{25}$ gedeelte bedragen van die welke gevonden wordt als gelijke volumes zuurstof en stikstof gemengd worden, natuurlijk de hoeveelheden zoo gekozen dat in beide gevallen het totale volume der te mengen stoffen even groot is; 3°. dat het van de waarde der uitdrukking:

$$\frac{a_1 + a_2 - 2\,a_{12}}{1 + \alpha t} - (b_1 + b_2 - 2\,b_{12}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

afhangt of er negatieve of positieve contractie plaats heeft.

Daar in de toestandsvergelijking als eenheid van volume gesteld is, het volume dat een molekulaire hoeveelheid onder den druk van 1 Atmospheer en bij 0° inneemt, is de grootheid Δ_v ook in die eenheid uitgedrukt.

De volumeeenheid in de drie vergelijkingen (1), (2) en (3) is wel niet absoluut gelijk, wegens de verschillende mate van afwijking van de wet van Boyle, maar de invloed daarvan kan bij deze berekeningen als afwijking van hoogere orde van kleinheid verwaarloosd worden.

Gaan wij over tot de discussie van de uitdrukking (5), dan merken

wij vooreerst op, dat $b_1 + b_2 - 2b_{12}$ gelijk 0 stellen gelijk staat met het covolume van een mengsel gelijk te achten aan de som der covolumes der bestanddeelen. Reeds de omstandigheid, dat het gemakkelijker valt om in een gegeven ruimte willekeurig gevormde lichamen, die gezamenlijk een bepaald volume innemen, te bergen als die lichamen in grootte verschillen, dan wanneer zij allen even groot zijn, maakt het echter waarschijnlijk, dat het covolume van een mengsel van molekulen van verschillende grootte wel kleiner zijn zal dan 4 maal het werkelijk volume. Bij de afleiding der toestandsvergelijking, waarbij echter de molekulen als bollen gedacht zijn, is dit dan ook door de berekening gebleken en is voor de waarde van $b_1 + b_2 - 2b_{12}$ gevonden $^3/_2 (\sqrt[3]{b_2} - \sqrt[3]{b_1})^2 (\sqrt[3]{b_2} + \sqrt[3]{b_1})$ [1]), een uitdrukking die altijd positief is. Aan den anderen kant leert deze uitdrukking, die gelijk 0 is, als $b_1 = b_2$ is, en positief is zoowel als $b_1 > b_2$ of als $b_1 < b_2$, dat voor klein verschil in grootte de waarde van $b_1 + b_2 - 2b_{12}$ zeer klein is. Mochten wij haar waarde verwaarloozen, dan hangt het alleen van het teeken van $2a_{12} - a_1 - a_2$ af, of er al of niet contractie zijn zal bij de menging.

Als $2a_{12} - a_1 - a_2$ positief is, wordt de menging door de molekulaire krachten bevorderd. Denken wij ons nl. de twee gassen vóór de menging, gescheiden door een mathematisch vlak, dan zijn $\frac{a_1}{v_1^2}$ en $\frac{a_2}{v_2^2}$ de krachten die zich tegen menging verzetten en is $\frac{2a_{12}}{v_1 v_2}$ de kracht, die de beide stoffen door de grenslaag heen trekt. In dit geval kan $v_1 = v_2$ gesteld worden, en blijkt dus het teeken van $2a_{12} - a_1 - a_2$ beslissend te zijn.

In het algemeen zullen wij wel recht hebben te verwachten, dat als de menging door de molekulaire krachten bevorderd wordt, en als ten gevolge der menging een kleiner molekulair volume van het uitwendig volume moet afgetrokken worden, beide omstandigheden positieve contractie (negatieve waarde van Δ_v) veroorzaken.

Mochten $(a_1 + a_2 - 2a_{12})$ en $(b_1 - b_2 - 2b_{12})$ beide positief zijn dan bestaat er een grenstemperatuur, waarbeneden Δ_v positief is en waarboven Δ_v negatief is, evenals dit voor de afwijking van de wet van Boyle bij een enkele stof het geval is. Maar in het algemeen is te verwachten, dat $-\Delta_v$ (volumecontractie) klein zal zijn, en dat dus de stelling van Amagat met hoogen graad van benadering zal gelden, ten minste in al die gevallen, waarbij de te mengen stoffen

[1]) Théorie Moléc. Arch. Néerl. Tom. XXIV.

weinig in eigenschappen verschillen. Ten eerste omdat $a_1 + a_2 - 2a_{12}$ en $b_1 + b_2 - 2b_{12}$ beiden gelijk 0 zijn, als de stoffen aan elkander gelijk zijn, en wij dus stellen kunnen, dat de waarde dezer grootheden, bij klein verschil, klein zal zijn ten opzichte van elk der termen, waaruit zij bestaan: bijv. $a_1 + a_2 - 2a_{12}$ klein ten opzichte van a_1 of a_2 en $b_1 + b_2 - 2b_{12}$ klein ten opzichte van b_1 of b_2. Ten tweede wegens den factor $x(1-x)$; — voor lucht bedraagt deze factor slechts $\frac{4}{25}$.

Aan de getallen, welke AMAGAT, voor lucht van de gewone temperatuur opgeeft (C. R. Acad. des Sciences, 11 Juillet 1898) en die bij een druk van 100 Atm. beginnen, is wel onze vergelijking (4) niet te toetsen, daar deze voor zoo hooge drukkingen geen voldoenden graad van verandering bezit, en omdat AMAGAT zelf tot het besluit komt, dat de gevonden afwijking valt binnen de mogelijke waarnemingsfouten. Het ware wenschelijk, dat dergelijke waarnemingen bij gelijk volume voor stoffen verricht werden, die ver in physische eigenschappen uiteen loopen. Voor toetsing zou dan de vergelijking (4) ook door een andere, die met hoogeren graad van benadering gelden zou, vervangen moeten worden. De term $a_1 + a_2 - 2a_{12}$ zou dan ook als de volumes v_1, v_2 en v merkbaar van elkander verschillen, vervangen moeten worden door:

$$v_1 v_2 \left\{ \frac{a_1}{v_1^2} + \frac{a_2}{v_2^2} - \frac{2a_{12}}{v_1 v_2} \right\}$$

een uitdrukking, die bij geringe dichtheid aan $a_1 + a_2 - 2a_{12}$ kan gelijkgesteld worden, maar die bij toenemende dichtheid al meer en meer nadert tot

$$b_1 b_2 \left(\frac{a_1}{b_1^2} + \frac{a_2}{b_2^2} - 2\frac{a_{12}}{b_1 b_2} \right) .$$

Ofschoon wij geen recht hebben te verwachten, dat (wat uit de benaderde vergelijking zou volgen) de waarde van Δ_v volkomen standvastig zal blijven bij allerlei graden van dichtheid, en in elk geval de reserve moet gemaakt worden, dat steeds of twee gasphasen of twee vloeistofphasen met elkander gemengd moeten worden, laat zich wel verwachten dat haar waarde binnen zekere eindige grenzen begrepen zal blijven, en dat dus wat bij twee kleine volumes (vloeistofvolumes) relatief groot kan schijnen, bij de zeer groote gasvolumes verwaarloosd zal kunnen worden.

De grootheid Δ_v is door KUENEN (Proefschrift 1892, Leiden) bij mengsels van koolzuur en chloormethyl waargenomen, en positief bevonden. Het is te betreuren, dat hij niet getracht heeft de waarde van Δ_v te bepalen, maar wel opgeeft de drukvermeerdering, die aangebracht moet worden, om de vergroting, die het volume ondergaan heeft weder weg te nemen. Nu moeten wij om ons resultaat bevestigd te vinden, dat namelijk Δ_v niet gelijk 0 is, maar over het beloop der isotherme een waarde van dezelfde orde van grootheid heeft, ingewikkelde berekeningen ondernemen. Had hij zich tot de waarneming van Δ_v bepaald, dan zou hij ongetwijfeld uit zijn proeven tot het quasi-constant zijn van Δ_v besloten hebben, en een benaderingsregel hebben kunnen geven, waaraan ik nu meen AMAGAT's naam te moeten verbinden, al moet dan ook AMAGAT's regel $\Delta_v = 0$ vervangen worden door Δ_v bij benadering constant.

De langwijlige berekeningen, die noodig zouden zijn om uit KUENEN's opgave der drukvermeerdering, noodig om Δ_v weg te nemen, Δ_v te berekenen, zal ik hier niet ten uitvoer brengen, maar ik wil mij met een approximatie vergenoegen, genoegzaam benaderd om te doen besluiten, dat de verschillende Δ_v's bij KUENEN's proeven grootheden van gelijke orde moeten geweest zijn.

Uit

$$p = \frac{MRT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

volgt

$$-\frac{dp}{dv} = \frac{MRT}{(v-b)^2} - \frac{2a}{v^3}$$

en

$$-MRT\frac{dp}{dv} = p^2 - \frac{a(a-2b\,MRT)}{v^4}$$

bij benadering.

Wij kunnen dus uit $\Delta_v = \dfrac{(1+\alpha t)(\Delta_p)'}{p^2}$ de grootheid Δ_v berekenen.

Drukverandering bij menging.

Atmosf.	Meng.	T. 433.0	403.0	373.0	343.0
10	$^3/_4$	10.06	10.07	10.08	10.08
	$^1/_2$	10.04	10.05	10.07	10.10
	$^1/_4$	—	10.06	10.07	10.09
30	$^3/_4$	30.67	30.85	31.20	—
	$^1/_2$	30.56	30.81	31.25	—
	$^1/_4$	—	30.78	31.06	—
50	$^3/_4$	52.4	54.4	—	—
	$^1/_2$	52.1	54.3	—	—
	$^1/_4$	—	53.1	—	—

Nemen wij als voorbeeld uit KUENEN's tabel, die ik hier heb overgenomen, $T = 403^\circ$ en $x = {}^1/_4$, dan vinden wij bij

$$p = 10 \ldots\ldots \quad \Delta_v = 0{,}0010$$

$$p = 30 \qquad \Delta_v = 0{,}0014$$

$$p = 50 \qquad \Delta_v = 0{,}0026$$

Ook uit KUENEN's getallen, waarvan hij zelf opmerkt, dat zij vrij onregelmatig verdeeld zijn, verkrijgen wij den indruk, dat de juiste bepaling aan de grens raakt van de waarnemingsfouten.

Uit de waarnemingen bij 433° vinden wij bij $x = {}^1/_4$

$$p = 10 \qquad \Delta_v = 0{,}00095$$

$$p = 30 \qquad \Delta_v = 0{,}00118$$

$$p = 50 \qquad \Delta_v = 0{,}00152$$

Volgens formule (4) moet bij hoogere temperatuur Δ_v kleiner zijn, wat ook bij de berekende waarden bevestigd wordt gevonden; overigens vertoonen zij niet zoo snelle toename bij 433° als bij 403°. Maar ik herhaal, wat ik reeds heb opgemerkt, dat ofschoon de benaderde formule voor Δ_v een constante waarde voor die grootheid aangeeft, wij nauwkeuriger formules noodig zouden hebben om den werkelijken gang aan te geven.

Vergelijken wij ter beoordeeling van den graad van benadering, waarmede de stelling van AMAGAT geldt, de berekende grootheid Δ_v met de waarde van Δ_p, als wij door Δ_p voorstellen het verschil in drukking van een mengsel, met die welke er zijn zou, als de wet van DALTON gelden zou.

Denken wij in een volume $= v$ eerst $1 - x$ molekulen van de eerste soort, en noemen wij den druk, welke dan heerscht $= p_1$. Daarna x molekulen van de tweede soort met den druk $= p_2$. En eindelijk het mengsel met den druk $= p$. Dan is $\Delta_p = p - (p_1 + p_2)$.

In het eerste geval is het molekulairvolume $= \frac{v}{1-x}$, in het tweede geval $= \frac{v}{x}$, en voor het mengsel $= v$. Wij hebben dus de drie

volgende vergelijkingen

$$p = \frac{MRT}{v - b_x} - \frac{a_x}{v^2}$$

$$p_1 = \frac{MRT(1-x)}{v - b_1\ (1-x)} - \frac{a_1\ (1-x)^2}{v^2}$$

en

$$p_2 = \frac{MRT\ x}{v - b_2\ x} - \frac{a_2\ x^2}{v^2}$$

en daaruit bij benadering

$$\Delta_p = p - (p_1 + p_2) = \frac{2\ MRT\ b_{12}\ x\ (1-x) - 2\ a_{12}\ x\ (1-x)}{v^2}$$

of

$$\Delta_p = 2\,\frac{(1 + \alpha t)\,b_{12} - a_{12}}{v^2}\,x\,(1-x)\,.$$

Beperken wij ons bij de discussie van de waarde van Δ_p eerst tot dezen benaderingsvorm, die genoegzaam nauwkeurig is bij geringen druk, dan zien wij 1°. dat Δ_p in hooge mate van de dichtheid afhangt, en wel evenredig aan het kwadraat der dichtheid; 2°. dat Δ_p op dezelfde wijze van de samenstelling van het mengsel afhangt als Δ_v en 3°. dat het teeken van Δ_p afhangt van het teeken van $(1 + \alpha t)\,b_{12} - a_{12}$. Deze uitdrukking kan niet als klein beschouwd worden, en verdwijnt volstrekt niet als de twee samen te mengen stoffen aan elkander gelijk zijn.

In dat geval is $b_{12} = b_1$ en $a_{12} = a_1$ en de grootte van Δ_p is dus van dezelfde orde als de afwijking van den druk bij het onderzoek van de wet van Boyle, en is dan ook als deze omgekeerd evenredig aan het kwadraat van het volume. Ook voor Δ_p is er een temperatuur, waarbij zij gelijk 0 is, evenals dit het geval is voor $p - p^1$, als p^1 de druk is die volgens de wet van Boyle zou heerschen en p de waargenomen druk. Beneden die temperatuur is Δ_p negatief, boven die temperatuur daarentegen positief. De overeenstemming in den gang van Δ_p met dien van $p - p^1$, als men het volume steeds kleiner maakt, is bijna volkomen.

Evenals bij voortgezette volumevermindering, er in die gevallen, waarin $p - p^1$ bij groot volume negatief is, een maximumwaarde voor dat verschil gevonden wordt, en er een volume bereikt kan

worden, waarbij $p - p^1$ weder tot 0 is afgedaald, om bij nog verdere volumevermindering van teeken om te keeren, is dit met Δ_p het geval [1]).

Om dit te doen zien, mag men zich echter niet vergenoegen met de benaderde waarde van vergelijking (5).

Een meer juiste waarde voor Δ_p is:

$$\Delta_p = 2x(1-x)\left\{ b_{12}(1+a_x)(1-b_x)\frac{(v-f)\,(1+\alpha t)}{(v-b_x)\,[v-b_1\,(1-x)]\,(v-b_2 x)} - \frac{a_{12}}{v^2}\right\},$$

als wij door f voorstellen de grootheid

$$(b_1 + b_2)\, x\,(1-x) + \frac{[b_2 x - b_1\,(1-x)]^2}{2\, b_{12}}.$$

Berekent men $p - p'$, dan vindt men:

$$p - p^1 = \frac{(1+a)\,(1-b)\, b\,(1+\alpha t)}{v\,(v-b)} - \frac{a}{v^2}$$

Is $a > (1+a)(1-b)\,b\,(1+\alpha t)$, dan is bij groot volume $p - p^1$ negatief en bij

$$v < \frac{b}{1 - \frac{b}{a}\,(1+a)\,(1-b)\,(1-\alpha t)}$$

daarentegen positief.

Nu is Δ_p wel van meer ingewikkelden vorm dan $p - p^1$. Maar dit is toch meer schijnbaar dan werkelijk.

Is $a_{12} > b_{12}\,(1+a_x)\,(1-b_x)\,(1+\alpha t)$, dan is Δ_p negatief bij groot volume, maar daarentegen positief voor v dicht bij b_x. Dat ook voor andere waarden van v bijv. tusschen b_x en $b_1\,(1-x)$ weder teekenomkeering zou komen, heeft voor de werkelijkheid geen beteekenis, omdat in v kleiner dan b_x het mengsel geen plaats zou kunnen vinden.

Een reeks waarden voor Δ_p, welke KUENEN uit zijn waarnemingen over mengsels van CO_2 en $CH_3\,Cl$ opgeeft en welke wij hier

---

[1]) Deze uitkomsten zijn reeds door MARGULES uit de waarnemingen van ANDREWS afgeleid. Wien Sitz. Ber. 1889, Band XCVIII, Seite 885. Men zie ook B. GALITZINE, Wied. Ann. Band XLI.

overnemen [1]) kunnen gebezigd worden om de hier aangetoonde eigenschappen van Δ_p te toetsen.

Afwijking van de wet van DALTON.

Vol. Meng.		T. 433.0		403.3		373.0		343.0	
		p.	Δ	p.	Δ	p.	Δ	p.	Δ
0.015	3/4	74.43	—5.9	62.8	—6.8	50.0	—8.9⁶	35.7	—11.7
	1/2	81.14	—9.1	71.3	—9.9	60.0	—11.9	48.8	—13.2
	1/4	——		78.5	—7.4	68.3	—8.8	57.7	—10.4
0.030	3/4	44.5	—1.6	39.7	—2.0	34.5	—2.6	28.93	—3.35
	1/2	46.2	—2.9	41.8	—3.2	37.0	—3.7	32.31	—4.10
	1/4	——		43.9	—2.1	39.5	—2.5	34.94	—2.96
0.045	3/4	31.58	—0.78	28.59	—0.96	25.46	—1.22	22.13	—1.55
	1/2	32.30	—1.38	29.50	—1.52	26.55	—1.78	23.62	—1.95
	1/4	——		30.50	—0.93	27.69	—1.16	24.83	—1.36
0.060	3/4	24.46	—0.81	22.30	—0.56	20.06	—0 70	17.72	—0.90
	1/2	24.83	—0.46	22.79	—0.89	20.66	—1.04	18.55	—1.14
	1/4	——		23.35	—0.55	21.30	—0.66	19.23	—0.78

$\Delta = p - (p_1 + p_2)$.

In de benaderde vergelijking (5) verandert de waarde van Δ_p niet als men x en $1 - x$ verwisselt. In de juistere vergelijking is dit niet meer volkomen waar, maar eerst bij zeer kleine volumes moet zich die asymmetrie merkbaar doen gevoelen.

Nu vindt KUENEN bij $T = 304°,3$

bij $v = 0{,}06$	en $x = 1/4$	$\Delta_p = -\ 0{,}55$ Atm.
	$x = 3/4$	$\Delta_p = -\ 0{,}56$ »
bij $v = 0{,}045$	en $x = 1/4$	$\Delta_p = -\ 0{,}93$ »
	$x = 3/4$	$\Delta_p = -\ 0{,}96$ »
bij $v = 0{,}03$	en $x = 1/4$	$\Delta_p = -\ 2{,}1$ »
	$x = 3/4$	$\Delta_p = -\ 2{,}0$ »
bij $v = 0{,}015$	en $x = 1/4$	$\Delta_p = -\ 7{,}4$ »
	$x = 3/4$	$\Delta_p = -\ 6{,}8$ »

[1]) Proefschrift, Leiden 1892.

Bij lagere temperaturen is de overeenstemming niet zoo goed, als in de bovenstaande tabel in het geval van de 3 eerstgenoemde volumes, maar in het algemeen beter dan bij het laatste volume.

De regel dat Δ_p evenredig is aan $x(1-x)$ brengt mede dat voor $x = 1/2$ een waarde moet gevonden worden, die $4/3$ grooter is dan voor $x = 1/4$ of $3/4$. Uit KUENEN's getallen wordt daarvoor gewoonlijk een grootere verhouding gevonden. Bij $T = 403°,3$ is die gevonden verhouding bij de vier genoemde volumes $\frac{0,89}{0,555}$, $\frac{1,52}{0,954}$, $\frac{3,2}{2,05}$ en $\frac{9,9}{7,1}$ en dus getallen afwisselend tusschen 1,6 en 1,4.

Bij $T = 373°$ werd gevonden $\frac{11,9}{8,875}$, $\frac{3,7}{2,55}$, $\frac{1,78}{1,19}$ en $\frac{1,04}{0,68}$ en dus getallen afwisselend tusschen 1,5 en 1,35.

Maar bij $T = 343°$ kunnen wij de gevonden verhoudingen wel met $4/3$ gelijk stellen.

De afhankelijkheid van Δ_p van het volume, die volgens de opmerkingen, afgeleid uit de vergelijking (6) minder groot moet zijn dan volgens de omgekeerde kwadraten der volumina zou volgen, kan geacht worden door de getallen van KUENEN te worden bevestigd. Zoo vindt KUENEN bij $v = 0,6$ $\Delta_p = 0,81$ en bij $v = 0,03$ $\Delta_p = 2,9$ en bij $v = 0,045$ $\Delta_p = 1,38$ enz.

De afhankelijkheid van de temperatuur, waarvoor volgens (5) zou moeten gelden:

$$(-\Delta_p)_{T_2} - (-\Delta_p)_{T_1} = 2\,\frac{\alpha\, b_{12}\,(T_1 - T_2)}{v^2}\,x(1-x)$$

en volgens welke formule bij dezelfde waarde van x en v de verschillen der waargenomen waarden van Δ_p recht evenredig met de temperatuursverschillen zouden moeten zijn, komt niet goed uit. Maar bij dit alles mag niet over het hoofd gezien worden, dat de Δ_p's reeds verschillen van waargenomen grootheden zijn, en dus niet de waargenomen grootheden zelven, terwijl $\{(-\Delta_p)_{T_2} - (-\Delta_p)_{T_1}\}$ al weder verschillen van die verschillen zijn. Daarom blijft het te betreuren, dat slechts zoo weinig waarnemingen ten dienste van dit onderzoek staan — en in het bijzonder, dat AMAGAT zijn aangevangen onderzoek over mengsels CO_2 en N_2 niet heeft kunnen voortzetten [1]).

---

[1]) C. R. Acad. des Sciences. 11 Juillet 1898.

Tracht men uit de waargenomen waarde van Δ_p een waarde voor a_{12} te berekenen, bijv. uit de waarneming bij $v = 0{,}06$, $x = {}^3/_4$, $T = 373$, welke $\Delta_p = -0{,}7$ opleverde, dan gelukt dit natuurlijk eerst na een waarde aan b_{12} toe te kennen. Stellen wij daarvoor 0,0024, een waarde, welke ligt tusschen $b_1 = 0{,}0020$ en $b_2 = 0{,}0029$, terwijl een fout in deze waarde betrekkelijk weinig invloed op de te berekenen waarde van a_{12} zal hebben. Dan hebben wij:

$$a_{12} = 0{,}7 \times 0{,}0036 \times {}^8/_3 + 0{,}00328 = 0{,}010 \ .$$

Men vindt uit KUENEN's getallen voor de drukcontractie ($-\Delta_p$) de volgende met behulp der benaderde vergelijking berekende waarde van a_{12}:

$T = 343$	$v = 0{,}06$	$v = 0{,}045$	$v = 0{,}03$
$x = {}^1/_4$	0,0105	0,0117	0,0101
$x = {}^1/_2$	0,0112	0,0109	0,0104
$x = {}^3/_4$	0,0116	0,0114	0,0110
$T = 373$			
$x = {}^1/_4$	0,0096	0,01086	0,0100
$x = {}^1/_2$	0,0096	0,0104	0,0097
$x = {}^3/_4$	0,0093	0,0099	0,0095
$T = 403{,}3$			
$x = {}^1/_4$	0,0088	0,0086	0,0086
$x = {}^1/_2$	0,0099	0.0097	0,0093
$x = {}^3/_4$	0,0089	0,0087	0,0084

Voor de berekening van a_{12} uit de uitkomsten bij $v = 0{,}015$ door KUENEN opgegeven, is de benaderde vergelijking niet nauwkeurig genoeg meer.

Ook bij deze waarden van a_{12} ziet men, wat ook bij de a_1 en a_2 gewoonlijk gezien wordt, het onverklaarde verschijnsel, dat zij bij lagere temperaturen toenemen. Het voordeel van de vergelijking,

welke heeft gediend om ze te berekenen, is dat deze geldt onafhankelijk van de mogelijke veranderingen, die in de waarden van a_1 en a_2 door verandering van temperatuur mochten gekomen zijn. En dus is een zuivere bepaling van $-\Delta_p$ het vooralsnog beste middel om ten minste één betrekking tusschen a_{12} en b_{12} te leveren. Die veranderlijkheid van a_{12} met de temperatuur alleen zou dus geen reden zijn om aan de gevonden waarden van a_{12} te twijfelen. Er is echter een andere omstandigheid, die mij twijfelen doet, en wel deze dat volgens de uitkomsten door mij vroeger verkregen (Verslag Kon. Akad. 27 Nov. 1897) $a_1 + a_2 - 2\,a_{12}$ negatief zou zijn voor koolzuur en chloormethyl, of $a_{12} > \frac{a_1 + a_2}{2}$, en dit zou een grootere waarde voor a_{12} eischen dan uit KUENEN's waarden voor $-\Delta_p$ gevonden wordt. Opdat de betrekking $a_{12} > \frac{a_1 + a_2}{2}$ vervuld zou zijn, zou bijv. bij $T = 343$, $a_{12} > 0.0126$ moeten zijn, terwijl uit de berekening van $-\Delta_p$, a_{12} hoogstens gelijk 0,0116 is gevonden. Dat uit KUENEN's waarnemingen $a_{12} < \frac{a_1 + a_2}{2}$ volgt, wordt bevestigd door de waarneming dat menging van CO_2 en CH_3Cl volumevergrooting geeft.

Is dit werkelijk zoo, dan zou het leeren, dat ik in mijn „Benaderde regel voor den loop der plooipuntslijn van een mengsel" nog meer reserve had moeten in acht nemen, dan ik deed. Ofschoon ik daar heb gewaarschuwd, dat de werkelijke plooipuntslijn zal afwijken van de geteekende lijnen, had ik toch gemeend, dat die afwijkingen niet zoo groot zouden zijn, dat de verschillende type's niet meer herkend zouden kunnen worden. En een zoo groote afwijking heeft dan toch in dit geval werkelijk bestaan.

Slaan wij nog eens een terugblik op de twee hier besproken regels: $\Delta_v = 0$ en $\Delta_p = 0$, dan is er aanleiding om den eersten regel als een *benaderingswet* te betitelen. Over het geheele beloop der isotherme, van af een volume gelijk oneindig, totdat de stof in het kleinst mogelijk volume is, moge er afwijking zijn, toch blijft de afwijking binnen eindige grenzen. De tweede regel, die volkomen vervuld is bij oneindige verdunning, zou ten eenenmale ongerijmd zijn, als wij dien ook bij vloeistofvolumes wilden toepassen. Zulk een wet kan men *limietwet* noemen. Uit dat oogpunt beschouwd is ook de wet van BOYLE geen benaderingswet maar slechts een limietwet.

Scheikunde. — De Heer VAN BEMMELEN biedt voor het Verslag eene mededeeling aan van den Heer F. A. H. SCHREINEMAKERS getiteld: „*Evenwichten en stelsels van drie komponenten, verandering der mengtemperatuur van binaire mengsels door toevoeging van een derden komponent.*"

Onder de verschillende stelsels opgebouwd uit 3 komponenten *A*, *B* en *C*, nemen wij het geval, dat in twee der binaire systemen b.v. *A*—*B* en *A*—*C* twee vloeistofphasen kunnen optreden, echter niet in het systeem *B*—*C*. Een voorbeeld hiervan heeft men b.v. in het stelsel opgebouwd uit: water, alcohol en barnsteenzuurnitril, daar alleen in de beide binaire systemen water-barnsteenzuurnitril en alkohol-barnsteenzuurnitril twee vloeistoflagen optreden, echter niet in het systeem water-alkohol. Een tweede thans door den heer SCHREINEMAKERS in onderzoek genomen voorbeeld is het stelsel: water, phenol en anilin; in het systeem phenol-anilin treden *niet*, in de systemen water-phenol en water-anilin *wel* twee vloeistoflagen op. Toch zijn de isothermen die men in beide stelsels verkrijgt gegeheel verschillend, zooals in de figuren 1 en 2 is te zien. In figuur 1 geven de letters *W*, *A*, *N* de komponenten water, alkohol en barnsteenzuurnitril aan; in fig. 2 zijn de komponenten water, anilin en phenol door de letters *W*, *An* en *Ph* aangegeven. In beide systemen zullen wij slechts een gedeelte der optredende evenwichten beschouwen, nl. de optredende vloeistofphasen, die met elkaar in evenwicht kunnen zijn; de evenwichten waarbij vaste phasen optreden laten wij hier buiten beschouwing.

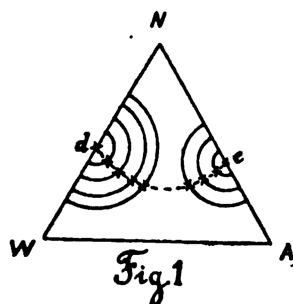


Fig. 1

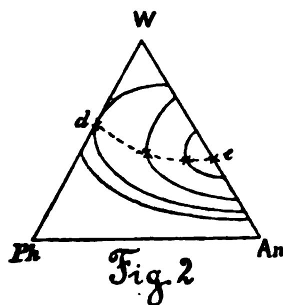


Fig. 2

Beginnen wij met het systeem: water, alcohol, barnsteenzuurnitril; bij temperaturen boven 56°5 gelegen zijn er nog slechts homogene vloeistoffen mogelijk en kan geen ontmenging optreden. Het ζ-vlak in fig. 1 boven driehoek *W A N* is dus in ieder punt naar beneden convex-convex. (Hier en in het volgende, beschouwen wij alleen het vloeistofblad van het ζ-vlak [1]).

[1]) Zie: J. D. VAN DER WAALS. Akademieverslag. 1897. 209.

Bij temperatuursverlaging treedt bij 56°5 een plooipunt op en bij lagere temperatuur ontwikkelt zich eene plooi, die op het zijvlak *W N ζ* eindigt en zich bij temperatuursverlaging voortdurend uitbreidt. In fig. 1 is *d* de projectie van het plooipunt bij 56°5; de verschillende getrokken lijnen, welke ieder in twee punten van de lijn *W N* eindigen, zijn de binodale lijnen bij de verschillende temperaturen; zij liggen alle zóó, dat degene, welke tot lagere temperaturen behooren, die van hoogere temperaturen geheel omhullen. Bij temperatuursverlaging breidt de plooi van den zijkant *W N* zich dus steeds meer en meer uit; bij ± 32° verschijnt echter nog een tweede plooi op het ζ-vlak. welke zich van uit het vlak *A N ζ* ontwikkelt, in een punt welks projectie door *e* is aangegeven; bij lagere temperatuur krijgen wij dus nu behalve de op zijde *W N* eindigende binodale lijnen ook nog binodale lijnen die op zijde *N A* eindigen. Beide plooien breiden zich bij temperatuursverlaging voortdurend meer en meer uit en de beide binodale lijnen naderen elkaar voortdurend; de kruisjes op de gestippelde lijn *d e* gelegen geven de plooipunten der verschillende binodale lijnen aan. Het vermoeden ligt voor de hand, dat de beide plooien bij slot van rekening in elkander overgaan; toch was dit proefondervindelijk niet aan te toonen, daar, door het optreden van de vaste phase (barnsteenzuurnitril) beneden ± 5°5 de linker, en beneden ± 4°5 de rechter binodale lijn nog slechts minder stabiele evenwichten aangaf.

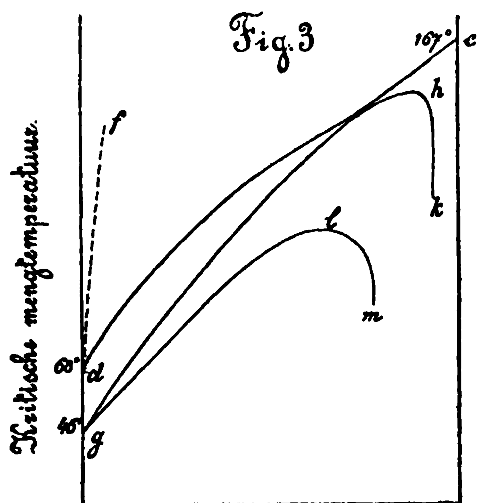
Geheel anders zijn de verschijnselen in het systeem: water, anilin, phenol door fig. 2 aangegeven. Er treedt hier nl. slechts *eene* plooi op het ζ-vlak op. Boven 167° kan in dit stelsel nooit ontmenging eener vloeistof optreden; het ζ-vlak is in ieder punt naar beneden convex-convex. Bij 167° verschijnt een plooipunt op het zijvlak *W An ζ*, zijn projectie is *e*. Bij verdere temperatuursverlaging breidt de plooi zich uit en verkrijgt men binodale lijnen als in fig. 2, waarin de kruisjes weer de plooipunten aangeven. De plooi breidt zich voortdurend verder uit en bereikt bij ± 68° het zijvlak *W Ph ζ* in een punt, welks projectie door *d* aangegeven is; de binodale lijn heeft dan den vorm als die welke in fig. 2 in het punt *d* de zijde *Ph W* raakt. Bij nog lager temperatuur verdwijnt het plooipunt op het ζ-vlak: de plooi breidt zich uit van het eene zijvlak tot het andere, zoodat er twee geheel van elkaar gescheiden convex-convex deelen optreden. De binodale lijn bestaat thans uit twee van elkaar gescheiden stukken, beide eindigende op de zijden *Ph W* en *An W*. Bij verdere temperatuursverlaging blijft de binodale lijn den vorigen vorm behouden; de twee stukken schuiven echter voortdurend verder uit elkaar en eindelijk geven verschillende deelen nog slechts minder

stabiele toestanden aan, daar er ook vaste phasen, nl. phenol en de verbinding van phenol met anilin optreden.

De voorgaande onderzoekingen hebben geleid tot een theoretisch en proefondervindelijk onderzoek van verschillende lijnen; van enkele der experimenteele onderzoekingen wordt in het volgende een kort overzicht gegeven.

Nemen wij de binodale lijnen van fig. 2; beneden 68° komt op deze geen plooipunt voor; bij 68° verschijnt het in punt *d* en schuift van daar bij verdere temperatuursverhooging langs de lijn *de* van *d* naar *e*, waar het bij 167° verdwijnt. Deze plooipuntslijn is proefondervindelijk echter zeer moeielijk te bepalen; dit is dan ook in de verschillende door den heer SCHREINEMAKERS onderzochte stelsels niet geschied. Wel heeft hij eene andere lijn bepaald, die in de twee hiervoor vermelde stelsels niet veel daarvan zal afwijken. Het is de lijn der kritische mengtemperaturen welke minstens in 2 punten met de vorige samenvalt nl. in de punten *d* en *e*, de kritische mengtemperaturen der binaire systemen.

Gaan wij uit van een mengsel van phenol en anilin en voegen wij aan dat binaire mengsel water toe, dan ontstaan 2 vloeistofphasen, die bij verwarming in een enkele overgaan; deze mengtemperatuur is afhankelijk van de hoeveelheid toegevoegd water. De hoogste mengingstemperatuur, welke men door toevoeging van water kan bereiken, kan men de kritische mengtemperatuur noemen van water met het bepaalde binaire mengsel. Naarmate in het binaire mengsel de verhouding van phenol en anilin verandert, verkrijgt men door toevoeging van water ook een andere kritische mengtemperatuur.



Molec. anilin op 100 Molec. phenol + anilin.

In fig. 3 is op de X-as de samenstelling van het binaire mengsel uitgezet, op de Y-as de kritische mengtemperatuur van dat binaire mengsel met water. Men verkrijgt dan de lijn *de*, waarin *d* de kritische mengtemperatuur van phenol met water en *e* die van anilin met water aangeeft. De lijn *de* kan uit de volgende tabel geteekend worden.

Samenstelling van het binaire mengsel in Molec. anilin op 100 Molec. Phenol + Anilin.	Kritische mengtemperatuur na toevoeging van water.
0	68°
11.58	95°
25.4	114°—115°
37.3	127°
50	139°—140°
62.8	148°
76.07	155°5
87.66	163°
100	167°

Voor elk der in de vorige tabel opgegeven binaire mengsels van phenol en anilin is door toevoeging van wisselende hoeveelheden water de mengtemperatuur bepaald en hieruit de kritische temperatuur afgeleid.

Wij zien dus dat de kritische mengtemperatuur der binaire mengsels toeneemt, naarmate deze meer anilin bevatten — daarentegen afneemt, naarmate zij meer phenol bevatten. De uiterste grenzen zijn 68° en 167°.

De heer SCHREINEMAKERS heeft ook nagegaan, hoe de kritische mengtemperatuur van water met phenol verandert door toevoeging van keukenzout. In de volgende tabel zijn de uitkomsten aangegeven.

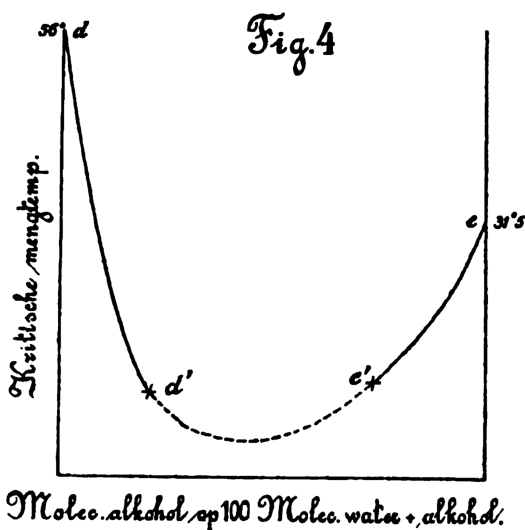
Samenstelling van binaire mengsels in Molec. Na Cl op 100 Molec. (H_2O + Na Cl).	Kritische mengtemperaturen na toevoeging van phenol.
0	68°
0.304	78°
1.579	123°
2.084	144°

Als men nu in fig. 0 op de *X*-as de samenstelling van het binaire mengsel uitzet nl. Molec. Na Cl op 100 Molec. (Na Cl + H_2O), en op de *Y*-as de kritische mengtemperatuur van die mengsels met phenol, zoo verkrijgt men de gestippelde lijn *df*, die van *d* uit zeer snel in de hoogte gaat. Een dergelijke lijn bestaat ook in het door

SCHREINEMAKERS onderzochte stelsel water-barnsteenzuurnitril en keukenzout.

Door toevoeging van Anilin of Na Cl verkrijgt men dus verhooging der kritische mengtemperatuur van phenol met water; hetzelfde gebeurt ook door verhooging van druk, zooals Dr. N. J. VAN DER LEE onlangs aantoonde [1]). Verlaging dezer kritische mengtemperatuur kan ook optreden zooals de heer SCHREINEMAKERS met alcohol gevonden heeft.

Eene lijn geheel anders dan in fig. 3 is door SCHREINEMAKERS verkregen in het stelsel: water, alkohol en barnsteenzuurnitril.



Gaat men van het binaire mengsel water en alcohol uit, dan kan men door toevoeging van barnsteenzuurnitril weer 2 vloeistoflagen verkrijgen. In fig. 4 is op de *X*-as de samenstelling van het binaire mengsel: water en alkohol uitgezet, op de *Y*-as de kritische mengtemperatuur bij toevoeging van barnsteenzuurnitril. De loop der lijn *d d' e' e* is bekend uit volgende tabel

Samenstelling van het binaire mengsel in Molec. Alcohol op 100 Molec. Alcohol + water.	Kritische mengtemperatuur na toevoeging van barnsteenzuurnitril.
0 Punt *d*	56°
5.7	41°5
12.1	30°5
25.9	12°
30.1 Punt *d'*	7°5
66.6 Punt *e'*	8°5
70.4	11°
84.6	21°
100 Punt *e*	31°5

[1]) Proefschrift. De invloed van den druk op de kritische mengtemperatuur. Amsterdam 1898.

Van het gestippelde stuk *d' e'* zoude nog slechts een klein gedeelte te verwezenlijken zijn; het grootste gedeelte is echter niet meer te bepalen. Toch ligt het vermoeden voor de hand dat de lijn *d' e'* een verloop zal hebben als in de figuur geteekend nl.: met een minimum-temperatuur bij ± 3° overeenkomende met het punt, waar in fig. 1 de beide binodale lijnen in elkaar overgaan. De moeielijkheid voor de bepaling ligt hierin, dat de beide vloeistofphasen daar slechts minder stabiele evenwichten zijn; de enkele gevallen, waarin het den heer SCHREINEMAKERS nog gelukte ze te verkrijgen, waren echter niet voldoende om hieruit de kritische mengtemperatuur af te leiden.

Behalve de vraag naar de kritische mengtemperatuur van ternaire mengsels kan men zich nog verschillende andere vragen stellen, waarvan ik nog een enkele zal bespreken.

Men neme een binair mengsel en wel van water en phenol; de mengtemperatuur van zulk een mengsel is afhankelijk van zijn samenstelling; zoo bijv. is de mengtemperatuur van een mengsel, dat 10.9 pCt. phenol bevat, ± 46°. Deze mengtemperatuur wordt niet alleen door druk maar ook door toevoeging van een derden komponent veranderd; zij kan verhoogd of verlaagd worden. Een voorbeeld van verhooging heeft de heer SCHREINEMAKERS proefondervindelijk bepaald door als derde komponent o. a. anilin te nemen; hij vond dat de mengtemperatuur eerst van 46° tot ongeveer 163° verhoogd werd en bij verdere toevoeging van anilin weder daalde. Om deze lijn in fig. 3 te kunnen teekenen zijn van het ternaire mengsel alleen de komponenten phenol en anilin genomen. Aangezien in al de mengsels water en phenol in konstante verhouding zijn, is de gansche samenstelling ook bekend. Wij hebben:

Molec. anilin op 100 Molec. phenol + anilin.	Mengtemperatuur.
0	46°
46.57	127°
67.68	148°
79.99	157°
86.18	160°
89,9	162°
93.6	161°5
95.66	± 157°
97.47	± 142°

Wordt nu in fig. 3 weer op de X-as het aantal Molec. Anilin op 100 Molec. Phenol + Anilin uitgezet en op de Y-as de mengtemperatuur, zoo wordt eene lijn verkregen als in fig. 3 door *g h k* aangegeven, welke 1°. van *g* uit naar hoogere temperatuur gaat, 2°. de lijn *d e* raakt, 3°. in *h* haar maximum-temperatuur bereikt en 4°. verder naar lagere temperatuur ombuigt.

De vorige lijn *g h k* geldt voor een mengsel dat 10.9 pCt. Phenol en 89.1 pCt. water bevat; voor mengsels van andere samenstelling verkrijgt men weer andere lijnen. Zoo, wanneer men een mengsel neemt van 63.7 pCt. phenol en 36.3 pCt. water, dat even als het voorgaande zijn mengtemperatuur bij ± 46° heeft. Bij toevoeging van Anilin krijgen wij dan het volgende:

Molec. anilin op 100 Molec. phenol + anilin.	Mengtemperatuur.
0	46°
21.61	90°
29.58	97°
43.72	107°
51.93	109°
60.48	108°5
71.97	102°
78.35	92°

Hieruit verkrijgt men de lijn, die in fig. 3 door *g l m* is aangegeven, welke dus evenals *g h k* van *g* uitgaat, vervolgens haar maximum-temperatuur in *l* bereikt en verder naar lagere temperatuur ombuigt.

Er zijn dus 2 lijnen verkregen, beide van punt *g* in fig. 3 uitgaande. Uit elk beneden *d* liggend punt kunnen 2 dergelijke lijnen uitgaan; uit *d* zelf echter slechts *eene*. Om deze te vinden moet men uitgaan van de kritische oplossing van water en phenol. Deze is echter niet juist bekend. De Heer SCHREINEMAKERS ging uit van eene oplossing, die 35.77 % phenol bevatte en zeker wel in de nabijheid der kritische ligt. Hij vond:

Molec. anilin op 100 Mol. phenol + anilin.	Mengtemperatuur.
0	± 68°
20.46	105°5
23.83	120°
50.68	135°
68.69	144°
76.88	145°
80.18	144°
87.20	± 137°

De lijn welke zich uit deze tabel laat afleiden is echter in fig. 3 niet geteekend; voor zoover zij vervolgd is, ligt zij geheel boven *g l m*, maar snijdt *g h k* in een punt gelegen tusschen *g* en het punt dat de beide lijnen *g h k* en *d e* gemeen hebben.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt voor het Verslag een opstel aan, getiteld: „*Over de nauwkeurige bepaling van het molekulairgewicht uit de dampdichtheid*".

Uit de vergelijking:

$$\left(p + ap_0 \frac{v_0^2}{v^2}\right)(v - b\, v_0) = \Sigma\, {}^1/_3\, m\, N\, s^2$$

volgt:

$$\Sigma\, {}^1/_3\, m\, N\, s_0^2 = p_0\, v_0\, (1 + a)\ (1 - b)$$

en

$$\Sigma\, {}^1/_3\, m\, N\, s^2 = p_0\, v_0\, (1 + a)\ 1 - b)\ (1 + \alpha t)\ .$$

Zij voor 2 verschillende gassen de grootheid N gelijk, dan volgt uit de stelling dat bij gelijke temperatuur ${}^1/_2\, m\, s^2$ gelijk is, dat voor beide gassen ook $p_0\, v_0\, (1 + a)\, (1 - b)$ gelijk is, en dus ook $v_0\, (1 + a)\, (1 - b)$.

Is de totale hoeveelheid der stof gelijk aan het molekulairgewicht, dan is $v_0 = \frac{m}{d_0}$, en uit de vorige gelijkheid volgt dan:

$$\frac{m}{d_0}(1 + a)\ (1 - b) = \frac{m'}{d_0'}(1 + a')\ (1 - b')$$

of

$$m : m' = \frac{d_0}{(1 + a)\ (1 - b)} : \frac{d_0'}{(1 + a')\ (1 - b')}\ .$$

De grootheid $\frac{d_0}{(1+a)\ (1-b)}$ is dus de normale densiteit, welke ook bij 0° zou gevonden zijn geworden, als de wet van BOYLE juist geweest ware. Stellen wij ze voor door d_n.

Als men dus de densiteit van een gas bepaalt bij 0° en onder den druk p_0 (waarbij de grootheden a en b zijn bepaald geworden) dan heeft men deze densiteit slechts door $(1+a)\ (1-b)$ te deelen, om de normale densiteit te vinden; en daaraan evenredig zijn de molekulairgewichten.

Bepaalt men de densiteit bij een andere temperatuur en onder een andere drukking, dan wordt door toepassing van

$$\frac{p\,v}{1+\alpha\,t} = p_0\,v_0'$$

uit de afgelezen drukking, temperatuur en volume een volume v_0 berekend, dat de stof onder den druk p_0 en bij 0° hebben zou, en, met behulp van dat volume een densiteit $(d_0)' = \frac{m}{v_0'}$, waarvan wij te zoeken hebben in welke verhouding zij staat tot d_n.

Berekenen wij daartoe de verhouding van v_0 en v_0'.

Uit

$$p = \frac{p_0\,v_0\,(1+a)\,(1-b)\,(1+\alpha t)}{v-b\,v_0} - \frac{a\,p_0\,v_0^2}{v^2}$$

volgt

$$v_0' = \frac{pv}{1+\alpha t}\,\frac{1}{p_0} = (1+a)\,(1-b)\,v_0\,\frac{v}{v-b\,v_0} - \frac{a}{1+\alpha t}\,v_0\,\frac{v_0}{v}$$

of

$$\frac{v'_0}{v_0} = (1+a)\,(1-b)\left\{1+b\,\frac{v_0}{v}\,\ldots\right\} - \frac{a}{1+\alpha t}\,\frac{v_0}{v}\,.$$

Beperken wij ons tot zeer groote volumes, dus tot waarnemingen bij geringen druk, dan kunnen wij stellen:

$$\frac{v_0'}{(1+a)\,(1-b)\,v_0} = 1 - \frac{v_0}{v}\left\{\frac{a}{(1+a)\,(1-b)\,(1+\alpha t)} - b\right\}$$

of

$$\frac{d_n}{d'_0} = 1 - \frac{p\,v_0}{p_0\,v_0\,(1+a)\,(1-b)\,(1+\alpha t)}\left\{\frac{a}{(1+a)\,(1-b)\,(1+\alpha t)} - b\right\}$$

$$\frac{d_n}{d'_0} = 1 - \frac{p}{p_0\,(1+a)\,(1-b)\,(1+\alpha t)}\left\{\frac{a}{(1+a)\,(1-b)\,(1+\alpha t)} - b\right\}\,.$$

Noemen wij p een bepaald gedeelte van den kritischen druk, bijv. $\frac{1}{76}$ (zooals LEDUC doet „Annales de chimie et de physique, Sept. 1898"), dan is

$$p = \frac{\pi}{76} = \frac{1}{76}\,\frac{a}{27}\,\frac{p_0}{b^2} \quad \text{of} \quad \frac{p}{p_0} = \frac{1}{76}\,\frac{a}{27\,b^2}$$

en

$$\frac{d_n}{d'_0} = 1 - \frac{1}{76}\,\frac{1}{27}\,\frac{a}{b\,(1+a)\,(1-b)\,(1+\alpha t)}\left\{\frac{a}{b(1+a)(1-b)(1+\alpha t)} - 1\right\}.$$

Met behulp der kritische temperatuur

$$1 + \alpha t_k = \frac{8}{27}\,\frac{a}{b\,(1+a)\,(1-b)}$$

vinden wij

$$\frac{d_n}{d'_0} = 1 - \frac{1}{76 \times 8}\,\frac{T_k}{T}\left(\frac{27}{8}\,\frac{T_k}{T} - 1\right)$$

of

$$\frac{d_n}{d'_0} = 1 - 0{,}001645\,\frac{T_k}{T}\left(\frac{27}{8}\,\frac{T_k}{T} - 1\right).$$

Voor $\frac{T_k}{T} = \frac{8}{27}$ is de correctie gelijk 0 en de gevonden densiteit gelijk aan de normale. Bij die temperatuur volgt een gas onder geringen druk dan ook de wet van BOYLE.

Voor $\frac{T_k}{T} < \frac{8}{27}$ of $T > \frac{27}{8}\,T_k$ is de correctie negatief, zooals bij waterstof bij 0° het geval is. Dan is $d_n > (d_0)'$. In dat geval zal de verhouding van $\frac{d_n}{(d_0)'}$ een maximumwaarde vertoonen voor $T = \frac{27}{4}\,T_k$. Bij waterstof is bij 0° de waarde van T reeds over die grens heen. Het feit dat er zulk een maximum-waarde bestaat wordt begrijpelijk, als men bedenkt, dat een bepaalde druk bij stijgende temperatuur met steeds grootere verdunning der stof gepaard gaat — zoodat bij T gelijk oneindig, een druk $= \frac{\pi}{76}$ oneindig groot volume zou eischen, en er dus geen correctie noodig zijn zou.

Wil de waarneming bij een druk gelijk aan $\frac{\pi}{76}$ mogelijk zijn,

zonder dat de damp verzadigd is, dan mag T niet beneden zekere grens dalen, die wij op $\frac{T_k}{1,6}$ zullen stellen.

Voor $\frac{T_k}{T} = 1,6$ zou $\frac{d_n}{(d_0)'} = 1 - 0,0116$ gevonden worden, zoodat de normale densiteit meer dan 1 pCt. kleiner is dan die, welke door de waarneming wordt geleverd.

Mocht de aanname $a_t = a \frac{T_k}{T}$ beter met de waarnemingen sluiten, dan de onderstelling dat a constant is, dan is er aanleiding om te stellen:

$$\frac{d_n}{(d_0)'} = 1 - 0,001645 \left(\frac{T_k}{T}\right) \quad \left[\frac{27}{8}\left(\frac{T_k}{T}\right)^2 - 1\right],$$

in welk geval bij $\frac{T_k}{T} = 1,6$ de normale densiteit meer dan 2 pCt. kleiner zou zijn, dan die uit de waarnemingen zou worden afgeleid.

Sterrenkunde. — De Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt voor de werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer A. PANNEKOEK, getiteld: *„Die Lichtcurve Algols nach den Beobachtungen von* J. PLASMANN.

Deze wordt in handen gesteld van de Heeren J. A. C. OUDEMANS en J. C. KAPTEYN om daarover in de volgende vergadering verslag uit te brengen.

Voor de Boekerij worden aangeboden door den Heer VAN BEMMELEN twee overdrukjes uit het Zeitschrift für Anorganische Chemie getiteld: *Die Absorption*, 2te und 3te Abhandlung.

De volgende vergadering zal wegens het samenvallen van den laatsten Zaterdag van December met Oudejaarsdag gehouden worden op den 24sten December a.s.

De vergadering wordt gesloten.

(7 December 1898.)

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 24 December 1898.

Voorzitter: (waarn.) de Heer J. A. C. OUDEMANS.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

Het Proces-Verbaal der vorige Vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is het bericht van de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN en STOKVIS, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

De waarnemende Voorzitter deelt het praeadvies van het Bestuur mede op de circulaire van het Internationaal Congres voor Geologie, welke door den Heer MARTIN in de October-Vergadering was overgelegd. Volgens den wensch, in die circulaire uitgesproken, zou de

Akademie zich tot de Nederlandsche Regeering moeten wenden om haar te bewegen tot deelneming in de oprichting en het onderhoud van het wenschelijk geoordeelde „Institut flottant international".

Door het Bestuur wordt opgemerkt dat bij de oprichting van dergelijke internationale instituten (Zoölogisch Station te Napels, Landsplantentuin te Buitenzorg) en ook bij de Internationale graadmeting een dergelijke weg *niet* gevolgd is. Verder dat bij de uitzending der Siboga-expeditie onze Regeering reeds geacht kan worden te zijn opgetreden — en voorgesteld wordt, aan den Heer MARTIN mede te deelen, dat volgens meening der Vergadering het beter is, dat het Congres zich rechtstreeks of door middel van de Russische Regeering tot onze Regeering wende. Vraagt, wat te verwachten is, de Regeering dan het advies der Akademie, dan zal zij eventueel gunstig kunnen adviseeren.

Tegen dit praeadvies wordt door den Heer MARTIN opgemerkt, dat het doel van het „Institut flottant international" een geheel ander is dan dat, wat de Siboga-expeditie beoogt, en het dus niet juist is als beweerd zou worden, dat door de ondersteuning der Siboga-expeditie onze Regeering reeds geacht kan worden te zijn opgetreden. Maar verder vraagt hij of als, zooals onlangs gebleken is, er geen geld in Nederland is voor eigen geologisch onderzoek het dan niet geraden is den Russischen geologen de moeite te besparen van voor dit internationale doel den steun onzer Regeering te vragen.

Het praeadvies van het Bestuur wordt verdedigd door den Secretaris met de opmerking, dat de Akademie, als zij van het nut van zulk een instelling overtuigd is, alles bevorderen moet wat onze Regeering en de Tweede Kamer mede die overtuiging geven kan — en dat op dit oogenblik, nu er geen gelden voor eigen geologisch onderzoek zijn beschikbaar gesteld, het nuttig zijn kan als langs internationalen weg blijkt, dat zelfs internationaal geologisch onderzoek noodig geacht wordt.

Daarop wordt het praeadvies van het Bestuur bij acclamatie aangenomen.

Wiskunde. — De Heer W. KAPTEYN brengt, ook namens den Heer CARDINAAL, het volgende verslag uit over eene verhandeling van den Heer K. BES: „*Théorie générale de l'élimination d'après la méthode* BEZOUT *suivant un nouveau procédé*".

Terwijl gewoonlijk de theorie van de eliminatie van n veranderlijken uit n homogene vergelijkingen wordt ontwikkeld met behulp

van determinanten, wordt door den schrijver dezer verhandeling deze theorie opgebouwd uitsluitend met matrices.

Hoofdstuk I bevat het theoretisch gedeelte.

Wanneer de kolommen van een matrix bestaande uit m rijen en n kolommen respectievelijk met de veranderlijke $x_1\ x_2 \ldots x_n$ worden vermenigvuldigd, dan verkrijgt men een nieuwe matrix. Door optelling van de elementen der rijen, zoowel als door de optelling van de elementen der kolommen dezer laatste matrix ontstaan twee systemen lineaire functiën $\theta_1\ \theta_2 \ldots \theta_m$ en $\zeta_1\ \zeta_2 \ldots \zeta_n$. Stelt men deze lineaire functiën gelijk nul, dan ontstaan twee groepen vergelijkingen die met elkaar in een nauw verband staan. Zoo geeft ieder systeem wortels van de eene groep de coëfficienten aan eener lineaire betrekking waaraan de vergelijkingen der andere groep voldoen. Hieruit volgt dat wanneer er geen systeem wortels bestaat voor de eene groep, de vergelijkingen van de andere groep onafhankelijk van elkaar zijn.

Ten opzichte van deze beide groepen vergelijkingen kunnen zich nu drie gevallen voordoen, nl. òf dat aan geen der beide groepen, òf dat slechts aan een der beide groepen, òf dat aan beide groepen kan voldaan worden. De gevolgen dezer onderstellingen worden uitvoerig onderzocht. Daarbij geven vooral de laatste twee gevallen aanleiding tot belangrijke uitkomsten.

Kan men niet aan de n vergelijkingen $\zeta = 0$ voldoen, dan zijn de m vergelijkingen $\theta = 0$ onafhankelijk en bezitten $n-m$ onafhankelijke systemen wortels, waaruit weder een matrix kan worden afgeleid; terwijl echter de oorspronkelijke matrix m rijen en n kolommen bezit, bevat deze matrix $n-m$ rijen en n kolommen. Beiden bevatten dus evenveel determinanten. Wanneer men nu uit de eerste matrix m kolommen tot een determinant vereenigt en in de tweede juist de overeenkomende kolommen weglaat, dan blijft ook hier een determinant over. Deze beide determinanten correspondeerende noemende, zoo blijkt dat de correspondeerende determinanten der beide matrices evenredig met elkaar zijn. Dit belangrijke resultaat, ofschoon niet onbekend, wordt hier op geheel andere wijze afgeleid dan bijv. door GORDAN.

Het derde geval onderstelt dat men aan beide groepen vergelijkingen kan voldoen. In dit geval bestaan er zekere voorwaarden die vervuld moeten zijn tusschen de elementen van de matrix en een of meer lineaire betrekkingen tusschen de functiën θ, wat tengevolge heeft dat aan deze groep vergelijkingen nu door meer dan $n-m$ onafhankelijke systemen wortels voldaan kan worden. Deze voorwaarden, betrekkingen en wortelsystemen worden nauwkeurig nagegaan.

Hoofdstuk II behandelt de eliminatie van 2 onbekenden tusschen twee homogene vergelijkingen van verschillenden graad. Wil men tusschen twee homogene vergelijkingen φ $(xy) = 0$ van graad m en $\varkappa$ $(xy) = 0$ van graad n, x en y elimineeren, dan kan men in navolging van Bezout eene functie F van willekeurigen graad k bepalen door φ met eene homogene functie van graad $k—m$ en willekeurigen coëfficient s_1 tot s_{α_1} te vermenigvuldigen en daarbij op te tellen het product van $\varkappa$ met eene homogene functie van graad $n—k$ en willekeurige coëfficienten s_{α_1+1} tot $s_{\alpha_1+\alpha_2}$. Deze functie F kan dan ontwikkeld worden naar de $k+1$ argumenten eener homogene functie en bestaat zoo uit $k+1$ termen of naar de onbepaalde grootheden s en bestaat zoo uit $\alpha_1+\alpha_2$ termen. Stelt men dan de coëfficienten in deze ontwikkelingen voor door θ_1 tot θ_{k+1} en ζ_1 tot $\zeta_{\alpha_1+\alpha_2}$ dan kan men uit deze functiën weer als vroeger een matrix afleiden. Men kan dus zeggen dat voor iedere waarde van k bij F zekere matrix behoort. De vergelijking $F=0$ kan nu op twee wijzen voldaan worden: vooreerst onafhankelijk van de waarden van x en y door een systeem wortels (s) van de vergelijkingen $\theta=0$, ten tweede onafhankelijk van de waarden der grootheden s door een systeem wortels van de vergelijkingen $\zeta=0$. Hierdoor is het vraagstuk zoowel van de bepaling der resultante als dat van de bepaling der gemeenschappelijke wortels teruggebracht tot het onderzoek van de twee groepen vergelijkingen die in verband staan met de matrix van F en kunnen de vroeger ontwikkelde stellingen worden toegepast. De schrijver vindt dan de resultante op verschillende doch gelijkwaardige wijzen uitgedrukt en het blijkt, zooals te verwachten was, dat de resultante is eene homogene functie der coëfficienten van de twee gegeven vergelijkingen en wel van graad n in de coëfficienten van φ en van graad m in die van $\varkappa$. Ook blijkt het gemakkelijk te zijn den gemeenschappelijken wortel te bepalen wanneer de resultante nul is.

Verder wordt onderzocht welke voorwaarden vereischt zijn wanneer de vergelijkingen meerdere wortels gemeen hebben en welke de waarden dezer gemeenschappelijke wortels zijn.

In Hoofdstuk III wordt de methode op drie en in Hoofdstuk IV op n homogene vergelijkingen toegepast.

Het geheel wordt besloten met het bewijs van enkele identiteiten die de schrijver in het laatste hoofdstuk ontmoet.

Zooals te verwachten was bevat deze verhandeling weinig nieuwe uitkomsten; intusschen bevat zij naar ons oordeel belangrijke nieuwe gezichtspunten die wellicht voor andere vragen van nut kunnen zijn en tot verdere onderzoekingen aanleiding kunnen geven. Wij advi-

seeren daarom de verhandeling in de Werken van de Akademie op te nemen, maar den schrijver uit te noodigen vooraf zijn werk, dat in het Fransch geschreven is, met het oog op de taal, door een deskundige te laten onderzoeken.

W. KAPTEYN.
J. CARDINAAL.

De conclusie van het verslag om de verhandeling op te nemen in de werken der Akademie wordt goedgekeurd.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM biedt aan de dissertatie van Dr. C. VAN EYK: *„Over mengkristallen van Kaliumnitraat en Thalliumnitraat"* en doet daaromtrent de volgende mededeeling.

Spreker heeft voor eenigen tijd (zie Verslag der Akademievergadering van 24 Sept. j.l., blz. 134) eene theoretische ontwikkeling gegeven van het verloop der stolling van een gesmolten mengsel van twee stoffen, waaruit bij bekoeling zich mengkristallen afzetten en van het verloop der transformatie van zoodanige kristallen, voor het geval een der twee of beide componenten in vasten staat in eene andere modificatie overgaan.

Kaliumnitraat en thalliumnitraat zijn nu het eerste voorbeeld van een stelsel van twee stoffen, waarbij het algemeene overzicht over den gang dezer beide verschijnselen over het geheele concentratiegebied verworven is, en waarbij de waarnemingen volkomen overeenstemmen met het verloop dat langs theoretischen weg was afgeleid.

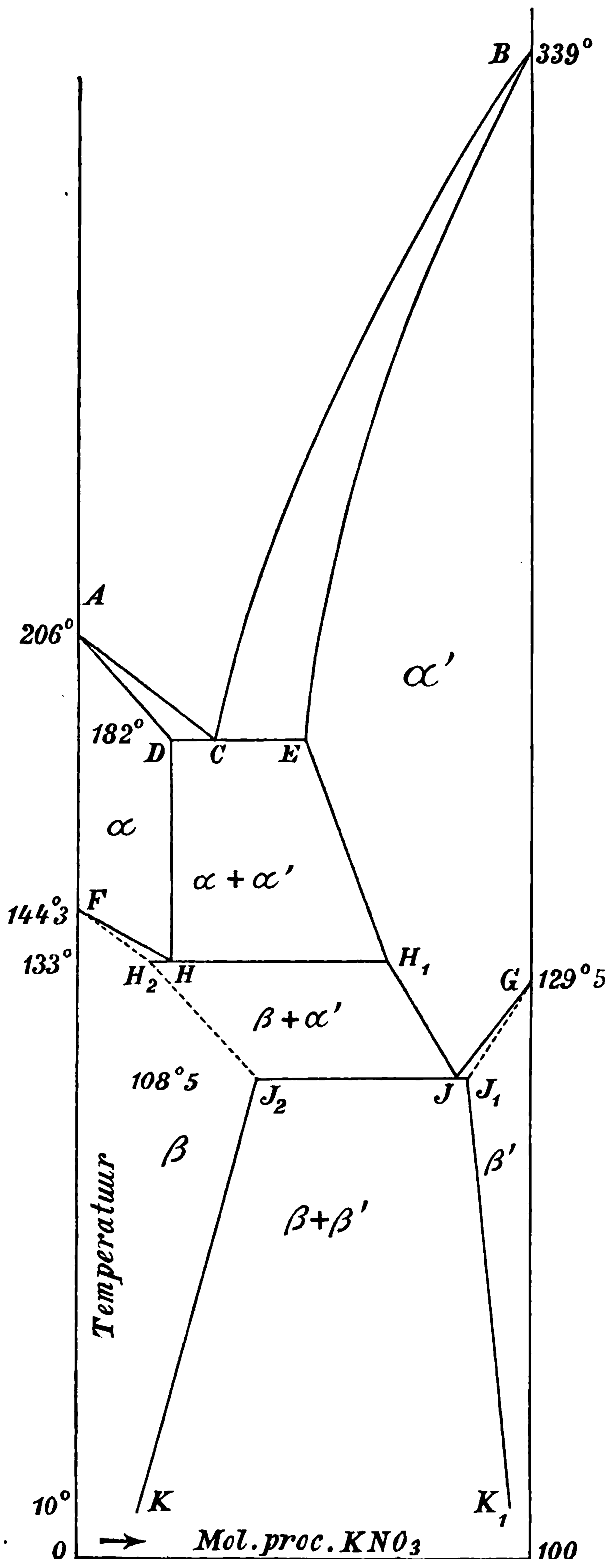
Beschouwen wij allereerst de stolling (zie de figuur volgende bldz.).

De stoltemperatuur daalt bij mengsels van 0—31.3 mol. pCt. $K\,NO_3$ van 206° (smeltpunt van $Tl\,NO_3$) tot 182° (*AC*). Uit deze vloeistoffen zetten zich mengkristallen af, die rijker aan $Tl\,NO_3$ zijn dan de smelt, n.l. 0—20 pCt. $K\,NO_3$ bevatten (*AD*). Deze zijn zwaarder dan de smelt.

Uitgaande van $K\,NO_3$ daalt de stoltemperatuur eveneens van 339°—182° (*BC*), terwijl uit de gesmolten massa van 100—31.3 pCt. $K\,NO_3$ zich mengkristallen afzetten welke 100—50 pCt. $K\,NO_3$ bevatten (*BE*) en dus rijker zijn aan $K\,NO_3$. Deze kristallen zijn soortelijk lichter dan de smelt.

De stolling zoowel op punten van *AC* als van *BC* geschiedt over een zoodanig temperatuurinterval, als begrepen is tusschen de punten van *AC* en *AD* of *BC* en *BE* welke dezelfde concentratie aangeven.

Bij het minimumstolpunt *C* wordt de vloeistof van 31.3 pCt.



K NO_3 vast tot een conglomeraat van tweeërlei mengkristallen, die met 20 pCt. en die met 50 pCt. K NO_3. In weerwil dat beide soorten tot het rhomboëdrische stelsel behooren is de mengingsreeks niet continu.

Beneden 182° zijn in vasten staat dus mogelijk drieërlei toestanden: homogene mengkristallen (α) van 0—20 pCt. K NO_3, homogene van 50—100 pCt. K NO_3 (α') en conglomeraten van de grenskristallen van 20 en 50 pCt. in wisselende verhouding, naar gelang van de samenstelling der smelt, die tot uitgangspunt genomen werd.

De gestolde mengkristallen, hetzij homogeen of conglomeraat, ondergaan bij verdere afkoeling transformaties van den rhomboëdrischen in den rhombischen vorm.

Voor K NO_3 was die overgang bekend bij 129.°5 (*G*).

Voor $Tl\,NO_3$ vond Dr. VAN EYK als overgangstemperatuur 144° (F). De bepaling dier temperaturen bij deze beide stoffen, zoowel als bij hunne mengkristallen, geschiedde hetzij door de vertraging waar te nemen in de temperatuurdaling of rijzing, welke ten gevolge der transformatiewarmte intreedt, hetzij door de temperatuur te bepalen, waarbij de omzetting waarneembaar wordt aan het lichtbrekend vermogen of aan het uiterlijk der kristallen. Deze laatste waarnemingen geschiedden zoowel mikroskopisch als met het bloote oog.

Tusschen 182° en 144° treedt geenerlei omzetting op; alleen is uit het verloop der omzetting bij lager temperatuur gebleken, dat de grenzen van de homogene kristallen α en α' bij dalende temperatuur iets verder uiteengaan, zoodat dus de mengbaarheid vermindert. Bij 133° zijn deze grenzen geworden: 20 pCt. en 69 pCt. $K\,NO_3$.

De omzettingstemperatuur der homogene α-kristallen daalt met toenemend $K\,NO_3$ gehalte van 144°—133° (lijn FH); de juiste ligging der lijn FH_2, welke de gevormde rhombische β-kristallen aangeeft, is echter niet bekend. De omzettingstemperatuur voor alle conglomeraten van α en α' mengkristallen ligt bij 133° en uit het constant blijven dezer temperatuur tusschen 20 pCt. en 69 pCt. $K\,NO_3$ is de ligging der punten H en H_1 afgeleid en het verloop der lijnen DH en EH_1.

Bij 133° worden uit het conglomeraat alle rhomboëdrische α-kristallen in rhombische β-kristallen omgezet.

Beneden 133° bestaat het conglomeraat dus uit β- en α'-kristallen. De grenzen dezer twee soorten blijken eveneens bij verdere temperatuursdaling te verschuiven (lijnen $H_2\,J_2$ en $H_1\,J$) en wel beide naar hooger $K\,NO_3$ gehalte, zoodat deze grenzen bij 108.°5 geworden zijn: 40 pCt. en 84 pCt.

De homogene rhomboëdrische α'-kristallen vangen eerst beneden 129.°5 aan zich om te zetten in rhombische mengkristallen β'.

Voor kristallen van 100—84 pCt. $K\,NO_3$ daalt de omzettingstemperatuur van 129.°5—108.°5 (GJ). Bij 108.°5 is de samenstelling bereikt, welke ook de α' mengkristallen bezitten die in het conglomeraat met β-kristallen reeds van 133° af aanwezig waren. Beneden 108.°5 worden nu ook in de conglomeraten alle α'-kristallen in rhombische omgezet. De omzetting is bij deze temperatuur voltooid.

Wegens de niet volledige mengbaarheid blijven er beneden 108.°5 echter nog 3 mengtypen van rhombische kristallen over, n.l. homogene β en β' kristallen en conglomeraten van beide grenskristallen.

De grenzen der menging en dus ook de samenstelling der twee bestanddeelen in de conglomeraten, welke bij 108.°5 ± 40 pCt. en 84 pCt. $K\,NO_3$ zijn, loopen bij daling der temperatuur nog verder

uiteen, zoodat zij bij 10° geworden zijn 15.5 pCt. en 96.5 pCt. ($J_2 K$ en J_1 K_1).

Bij lagere temperatuur zijn deze grenzen gemakkelijk te vinden door de grenzen der menging te bepalen in de kristallen, welke zich uit waterige oplossing afscheiden.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS spreekt over: „*Volume-contractie en drukcontractie* (II).”

Men kan voor een enkelvoudige stof de vraag stellen, hoeveel verschilt onder een gegeven drukking en bij gegeven temperatuur het volume van dat, wat zij zou hebben ingenomen, als zij volkomen de wet van BOYLE had gehoorzaamd.

Noemen wij het werkelijke volume v, en dat wat zij volgens de wet van BOYLE zou innemen v', dan vragen wij dus naar de grootte van $v' - v$. Laat de hoeveelheid gelijk zijn aan het molekulair-gewicht.

Uit

$$p = \frac{MRT}{v'} = \frac{MRT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

volgt

$$v' = \frac{v}{1 + \frac{b}{v-b} - \frac{a}{(1+a)(1-b)(1+at)} \frac{1}{v}}.$$

Stellen wij $\frac{a}{(1+a)(1-b)(1+at)} = a'$, dan vinden wij

$$v' - v = \frac{a' - b\frac{v}{v-b}}{\frac{v}{v-b} - \frac{a'}{v}} = \frac{a'v(v-b) - bv^2}{v^2 - a'(v-b)}$$

of

$$v' - v = \frac{a' - b - \frac{a'b}{v}}{1 - \frac{a'}{v} + \frac{a'b}{v^2}}.$$

Voor $v = \infty$ vinden wij voor de volumevermeerdering tengevolge van de oorzaken, die een stof doen afwijken van de wet van BOYLE, de waarde $a' - b$.

Hadden wij het vraagstuk niet volledig kunnen oplossen, maar ons met een eerste benadering vergenoegd, dan zouden wij deze bijzondere waarde $(a' - b)$ als schijnbaar algemeen gevonden hebben. Evenzoo heb ik in mijn mededeeling in de vorige Akademiezitting „over volumecontractie en drukcontractie bij mengsels" voor Δ_v gevonden

$$x(1-x)\left\{\frac{a_1+a_2-2a_{12}}{(1+a_x)(1-b_x)(1+\alpha t)}-(b_1+b_2-2b_{12})\right\},$$

maar alleen omdat ook toen de waarde van Δ_v slechts bij benadering gezocht was — en de vraag is niet zonder gewicht: kan de werkelijke gang van Δ_v worden aangegeven? Voor de grootheid $v'-v$ waarvoor de juiste waarde hierboven is gevonden is dit natuurlijk mogelijk — en het zal mogelijk zijn aan te toonen, dat voor Δ_v een soortgelijke gang te verwachten is.

Gaan wij over tot de discussie van

$$v'-v=\frac{a'-b-\frac{a'b}{v}}{1-\frac{a'}{v}+\frac{a'b}{v^2}}$$

dan merken wij vooreerst op dat voor $v=\frac{a'b}{a'-b}$ het bedrag van $v'-v$ gelijk 0 is. Dit is dezelfde waarde, waarvoor in mijn vorige mededeeling de daar besproken grootheid $p-p'$ gelijk 0 is.

Nu kunnen er echter, als men bij $v=\infty$ begint en tot steeds kleinere volumes overgaat, twee gevallen plaats grijpen.

De waarde van $v'-v$ kan bij het kleiner maken van v of voortdurend tot 0 afdalen, of kan eerst zijn gestegen tot zeker maximum om daarna te dalen. Of het een of het ander gebeurt zal van de waarde van $\frac{a'}{b}$ afhangen. Schrijven wij

$$v'-v=\left(a'-b-\frac{a'b}{v}\right)\left(1+\frac{a'}{v}\right)$$

bij eerste benadering, of

$$v'-v=a'-b+\frac{a'(a'-2b)}{v}$$

dan zien wij dat, zoolang $a'>2b$ is, $v'-v$ zal beginnen toe te

nemen en omgekeerd. De voorwaarde $a' > 2\,b$ voert tot $\frac{T_k}{T} > \frac{16}{27}$.

Zoolang dus $T < \frac{27}{16}\,T_k$ zal $v' - v$ beginnen met toe te nemen, en omgekeerd. De voorwaarde, dat de limietwaarde van $v' - v$ positief is, is $a' > b$ of $T < \frac{27}{8}\,T_k$. Onze uitkomst is dus, dat voor de helft van de temperaturen, waarvoor $v' - v$ positief is, deze grootheid zal beginnen met nog grooter te worden.

Deze uitkomst zal eenige wijziging ondergaan, als wij ook de veranderlijkheid van b met het volume in rekening brengen. Voor dit bijzondere vraagstuk is het voldoende den eersten correctieterm te kennen. Maar zoolang niet de volledige waarde van b bekend is, zullen wij misschien beter doen met b onveranderlijk te beschouwen, — ook omdat de in die onderstelling gevonden wetten gewoonlijk veel eenvoudiger zijn. Eerst wanneer er een voldoende aantal vertrouwbare waarnemingen voorhanden is, waaraan de uitkomst dezer en van dergelijke berekeningen getoetst kan worden, kan er aanleiding zijn om te onderzoeken, of deze en verdere berekende correctietermen van b van de afwijkingen kunnen rekenschap geven.

Beschouwen wij b als onafhankelijk van het volume, dan vinden wij door $v' - v$ te differentieeren, dat er een maximumwaarde gevonden wordt bij

$$\frac{v}{b} = \frac{a'}{a' - 2\,b}.$$

Opdat v positief gevonden worde, zal $a' > 2\,b$ moeten zijn, wat met de vorige uitkomst overeenkomt.

Substitueeren we deze waarde van $\frac{v}{b}$ in $v' - v$, dan vinden wij voor de maximumwaarde van $v' - v$

$$(v' - v)_{\text{max.}} = \frac{b}{\frac{4\,b}{a'} - 1} = \frac{b}{\frac{32}{27}\frac{T}{T_k} - 1}.$$

Uit den aard der zaak doen wij goed ons te beperken tot temperaturen boven de kritische. Beneden die temperatuur toch is $v' - v$ niet ondubbelzinnig bepaald, en zelfs heeft de vraag naar de waarde van $v' - v$ voor zulke punten op de theoretische isotherme, waarvoor de druk negatief mocht zijn, geen zin. Namen wij dus als uiterste

geval $T = T_k$, dan is de maximumwaarde van $v' - v$ geklommen tot $\frac{27}{5} b$.

Voor de waarde van de verhouding van het maximumbedrag van $v' - v$ en de beginwaarde vinden wij:

$$\frac{1}{\left(\frac{32}{27}\frac{T}{T_k} - 1\right)\left(\frac{27}{8}\frac{T_k}{T} - 1\right)}$$

terwijl T begrepen moet blijven tusschen $\frac{27}{16} T_k$ en T_k. Deze verhouding, die bij $T = \frac{27}{16} T_k$ gelijk aan de eenheid is, bereikt bij $T = T_k$ de waarde 2.27.

Wij kunnen ons nu voor alle temperaturen boven de kritische een beeld vormen van den gang $v' - v$.

1°. voor $T > \frac{27}{8} T_k$ is de limietwaarde van $v' - v$ negatief, en wel gelijk aan $b\left(\frac{27}{8}\frac{T_k}{T} - 1\right)$, en dus begrepen tusschen $- b$ en 0. Voor afnemende waarde van v daalt het bedrag tot het bij $v = b$ de waarde $- b$ bereikt. Er is noch maximum noch minimum en het beloop is dus hoogst eenvoudig.

2°. voor T tusschen $\frac{27}{8} T_k$ en $\frac{27}{16} T_k$ is de limietwaarde positief en wel begrepen tusschen 0 en b. Voor kleiner wordende waarde van v daalt $v' - v$ en zij eindigt weder met $- b$. Voor zekere waarde van v is $v' - v$ dus gelijk nul. Deze waarde van v is hier boven berekend en gelijk gevonden aan $\frac{a' b}{a' - b}$, waarvoor geschreven kan worden:

$$v = \frac{b}{1 - \frac{8}{27}\frac{T}{T_k}}$$

Deze waarde van v ligt dus tusschen ∞ en $2\,b$.

Er is evenmin als in het vorige geval sprake van een maximumwaarde.

3°. voor T tusschen $\frac{27}{16} T_k$ en T_k is de limietwaarde van $v' - v$ begrepen tusschen b en $2^3/_8\, b$. Bij kleiner wordend volume begint

$v' - v$ te stijgen tot zekere maximumwaarde is bereikt, die echter hoogstens 2,27 maal de limietwaarde bedraagt, om daarna te dalen, de waarde gelijk 0 te verkrijgen, en te eindigen met $- b$.

4°. voor waarden van $T < T_k$ hebben alleen die waarden van v praktische beteekenis, die buiten de grenzen van de coëxisteerende gas- en vloeistofvolumes liggen — en zelfs verliest $v' - v$ haar theoretische beteekenis voor zulke volumes, waarvoor de druk op de theoretische isotherme negatief is. Voor $T = \frac{27}{32} T_k$ raakt de isotherme de p-as bij $v = 2b$. De grootheid $v' - v$ is dus daar oneindig groot, omdat voor $p = 0$ ook v' oneindig groot is. Maar dat beteekent volstrekt niet dat voor de bij die temperatuur realiseerbare volumes de waarde van $v' - v$ tot een hoog bedrag klimmen zal. Nemen wij bijv. $T = \frac{27}{32} T_k$. Om nu te vinden, hoeveel $v' - v$ op zijn hoogst bedragen kan, heeft men de waarde van v voor verzadigden damp te zoeken — en die waarde van v in de formule:

$$v' - v = \frac{a' - b - \frac{a' b}{v}}{1 - \frac{a'}{v} + \frac{a' b}{v^2}}$$

te substitueeren. Wij kunnen voor dat geval $\frac{b}{v} = \frac{1}{25}$ stellen — en daar voor die temperatuur $a' = 4b$, vinden wij

$$v' - v = b \frac{3 - \frac{4}{25}}{\left(1 - \frac{2}{25}\right)^2},$$

dus een waarde die nog maar weinig hooger is dan de limietwaarde. Als men de grenskromme langs gaat van $T = T_k$ af tot zeer lage temperaturen, waarbij de dampvolumes zeer groot zijn, kan misschien in den beginne een groote verhouding gevonden worden, maar al zeer spoedig moet die verhouding op weinig na gelijk aan de eenheid worden.

Met behulp van de kennis van $v' - v$, kunnen wij besluiten tot den gang van de grootheid Δ_v, de volumetoename als twee stoffen zich onder standvastig blijvenden druk mengen. Noemen wij het

molekulairvolume van den eersten component onder den gegeven druk v_1, van den tweeden component v_2 en van het mengsel v, dan is v'_1 en v'_2 en v' gelijk aan $\frac{MRT}{p}$ en dus onderling gelijk.

Voor $\Delta_v = v - (1-x)\, v_1 - x\, v_2$ kan dus geschreven worden $\Delta_v = (1-x)(v'_1 - v_1) + x(v'_2 - v_2) - (v' - v)$, en wij vinden dus Δ_v uit de waarden van $v' - v$ voor elk der stoffen.

Voor $v_1 = v_2 = v = \infty$ vinden wij

$$\Delta_v = (1-x)\,(a'_1 - b_1) + x\,(a'_2 - b_2) - (a'_x - b_x) \,.$$

Stellen wij $(1 + a_1)\,(1 - b_1)$, $(1 + a_2)\,(1 - b_2)$ en $(1 + a_x)\,(1 - b_x)$ gelijk 1, dan verkrijgen wij de vergelijking (4) van mijn vorige mededeeling (Verslag Nov. 1898, pag. 240). Ook toen is bij het gelijkstellen van pv_1, pv_2 en pv aan elkander een zelfde benadering toegepast. Maar op de wijze, waarop wij hier deze vergelijking verkregen hebben, blijkt duidelijk, dat

$$x(1-x)\left\{\frac{a_1 + a_2 - 2\,a_{12}}{1 + \alpha t} - (b_1 + b_2 - 2\,b_{12})\right\}$$

slechts de limietwaarde is van Δ_v voor oneindige verdunning, en worden wij tot de vraag gebracht of er omtrent den gang van Δ_v met toenemenden druk iets naders zal zijn af te leiden, en of er misschien rekenschap kan gegeven worden van het feit, dat de getallen die uit KUENEN's waarnemingen voor Δ_v kunnen afgeleid worden, niet de symmetrie vertoonen, die uit den factor $x\,(1-x)$ volgt, en die uit zijn waarnemingen omtrent Δ_p zoo duidelijk blijkt.

Stelt men voor $v'_1 - v_1$, $v'_2 - v_2$ en $v' - v$ de gevonden waarde in de plaats, dan vindt men:

$$\Delta_v = (1-x)\,\frac{a'_1 - b_1 - \dfrac{a'_1\,b_1}{v_1}}{1 - \dfrac{a'_1}{v_1} + \dfrac{a'_1\,b_1}{v_1^2}} + x\,\frac{a'_2 - b_2 - \dfrac{a'_2\,b_2}{v_2}}{1 - \dfrac{a'_2}{v_2} + \dfrac{a'_2\,b_2}{v_2^2}} - \frac{a_x' - b_x - \dfrac{a'_x\,b_x}{v}}{1 - \dfrac{a'_x}{v} + \dfrac{a'_x\,b_x}{v^2}}$$

waarin v_1, v_2 en v de volumes voorstellen, die door de componenten en door het mengsel onder gelijken druk worden ingenomen.

Zoolang wij ons beperken tot groot volume kunnen wij echter v_1, v_2 en v aan elkander gelijkstellen, en wij vinden dan voor den tweeden term van Δ_v (welke door v gedeeld moet worden) de waarde:

$$(1-x)\,a_1'\,(a'_1 - 2\,b_1) + x\,a'_2\,(a'_2 - 2\,b_2) - a'_x\,(a'_x - 2\,b_x)\,.$$

Het teeken dezer grootheid voor de verschillende waarden van x zal beslissen of Δ_v met afnemende waarde van v zal toenemen of

afnemen, en de waarde, die deze grootheid bezit, zal over de maat dezer verandering beslissen. Deze grootheid verdwijnt voor $x = 0$ en $x = 1$, en moet dus $x(1 - x)$ als factor bezitten. Was de overblijvende factor onafhankelijk van x, dan zou er weder symmetrie moeten zijn in de waarde van Δ_v, ook als het volume afneemt. Hangt daarentegen deze factor van x af, dan blijft er nog wel symmetrie in de limietwaarde van Δ_v, maar moet deze symmetrie meer of minder spoedig met toenemenden druk verdwijnen. Nu heeft de overblijvende factor de volgende ingewikkelde gedaante, die ik in de vijf gedeelten, waarin zij gesplitst kan worden zal opgeven:

$$(3 - 3x + x^2)\, a'_1 (a'_1 - 2b_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

$$+ (1 + x + x^2)\, a'_2 (a'_2 - 2b_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

$$- 2(1 - x)^2 \left\{ a'_{12} (a'_1 - 2b_1) + a'_1 (a'_{12} - 2b_{12}) \right\} \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

$$- 2 \quad x^2 \quad \left\{ a'_{12} (a'_2 - 2b_2) + a'_2 (a'_{12} - 2b_{12}) \right\} \quad . \quad . \quad (\delta)$$

$$- x(1 - x) \left\{ 4a'_{12} (a'_{12} - 2b_{12}) + a'_1 (a'_2 - 2b_2) + a'_2 (a'_1 - 2b_1) \right\} \quad (\varepsilon)$$

Stelt men $a'_1 + a'_2 - 2a'_{12} = \Delta_{a'}$ en $b_1 + b_2 - 2b_{12} = \Delta_b$, dan kan de som van deze vijf termen onder den volgenden vorm worden gebracht:

$$(a'_2 - a'_1) \left\{ (a'_2 - b_2) - (a'_1 - b_1) \right\} + 2\Delta_{a'} \left\{ (1-x)(a'_1 - b_1) + x(a'_2 - b_2) \right\} -$$

$$- 2\Delta_b \left\{ (1 - x)\, a'_1 + x\, a'_2 \right\} - 2x(1 - x)\, \Delta_{a'} (\Delta_{a'} - 2\Delta_b).$$

Dus deze grootheid $\frac{x(1 - x)}{v}$ maal genomen, stelt de eerste correctie van Δ_v voor, terwijl $x(1 - x)(\Delta_{a'} - \Delta_b)$ de limietwaarde dezer grootheid voorstelt — zoodat voor x (bijna nul) de waarde van Δ_v gelijk is aan

$$x(1-x) \left\{ (\Delta_{a'} - \Delta_b) + \frac{(a'_2 - a'_1)\left\{(a'_2 - b_2) - (a'_1 - b_1)\right\} + 2\Delta_{a'}(a'_1 - b_1) - 2\Delta_b a'_1}{v_1} \right\}$$

en voor x (bijna 1) gelijk aan

$$x(1-x) \left\{ (\Delta_{a'} - \Delta_b) + \frac{(a'_2 - a'_1)\left\{(a'_2 - b_2) - (a'_1 - b_1)\right\} + 2\Delta_{a'}(a'_2 - b_2) - 2\Delta_b a'_2}{v_2} \right\}$$

Er is dus duidelijke asymmetrie, zoodra $a'_2 - b_2$ merkbaar grooter is dan $a'_1 - b_1$, maar de verschillende gevallen, die voor kunnen komen zijn zoo talrijk, dat het bij gebrek aan experimenteel materiaal voorloopig beter is de verdere discussie achterwege te laten.

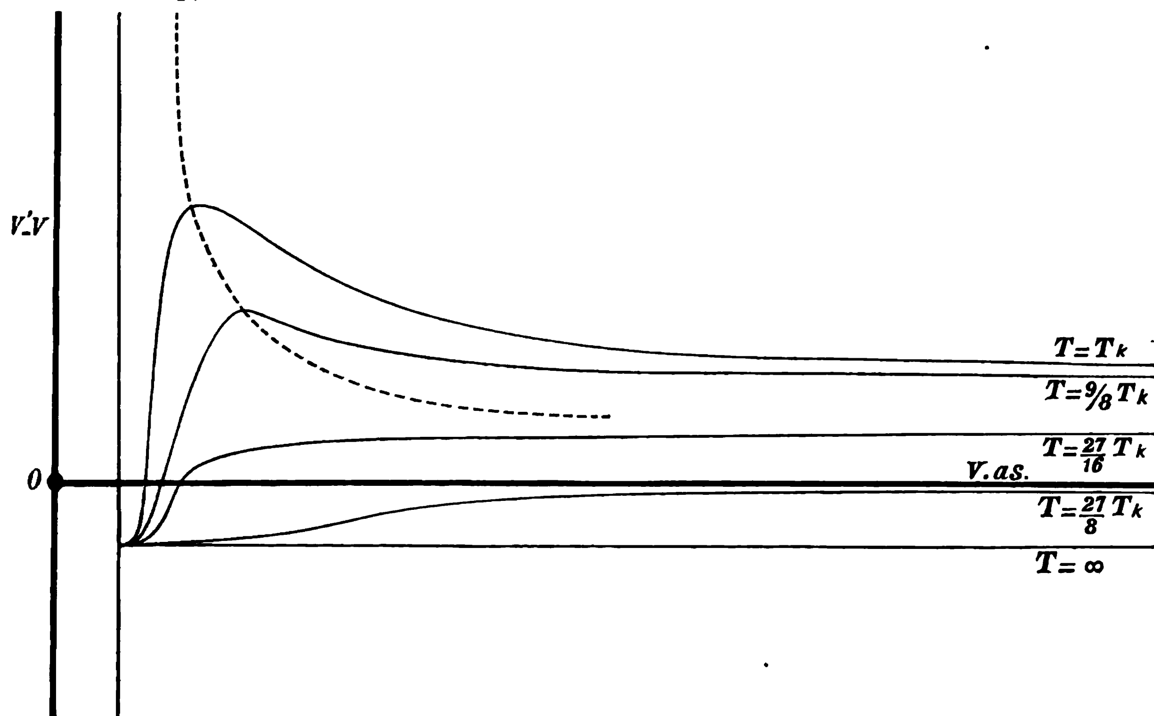
Toch moet opgemerkt worden, dat de asymmetrie niet zoo groot is, dat er rekenschap zou kunnen gegeven worden van de omstandigheid, dat KUENEN's waarden voor $(\Delta_p)'$ [1]) voor $x = {}^3/_4$, $x = {}^1/_2$ en $x = {}^1/_4$ zoo weinig van elkander verschillen, terwijl bijna zonder uitzondering het hoogste bedrag bij $x = {}^3/_4$ opgegeven wordt.

Daar echter de juiste waarde van Δ_v te ingewikkelde berekeningen eischt om daaruit algemeene gevolgtrekkingen af te leiden, zullen wij de grafische voorstelling te hulp roepen om ten minste een beeld te geven van het verloop dezer grootheid.

Beschouwen wij daartoe den vorm:

$$\Delta_v = (1 - x)\ (v'_1 - v_1) + x\,(v'_2 - v_2) - (v'_x - v),$$

waaruit blijkt, dat Δ_v kan beschouwd worden, als een resulteerende van drie afzonderlijke grootheden, nl. $v'_1 - v_1$, $v'_2 - v_2$ en $v' - v$. Elk dezer grootheden, welke hierboven bediscussieerd zijn, heeft een beloop, zooals in de volgende figuur is voorgesteld.



1) Zie tabel pag. 243.

In bovenstaande figuur zijn tot assen genomen v en $v'-v$. De oorsprong is in het punt 0. Bij $T = \infty$ is $v'-v$ voor alle waarden van v gelijk aan $-b$. In de teekening is daarvoor aangegeven een lijn evenwijdig aan de v-as. Natuurlijk dat, als ook de veranderlijkheid van b met het volume in rekening kon genomen worden, deze rechte lijn zou moeten veranderd worden in een kromme, die bij groot volume asymptotisch nadert tot den nu geteekenden stand, en die bij het limietvolume merkbaar dichter tot de v-as is genaderd. Trouwens, alle lijnen zouden daardoor, vooral in de regio der kleine volumes, gewijzigd moeten worden.

Bij oneindigen druk is bij alle temperaturen de waarde van $v'-v$ gelijk $-b$. Vandaar dat alle lijnen door hetzelfde punt gaan. Naarmate de temperatuur daalt beginnen de kromme lijnen bij oneindig volume hooger. Geteekend zijn de krommen voor $T = \frac{27}{8} T_k$ (de temperatuur, waarop een stof bij oneindig volume de wet van Boyle volgt); voor $T = \frac{27}{16} T_k$ (de temperatuurgrens waarbij $v'-v$ een maximumwaarde begint te vertoonen), voor $T = {}^9/_8\, T_k$ en $T = T_k$.

De maxima liggen op een gelijkzijdige hyperbool, die $v = 2b$ en $v'-v = b$ tot asymptoten heeft.

Bij eenigszins groot volume verschillen de verschillende krommen niet merkbaar van rechte lijnen evenwijdig aan de v-as.

Zoodra T daalt beneden T_k, kan de grootheid $v'-v$ zeer groot worden; dit geschiedt dan echter tusschen zulke waarden van v, die binnen de grenskromme liggen, en dus òf in den regel niet òf in het geheel niet kunnen verwezenlijkt worden.

Heeft men nu voor beide stoffen, waaruit het mengsel zal samengesteld worden, zulke lijnen geconstrueerd, wier afmeting en vorm zal afhangen van b en $\frac{a'}{b}$, dan verkrijgt men daaruit de grafische voorstelling van $(1-x)(v_1'-v_1) + x(v_2'-v_2)$ door telkens twee punten dier lijnen door een rechte lijn te vereenigen en op die rechte lijn een punt te nemen, dat haar verdeelt in deelen omgekeerd evenredig met x en $1-x$. De twee gekozen punten moeten steeds behooren tot waarden van v_1 en v_2, die onder gelijken druk voorkomen. De op deze wijze verkregen kromme zal des te meer tot $v_1'-v_1$ naderen, naarmate x kleiner is, en kan in een zeker opzicht beschouwd worden als een gemiddelde. Heeft men nu ook $v'-v$ geconstrueerd, dan vindt men Δ_v door het verschil te nemen van de ordinaat van de resulteerende kromme der twee eerstgenoemde en van de laatstgenoemde, telkens voor zulke waarden van v, die bij gegeven p voorkomen.

Ofschoon uit deze wijze van construeeren van Δ_v nu wel de gang van Δ_v niet in bijzonderheden volgt, zijn er toch wel eenige algemeene regels uit af te leiden. Zooals reeds opgemerkt is vinden wij voor v gelijk oneindig de vroegere waarde terug, nl. $x(1-x)\{\Delta_a'-\Delta_b\}$. Voor de limietwaarde aan de andere zijde vinden wij:

$$-\Delta_v = b_1(1-x) + b_2 x - b_x = x(1-x)\Delta_b,$$

dus een contractie. In al die gevallen waarin $\Delta_a'-\Delta_b$ positief is, moet er dus ook een druk bestaan, waaronder menging zonder volumeverandering plaatsgrijpt. Bij groote volumes, waarbij $v_1'-v_1$, $v_2'-v_2$ en $v'-v$ bijna onveranderd blijven, zal Δ_v ook niet veel veranderen, d.w.z. absoluut beschouwd — maar relatief ten opzichte der limietwaarde, zou dit aanzienlijk kunnen zijn. Maar in elk geval blijkt, dat als geen der drie stoffen, nl. de componenten en het mengsel, merkbaar beneden de kritische temperatuur zijn [1]), de absolute waarde van Δ_v binnen eindige grenzen blijft over het geheele beloop der isotherme.

Beproeven wij rechtstreeks $(\Delta_p)'$ te berekenen, nl. de drukverhooging, die op het mengsel moet aangebracht worden om het volume gelijk te doen blijven aan de som der afzonderlijke volumes, dan vinden wij daarvoor de volgende uitdrukking:

$$\frac{(\Delta_p')\{v_1(1-x)+v_2 x\}}{x(1-x)} = -$$

$$= -\frac{\frac{v}{v-b_x}(b_1+b_2-2b_{12}) + b_1\left(\frac{v_2-b_2}{v_1-b_1}-1\right) + b_2\left(\frac{v_1-b_1}{v_2-b_2}-1\right)}{(v_1-b_1)(1-x)+(v_2-b_2)x}(1+at) +$$

$$+\frac{a_1\frac{v_2}{v_1}+a_2\frac{v_1}{v_2}-2a_{12}}{v_1(1-x)+v_2 x}.$$

Voor volumes, die niet al te klein zijn bijv. tot 0,03 dalen, zou men bij benadering kunnen stellen

$$(\Delta_p') = \frac{x(1-x)}{[v_1(1-x)+v_2 x]^2}\left\{\left(a_1\frac{v_2}{v_1}+a_2\frac{v_1}{v_2}-2a_{12}\right) - \right.$$

$$\left. -(b_1+b_2-2b_{12})(1+at)\right\}.$$

---

[1]) Voor het mengsel wordt hier door kritische temperatuur verstaan die, welke uit a_x en b_x op dezelfde wijze berekend wordt alsof het een onsplitsbare stof goldt.

Laat men v_1 en v_2 gelijk en verandert men alleen de waarde van x, dan is $(\Delta_p)'$ een maximum als $\frac{x}{1-x} = \frac{v_1}{v_2}$. Dit leidt tot den regel, dat de maximumwaarde van $(\Delta_p)'$, die bij kleine waarden van p bij mengsels van gelijke samenstelling gevonden wordt, bij verhoogde drukking overgaat naar mengsels, waarbij die component in overmaat is, die het meest samendrukbaar is. Daar bij zeer kleine volumes Δ_v van teeken omkeert, zal dit ook met $(\Delta_p)'$ het geval moeten zijn.

Zij $a_1 - b_1 (1 + \alpha t) = 0$, dan volgt de eerste component de wet van BOYLE. Evenzoo als $a_2 - b_2 (1 + \alpha t) = 0$, de tweede component. Is $a_{12} - b_{12} (1 + \alpha t)$ dan geldt de wet van DALTON. En eindelijk als $(a_1 + a_2 - 2 a_{12}) - (b_1 + b_2 - 2 b_{12}) (1 + \alpha t) = 0$, dan is er geen volumecontractie, en geldt de wet van AMAGAT. Dit alles bij de onderstelling van zeer groote gasvolumes. Noemen wij de temperaturen, waarbij deze vier betrekkingen vervuld zijn: t_a, t_b, t_c en t_d. Is $t_a > t_b > t_c$, dan is ook $t_d > t_c$. De onderstelling $t_a > t_b > t_c$ is vervuld, als er van beide componenten mengsels kunnen gevormd worden, waarvoor de kritische temperatuur beneden die der componenten ligt [1]). Dan is dus t_c de laagste dezer vier bijzondere temperaturen.

Omgekeerd is t_c de hoogste dezer vier temperaturen als er mengsels mochten bestaan, wier kritische temperatuur hooger is dan die der componenten. In het algemeen bestaat tusschen deze vier temperaturen de betrekking:

$$b_1 t_a + b_2 t_b = 2 b_{12} t_c + (b_1 + b_2 - 2 b_{12}) t_d .$$

Voeren wij een temperatuur t_m in, zoodanig dat

$$(b_1 + b_2) t_m = b_1 t_a + b_2 t_b$$

dan ligt t_m altijd tusschen t_c en t_d, terwijl de afstand tusschen t_m en t_c kleiner is dan die tusschen t_m en t_d.

---

[1]) Moleculartheorie. Phys. Chem. V. 2, Seite 149.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 45 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden, Dr. J. VERSCHAFFELT: „*Metingen over het verloop der isothermen in de nabijheid van het plooipunt, en in het bijzonder over het verloop der retrograde condensatie bij een mengsel van koolzuur en waterstof*".

§ 1.

Over het verloop der retrograde condensatie zijn door KUENEN bij een zijner eerste mededeelingen over dit onderwerp reeds eenige metingen gegeven, uit welke het verloop der verhouding van het volume der vloeistofphase tot die der dampphase bij ééne bepaalde temperatuur over het geheele gebied der condensatie langs ééne bepaalde x-lijn (ψ-vlak van VAN DER WAALS) wordt gegeven. Het was wenschelijk een overzicht te verkrijgen over het verloop der condensatie langs verschillende x-lijnen op een zelfde ψ-vlak (in 't bijzonder tusschen het kritisch plooipunts- en het kritisch raakpuntsgehalte), of, wat voor het algemeen beloop op hetzelfde neerkomt, bij een bepaald gehalte het verloop der condensatie te kennen langs lijnen behoorende bij eene zelfde x, doch bij ψ vlakken voor verschillende temperaturen in de nabijheid van, en in het bijzonder tusschen de kritische plooipunts- en de kritische raakpuntstemperatuur voor dit bepaalde gehalte x.

Gelegenheid om metingen hierover te verrichten werd aangeboden door een meer uitgebreid onderzoek over de isothermen van mengsels van waterstof en koolzuur, hetgeen door mij werd ondernomen [1]).

§ 2. *Methode.*

De zuivere waterstof werd bereid met den toestel, die wordt gebruikt bij het vullen van waterstof-thermometers voor het meten van lage temperaturen, en reeds vroeger [2]) werd beschreven. Het zuivere koolzuur werd verkregen uit het vloeibare gas uit den handel, volgens de methode door KUENEN [3]), en na hem in het physisch laboratorium te Leiden geregeld toegepast. De wijze waarop het mengsel wordt gemaakt en de daartoe gebruikte toestel waren in hoofdzaak dezelfde als die, welke vroeger door

---

[1]) Vergelijk KAMERLINGH ONNES, Versl. Kon. Akad., Dec. 1894, pg. 179.

[2]) KAMERLINGH ONNES, Versl. Kon. Akad., 30 Mei 1896; 27 Juni 1896. Comm. fr. the Lab. of Phys. of Leyden, N°. 27.

[3]) Diss. Leiden, 1892.

Kuenen[1]) **bij een soortgelijk onderzoek werden beschreven, (zie nevensgaande figuur).**

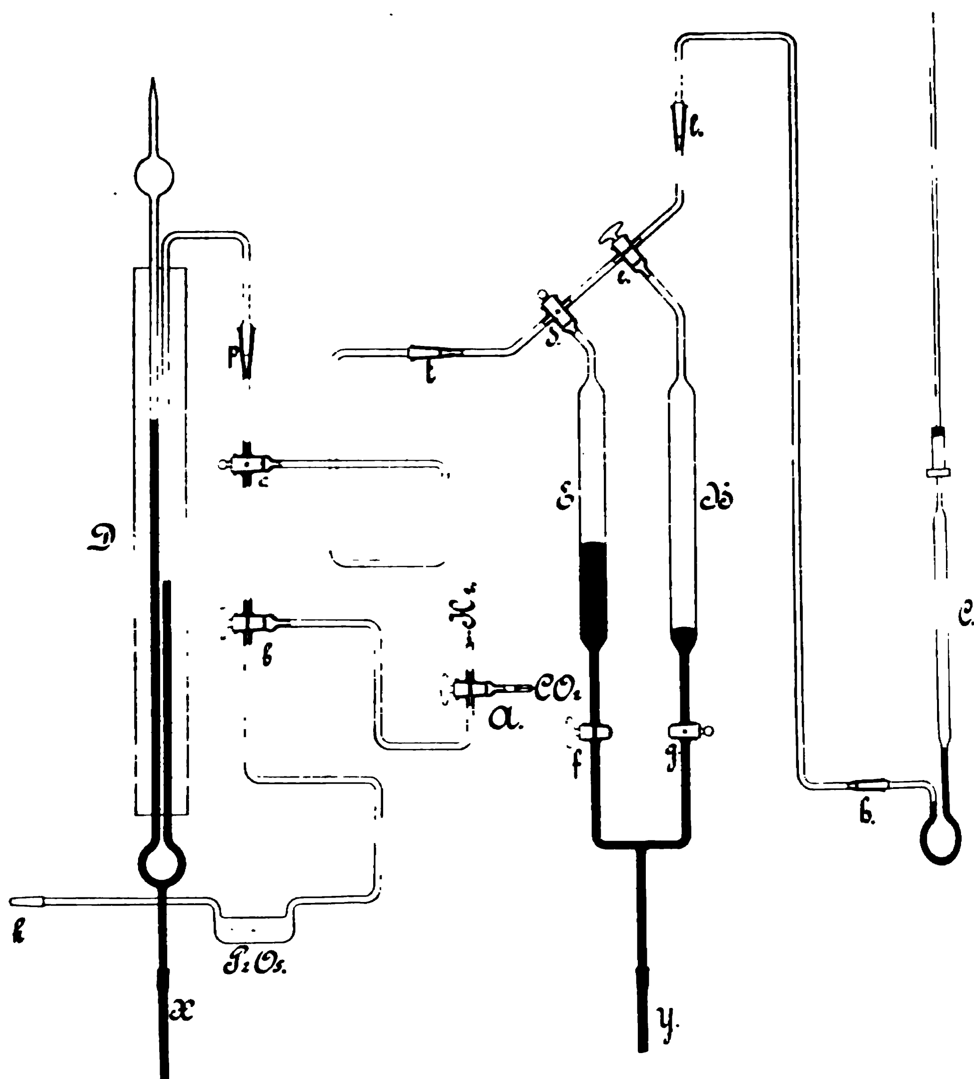


Fig. I.

Kleine hoeveelheden waterstof, aan het koolzuur toegevoegd, geven reeds een groote druktoename bij het condenseeren van dit laatste gas. Om het einde der condensatie te kunnen bereiken, zonder gevaar te loopen de glazen buizen onder den druk te zien bezwijken, werden de proeven genomen met een mengsel dat op 100 mol. slechts 5 mol. waterstof bevatte.

---

[1]) *loc. cit.*

De volumina van het mengsel werden gemeten in eene manometerbuis waarvan de inwendige doorsnede ongeveer 0,05 cM² bedroeg, en waarop een verdeeling in m.M was geëtst, van welke de nauwkeurigheid te voren met een kathetometer was onderzocht. De calibratie geschiedde door de buis met kwik te vullen, en deze vloeistof in kleine hoeveelheden te laten uitstroomen; de uitgeloopen kwikdraden werden gewogen, terwijl de lengten er van met den kathetometer bepaald werden.

Voor volmaakt evenwicht der phasen werd gezorgd door roeren met een electromagnetischen roerder, eerst door KUENEN[1]) gebruikt en beschreven, en later ook nog door VAN ELDIK[2]) en HARTMAN[3]) toegepast. Bij het meten der volumina moest rekening worden gehouden met den inhoud van het roerdertje. Dit volumen werd berekend uit den vorm van het lichaampje welke zeer regelmatig was: het bestond uit een nagenoeg volkomen cylindrisch gedeelte van 28,5 m.M. lengte en gemiddeld 1,450 m.M. diameter, aan de uiteinden voorzien van twee bolletjes, waarvan de diameters 2,300 en 2,383 m.M. waren. Uit deze gegevens werd voor den inhoud van het lichaampje 60,4 m.M³ gevonden.

De samendrukbaarheid van het mengsel werd vergeleken met die van zuivere waterstof. Daartoe werd de proefbuis in verband gebracht met een tweede manometerbuis, die evenals de eerste van eene ingeëtste, met een kathetometer onderzochte, schaalverdeeling in m.M. was voorzien, en zorgvuldig gecalibreerd was geworden. Zij was echter veel nauwer dan de vorige: de doorsnede bedroeg slechts ± 0,006 cM². Deze buis was met eene bekende hoeveelheid zuivere waterstof gevuld.

Uit de specifieke volumina van de waterstof, d.w.z. de verhoudingen tot het volumen bij 0° en 1 atm., werden de drukkingen berekend door middel van de formule:

$$p\,(v-0{,}000690) = 0{,}99931 + 0{,}00373\,t,$$

die ik aan de laatste waarnemingen van AMAGAT[4]), omtrent de samendrukbaarheid van waterstof, heb ontleend.

Volumina en drukken werden tot op $^1/_{1000}$ nauwkeurig berekend, daar een grootere graad van nauwkeurigheid bij deze proeven niet te verwachten was.

De twee glazen manometers werden op de gewone wijze vastgeschroefd in twee stalen bussen, voor de helft gevuld met kwik, verder met glycerine als vloeistof om den druk uit eene perspomp over te

---

1) *loc. cit.*

2) Versl. Kon. Akad., 29 Mei 1897; 21 Juni 1897. Comm., N°. 39.

3) Versl. Kon. Akad., 25 Juni 1898. Comm., N°. 43.

4) Annales de Chim. et de Phys., 6e série, t. XXIX.

brengen. Van onderen waren de bussen langs eene met kwik gevulde stalen buis verbonden; van boven communiceerden ze langs eene koperen buis met T-stuk dienende voor koppeling met de perspomp.

Door de onderste verbinding der twee bussen, onlangs door HARTMAN [1]) ingevoerd, wordt vermeden dat er een niveau-verschil ontstaat van de kwik in de twee bussen, een verschil waarmede rekening zou moeten worden gehouden zonder dat het echter met voldoende zekerheid kan worden bepaald. Er behoefde dus alleen nog rekening te worden gehouden met het hydrostatische drukverschil, dat het gevolg was van een ongelijken stand van de kwik in de twee buizen, en van het verschil in capillaire neerdrukking tengevolge van den ongelijken diameter der twee buizen. Uit een opzettelijk daarvoor genomen proef bleek, dat dit laatste verschil slechts circa 7 m.M. bedroeg, een bedrag dat verwaarloosd mocht worden als zijnde kleiner dan de mogelijke waarnemingsfout bij het meten der drukkingen.

Geschikte temperaturen, van af kamertemperatuur tot even boven de kritische temperatuur van koolzuur, werden verkregen met eene inrichting, die het eerst door VAN ELDIK [2]) en tegelijkertijd met mij nog door HARTMAN [3]) werd gebruikt. Het waterbad was ingericht op de wijze, die ik reeds vroeger [4]) heb beschreven, en die na dien tijd nog door VAN ELDIK [5]) werd toegepast. Kwamen nog kleine temperatuurschommelingen voor, dan werden de waarnemingen tot eene zelfde gemiddelde temperatuur gereduceerd, door gebruik te maken van een benaderden temperatuurcoëfficient, die uit de ongecorrigeerde proeven was af te leiden.

§ 3. *De isothermen.*

In de tabel I worden de uitkomsten der isothermen-bepalingen medegedeeld. De druk is uitgerekend in atmospheren, de volumina zijn gemeten door als eenheid te nemen het volumen, ingenomen door de gebruikte hoeveelheid van het mengsel, bij eene temperatuur van 0° C. en een druk van 1 atm. De herleiding geschiedde door gebruik te maken van den uitzettingscoëfficient van koolzuur 0,00371 voor de reductie tot 0°, en van de wet van Boyle voor de reductie tot 760 m.M. De afwijkingen daarvan zijn zeker te klein om een verschil te geven grooter dan de mogelijke waarnemingsfouten.

1) *loc. cit.*
2) *loc. cit.*
3) *loc. cit.*
4) Versl. Kon. Akad., 27 Juni 1896, Comm., n°. 23.
5) *loc. cit.*

TABEL I.

Temp.	Volum.	Druk.	Temp.	Volum.	Druk.	Temp.	Volum.	Druk.
15°.30	0.02761	31.71	26°.80 (verv.)	0.006505	80.10	27.30 (verv.)	0.004079	93.10
	2431	34.52		6075	81.75		3765	96.10
	2083	39.49		5730	83.20		3404	101.7
	1695	45.53		5355	84.80		3008	113.0
	1308	53.30		4214	91.20	27°.50 (kr. r. t.)	0.006505	80.80
	1192	55.90		4180	91.50		6120	82.40
	1157	56.80		4044	92.50		5735	84.05
	1115	57.80		3995	93.00		5365	84.80
	1078	58.15		3966	93.20		5400	85.50
	09220	59.85		3421	100.05		4995	87.50
	07270	62.80		3026	110.55		4665	89.35
	05295	68.45	27°.10 (pl. pt. temp.)	0.005735	83.55		4593	89.90
	03554	81.40		5370	85.10		4464	90.55
	02554	104.0		4219	91.60		4428	90.75
	02510	109.2		(pl.p.) 4079	92.80		4413	90.90
	02481	112.5		4044	93.15		4314	91.50
	02438	118.2		4009	93.40		4272	91.80
21°.50	0.02079	41.03		3980	93.60	27°.90	0.004593	90.30
	1688	43.99		3943	94.00		4201	93.00
	1698	47.43		3931	94.20		3803	97.00
	1501	51.40		3731	96.10		3334	104.5
	1308	56.00	27°.30	0.02090	42.28		3062	112.4
	1116	61.00		1695	49.26		2964	116.7
	09230	66.65		1310	58.40	32°.10	0.02084	43.40
	08485	68.70		09030	70.60		1889	46.82
	07270	71.05		06500	80.65		1692	50.75
	05310	76.80		06145	82.10		1500	55.20
	03645	88.90		05725	83.90		1308	60.50
	02843	104.0		05355	85.45		1111	66.75
	02794	106.3		04966	87.40		09230	73.70
	02743	108.8		04542	89.90		07265	82.20
	02687	113.8		04271	91.50		05330	91.85
	02623	119.7		04236	91.80		04207	100.45
26°.80	0.009160	70.50		04214	92.00		03391	113.15
	7215	77.40		04193	92.60			

In Fig. I van de plaat wordt het verloop der isothermen voorgesteld, waarbij opgemerkt moet worden dat de schaal der volumina willekeurig genomen is. Bij temperaturen gelegen beneden 27°.50 werd scheiding in twee phasen waargenomen; 27°.50 is de kritische raakpuntstemperatuur van het mengsel. De isothermen van 15°.30 en 21°.50 vertoonen duidelijk eene discontinuiteit in helling, die van de splitsing in twee phasen het gevolg is [1]).

De punten waar condensatie begint en eindigt zijn in het diagram door eene kromme lijn verbonden geworden, die de grenslijn is tusschen het gebied waar slechts één en het gebied waar twee phasen aanwezig zijn. De gemeenschappelijke raaklijn aan grenslijn en isotherme is niet, zooals bij eene zuivere stof, horizontaal. Wat het verloop der grenslijn bij nog kleinere volumina betreft, vermelden wij, dat zij ergens een buigpunt moet vertoonen en ten slotte naar de as der volumina moet terugkeeren. In de figuur keert ze echter haar bolle zijde naar deze as, zoodat dit terugkeeren waarschijnlijk eerst bij zeer hoogen druk geschieden zal.

Waargenomen werd dat bij een temperatuur van 27°.10 bij vermindering van volumen de meniscus hoe langer hoe minder duidelijk werd om ten slotte in nevelvorm midden in de buis te verdwijnen, wanneer het volumen 0.004079 en de druk 92.80 atm. werden bereikt. Dit punt is dus het plooipunt voor het gehalte $x = 0{,}05$. Het kritische raakpunt is niet met nauwkeurigheid uit de proeven zelf af te leiden; het beste is uit de figuur het raakpunt te zoeken van kritische isotherme en grenslijn. Men vindt aldus met vrij groote zekerheid voor elementen van het kritisch raakpunt voor het gehalte $x = 0{,}05$: $t = 27°.50$; $v = 0.0048$; $p = 88.3$ atm.

Uit de isothermen boven de kritische kan de waarde van den spanningscoëfficient voor verschillende volumina worden bepaald. Deze spanningscoëfficient zal binnen de enge temperatuurgrenzen wel als constant mogen worden beschouwd, en de waarnemingen bij groote volumina wijzen daar ook op. Deze spanningscoëfficienten zijn:

v	$\left(\frac{dp}{dt}\right)$
$v = 0.0338$	$= 0.138$
281	0.172
225	0.218
203	0.247
180	0.286
158	0.339

[1]) In tabel I zijn de volumina, waarbij scheiding in twee phasen plaats heeft, onderstreept.

$v = 0.0338$	$\left(\frac{dp}{dt}\right)_v = 0.138$
135	0.413
112	0.520
101	0.59
090	0.69
079	0.84
068	1.00
056	1.23
045	1.50
034	2.40

Met behulp van deze spanningscoëfficienten werden de labiele stukken der isothermen geëxtrapoleerd en op de figuur doorgetrokken. Slechts bij 15°.30 en 21°.50 wijkt het geëxtrapoleerde stuk voldoende van het waargenomene af om duidelijk te worden onderscheiden. Evenals bij eene zuivere stof snijden de twee krommen elkander en begrenzen zoodoende twee oppervlakken, die nu, evenals bij eene zuivere stof, gelijke inhouden hebben moeten. Op de figuur is dadelijk te zien dat aan deze voorwaarde werkelijk wordt voldaan, voor zoover dit enkel door aanschouwing te beoordeelen valt. Een zuiverder proef door meting der oppervlakken, is nutteloos wegens de onzekerheid der extrapolatie.

§ 4. *Het verloop der condensatie.*

Beneden de plooipuntstemperatuur was het verloop der condensatie normaal: de hoeveelheid vloeistof nam steeds toe terwijl het volumen kleiner werd, zoodat ten slotte de geheele ruimte met vloeistof was gevuld. Tusschen de kritische raakpuntstemperatuur en de plooipuntstemperatuur was duidelijk retrograde condensatie waar te nemen.

Om het verloop der condensatie graphisch voor te kunnen stellen werden de bij bepaalde volumina behoorende vloeistofvolumina gemeten. De uitkomsten dezer metingen worden gegeven in tabel II.

Deze tabel is in fig. 2 van de plaat graphisch voorgesteld. Duidelijk ziet men daarop het normale verloop der condensatie beneden de plooipuntstemperatuur 27.°10; de condensatielijnen stijgen geregeld en eindigen in punten gelegen op een rechte lijn met een helling van 45°: daar is het vloeistofvolumen gelijk aan het totale volumen. Boven de plooipuntstemperatuur stijgt eerst de condensatielijn maar keert

TABEL II.

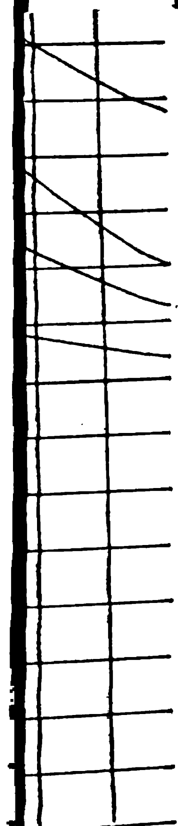
Temp.	Totaal vol.	Vloeist vol.	Temp.	Totaal vol.	Vloeist. vol.	Temp.	Totaal vol.	Vloeist. vol.
15°.30	0.01115	0.000015	26°.80	0.005725	0.000076	27°.30 (verv.)	0.004586	0.000647
	1078	56		5355	371		4542	761
	09220	390		4214	1529		4428	803
	07270	879		4180	1592		4392	789
	05295	1435		4044	1806		4351	881
	03554	2103		3995	1947		4315	647
	02554	2555	27°.10 (pl. pt. temp.)	0.005142	0.000395		4337	476
21°.50	0.008485	0.000021		4543	970		4299	440
	7310	448		(pl.p.)4079	1493		4314	384
	5310	1237	27°.30	0.005355	0.000057		4271	191
	3670	2125		4968	377			

ten slotte snel dalend naar de abscissen-as terug; het verloop dezer condensatielijnen is dus, in overeenstemming met wat uit de figuur van KUENEN kan worden afgeleid, zeer asymmetrisch, en wordt het des te meer naarmate men dichter bij het plooipunt komt; nadert men het plooipunt van beneden af dan worden de condensatielijnen in het laatste gedeelte ook hoe langer hoe steiler. Wat de condensatielijn van de plooipuntstemperatuur zelf betreft, zij eindigt in het punt met de abscis 0.004079, en de ordinaat 0.001494. Men kan echter ook de loodlijn door dat punt beschouwen als van deze condensatielijn deel uitmakende; dan wordt de sprong van het steile stijgen aan den eenen kant, tot het steile dalen aan den anderen kant duidelijker gemaakt.

Ten slotte geven wij hier nog de volumina en drukkingen bij begin en einde der condensatie zooals die op fig. 1 en 2 worden afgelezen.

	Begin condensatie.		Einde condensatie	
Temperatuur.	Volumen.	Druk.	Volumen.	Druk.
15°.30	0.01116	57.80	0.002554	104.0
21°.50	0.008580	68.60	0.002904	101.1
26°.80	0.005875	82.60	0.003849	94.20
27°.10 (pl. p. t.)	0.005650	83.85	0.004079	92.80
27°.30	0.00540	85.5	0.00429	91.5
27°.50 (kr. r. t.)	0.0048	88.3	0.0048	88.3

ier retrogr



Deze gegevens kunnen, in verband met die voor andere mengsels, dienen voor het teekenen van het verloop der binodale lijn op de ψ-vlakken, en voor het opmaken van het p-v-t-diagram.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan mededeeling n°. 46 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden, Dr. L. H. SIERTSEMA: „*Metingen over de magnetische draaiingsdispersie in gassen*".

1. *Beschrijving van toestellen.* Ter aanvulling en verduidelijking van de beschrijving der toestellen, welke bij het onderzoek zijn gebruikt [1]), kunnen de hierbij gevoegde afbeeldingen dienen.

Vooreerst vindt men in fig. 1 een overzicht van alle toestellen, en van den loop der verschillende electrische stroomen, terwijl fig. 2—5 doorsneden voorstellen van de beide nicolhouders. Voor de beschrijving hiervan zie men de mededeeling van Maart 1896, voor de draadklossen die van Juni 1893, voor de draaiingsinrichting en verschillende andere onderdeelen die van Jan. 1895. De beschrijving van de spiegelaflezing, waarvan fig. 6 een overzicht, fig. 7 en 8 onderdeelen voorstellen, is evenzeer in laatstgenoemde mededeeling te vinden. In fig. 9 zijn de hooge-drukleidingen afgebeeld met den manometer, terwijl fig. 10 een der gebruikte hooge-drukkranen voorstelt. Fig. 11 geeft ten slotte eene doorsnede van het stelsel waterleidingsbuizen met de thermometers.

VERKLARING DER AFBEELDINGEN.

Fig. 1. *Algemeen overzicht.* A collimator, B kleine nicolhouder, C en D draadklossen, E groote nicolhouder, FF proefbuis, G schroef voor het draaien van den kleinen nicolhouder, welke hiermede verbonden is door de staaldraad HH, loopende over het rolschijfje O; I gewicht om den nicolhouder terug te draaien, L vertikale verdeelde glazen schaal, waarop de draaiing van den spiegel N wordt afgelezen in den kijker K door den tusschenspiegel M, P prisma en Q kijker van den spectrometer, X schakelbordje waar de stroomen het vertrek binnen komen, γ booglamp, waarvan de motor gevoed wordt door eene dunnere, van knop 3 komende leiding, α regelweerstand en β amperometer voor de booglamp, Y ballastweerstand, ε schakelaar om den stroom van de draadklossen hierop over te zetten of te openen, δ commutator voor het omkeeren van den stroom in de draadklossen, Z schakelaar waarmee alle toestellen kunnen worden uitgeschakeld behalve de vertakkingsbuis T, welke een takstroom levert aan den galvanometer V met den stopcommutator U.

---

[1]) Zittingsversl. Kon. Akad. 1893/94, p. 31; 1894/95 p. 230; 1895/96 p. 294, 317 1896/97 p. 131,132.

Fig. 2—5. *Doorsneden van de beide nicolhouders.* *a* nicol, gemonteerd in een h *q*, en met den stelring *b* in den nicolhouder *m* bevestigd. *f* proefbu waaraan het pijpje met flens *n* is gesoldeerd, en die door de moe met pakkingring *t* aan den nicolhouder is verbonden, *e* verbindin moertje voor de hooge-drukleiding, *h* niveau, *o* flens met zes bouten moeren *p*, *c* glasplaat met de moer *d* en de loodpakking *r*, die d ringetjes *s* wordt opgesloten, *u* waaraan de staaldraad *h* (zie *II* fig. is bevestigd.

Fig. 6 *Overzicht van de spiegelaflezing.* *K* kijker, *L* verdeelde glazen sch *Q* verlichtingsspiegelreepen, *M* tusschenspiegel, *N* aflezingsspiegel.

Fig. 7 en 8. *Spiegeldrager* op de sluitmoer van den kleinen nicolhouder, *d* sl moer, *X* en *Y* twee ringen, *Z* klemschroefje, *N* aflezingsspiegel.

Fig. 9. *Hooge-drukleiding.* *F* cylinder met samengeperst gas, *A* hooge dr kraan om deze af te sluiten, *B* kraan om den manometer af te slui *C* en *D* kranen om gas af te tappen, *T* verbinding met de proefbui

Fig. 10. *Hooge-drukkraan.* Zie *A*, *B*, *C* en *D* van de vorige figuur.

Fig. 11. *Doorsnede van de waterleidingsbuizen met thermometers.* *i i* doorsne van de buizen, k_1 aanvoer, k_2 afvoer, l_1 en l_2 thermometers, m_1 en sluitmoeren.

Fig. 12. *Krommen van de draaiingsconstanten.* Zie later.

2. *Interpolatieformules van verschillenden vorm.* Zooals re vroeger werd besproken [1]) leiden de verschillende theorieën der m netische draaiing tot twee vormen van formules voor de draaiingsco stante ω, namelijk

$$\omega = \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_3}{\lambda^3} + \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$\omega = \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_4}{\lambda^4} + \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; ($$

Met het oog daarop, dat men bij zuurstof met twee termen m den eersten vorm eene betere aansluiting aan de waargenom draaiingsconstanten verkreeg dan met den tweeden vorm [2]), zijn de latere mededeelingen alleen interpolatieformules van den vorm met twee termen gepubliceerd. Intusschen leerde de voortzetting berekeningen dat voor bijna alle gassen de vorm (II) met tw termen beter voldeed. Het tegendeel was, behalve bij zuurstof, alle

---

[1]) Zittingsversl. 1894/95 p. 237.
[2]) " " p. 238.

het geval bij eenige mengsels van zuurstof en stikstof, waaronder vooreerst lucht, dan een mengsel met 87.8 pCt. zuurstof, waarover in het begin [1]) reeds eenige waarnemingen zijn vermeld, en verder een mengsel met 26.0 pCt., waarmee slechts enkele, niet medegedeelde waarnemingen zijn gedaan. Voor deze gassen waren bij den vorm (II) evenals bij zuurstof drie termen noodig.

Ter beoordeeling van de goede aansluiting van de formules is steeds volgens de regels van de methode der kleinste kwadraten de waarschijnlijke fout berekend van eene waarneming van het gewicht één. In de volgende tabel vindt men in de twee eerste kolommen deze waarschijnlijke fouten vereenigd. Bij den vorm (II) zijn daarbij, zooals reeds boven werd gezegd, *drie* termen genomen bij zuurstof, en de zuurstof bevattende mengsels, en *twee* termen bij de andere gassen. De fouten hebben betrekking op de draaiingsconstanten uitgedrukt in minuten, vermenigvuldigd met 10^6, en voor den druk en de temperatuur, die bij de waarnemingen zijn vermeld.

WAARSCHIJNLIJKE FOUTEN.

Vorm interpolatie formule:	I	II	III
Zuurstof	5.8	5.4	5.0
Mengsel met 87.8 pCt. O	6.9	7.8	
〃 〃 26.0 〃 O	3.9	3.0	
Lucht	3.2	2.7	4.4
Stikstof	9.8	7.4	7.7
Waterstof	8.9	4.7	4.2
Koolzuur I	0.147	0.122	0.106
〃 II [2])	0.184	0.081	0.047
Stikstofoxydule	5.4	3.0	2.2

Een onderzoek van de fouten, die bij de verschillende instellingen en aflezingen te verwachten zijn, gaf als de te verwachten fout in de draaiingsconstante steeds getallen die grooter zijn dan die van bovenstaande tabel, voor zuurstof bijvoorbeeld 11 in het violet en 6 in het rood. Met het oog hierop kan de aansluiting voor alle genoemde formules voldoende worden geacht. Echter zijn bij de gassen zonder zuurstof de fouten van den vorm (II) met twee termen steeds kleiner dan die van (I), zoodat men, als men hiernaar alleen zijne

[1]) Zittingsversl. 1894/95, p. 236.

[2]) Waarnemingen met gas uit twee verschillende cylinders, van verschillende zuiverheid.

keuze tusschen beide vormen wilde regelen, voor deze gassen aan den vorm (II) de voorkeur zou moeten geven. Het is echter volstrekt niet uitgesloten, dat andere vormen van interpolatieformules eene nog kleinere fout kunnen opleveren. Dit bleek bijv. het geval te zijn met den vorm

$$\omega = a + \frac{b}{\lambda^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(III)}$$

welke de fouten gaf, die in de derde kolom van bovenstaande tabel zijn opgegeven.

3. *Mengingswet.* Voor het aanbrengen van correcties voor onzuiverheden in de onderzochte gassen was het noodig eene wet aan te nemen, volgens welke de magnetische draaiingsconstante van een mengsel berekend kon worden uit die van zijne bestanddeelen. In eene vroegere mededeeling [1]) is hiervoor eene eenvoudige wet aangenomen, echter zonder den theoretischen grondslag nader te overwegen.

We kunnen deze wet afleiden uit de onderstelling, dat de magnetische draaiing eene additieve eigenschap is, en dat dus de draaiingsconstante van een mengsel gelijk is aan de som van een aantal termen, waarvan elke molecule er een bijdraagt. Zij de toestand van het mengsel bepaald door den druk p, de temperatuur t en verder door aan te nemen dat in de eenheid van volume μN grammoleculen van het eene bestanddeel gemengd zijn met $(1-\mu)\,N$ van het tweede. Noemen we $\varrho'_{p,t,\mu}$ het bedrag dat een grammolecule van het eerste bestanddeel tot de draaiingsconstante bijdraagt, en $\varrho''_{p,t,1-\mu}$ hetzelfde voor het tweede bestanddeel, en stellen we de draaiingsconstante van het mengsel voor door $N\varrho_{p,t,\mu}$, dan is

$$N\varrho_{p,t,\mu} = N\mu\,\varrho'_{p,t,\mu} + N(1-\mu)\,\varrho''_{p,t,1-\mu}$$

dus

$$\varrho_{p,t,\mu} = \mu\,\varrho'_{p,t,\mu} + (1-\mu)\,\varrho''_{p,t,1-\mu}\,.$$

De hier ingevoerde grootheden $\varrho_{p,t,\mu}$, waaraan men den naam van moleculair draaiingsvermogen kan geven, zullen afhangen van den toestand, waarin zich de moleculen bevinden, en die bepaald is door p, t en μ. De wijze, waarop ze hiervan afhangen, kan zonder de

[1]) Zittingsverslag 1894/95, p. 236.

hulp van eene moleculaire theorie niet uit de waarnemingen worden gevonden, behalve voor het geval dat $\mu = 0$ is, en we dus met enkelvoudige stoffen te doen hebben.

Bij het toepassen van deze wet zullen we aannemen dat deze grootheden ϱ constanten zijn, en kunnen ze dan uit die voor de enkelvoudige gassen afleiden. Zijn r' en r'' de draaiingsconstanten voor de twee gassen bij den druk p en de temperatuur t, en zijn verder x en y de volumina van beide stoffen, die we met elkaar zouden moeten mengen om de volume-eenheid van het mengsel te krijgen, al deze volumina gemeten bij den druk p en de temperatuur t, dan kunnen we uit bovengenoemde wet afleiden

$$r = x\,r' + y\,r''$$

welke uitdrukking overeenkomt met die, welke vroeger is aangenomen. We kunnen nog opmerken, vooreerst dat de grootheden r, r', r'', x en y allen gelden voor een zelfde druk p en temperatuur t, en dan dat wegens afwijkingen van de wet van DALTON $x + y$ van 1 kan verschillen.

De hier voor gassen afgeleide mengingswet komt, als men het moleculair draaiingsvermogen constant rekent, overeen met die, welke door JAHN [1]), WACHSMUTH [2]) en anderen voor vloeibare mengsels en zoutoplossingen is aangenomen.

4. *Uitkomsten.* Door bovengenoemde mengingswet toe te passen kunnen de draaiingsconstanten der zuivere gassen worden berekend, zooals ook reeds vroeger is aangegeven. In de volgende tabel vindt men de coëfficienten opgegeven van de termen der formules

$$\omega = \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_3}{\lambda^3} = \frac{C_1}{\lambda}\left(1 + \frac{d_1}{\lambda^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

$$\omega = \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_4}{\lambda^4}\left(+\frac{C_6}{\lambda^6}\right) = \frac{C_2}{\lambda^2}\left(1 + \frac{d_2}{\lambda^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

welke de draaiingsconstanten ω voorstellen, uitgedrukt in minuten, en vermenigvuldigd met 10^6.

1) JAHN. Wied. Ann. 43, p. 284.

2) WACHSMUTH. Wied. Ann. 44, p. 380.

	druk	temp.	C_1	C_3	d_1	C_2	C_4	C_6	d_2
Zuurstof	100 Kg.	7°.0	272.2	19.15	0.0704	296.7	− 48.03	4 294	
mengsel m. 87.8°/₀ O	" "	17°.0	240.6	23.30	0.097	249.1	−30.57	2.521	
" " 26.0 " O	" "	17°.6	200.7	40.93	0.204	210.1	− 7.71	0.805	
lucht	" "	13°.0	191.5	46.19	0.241	216.3	−12.57	1.410	
stikstof	" "	14°.0	171.2	52.86	0.309	183.6	2.27		0.0124
waterstof	85.0 "	9°.5	138.8	45.19	0.325	151.5	2.38		0.0157
koolzuur	1 atm.	6°.5	2.682	0.8305	0 310	2.894	0.0337		0.0116
stikstofoxydule	30.5 atm.	10°.9	75.85	22.95	0.303	81.26	0.820		0.0101

De hier opgegeven getallen wijken wegens eene algemeene herziening der berekeningen iets af van die, welke vroeger [1]) zijn medegedeeld.

Verder kan men, zooals vroeger ook reeds geschiedde [2]), de mengingswet toepassen op de mengsels van zuurstof en stikstof en de waargenomen draaiingsconstanten vergelijken met de uit de bestanddeelen berekende. Voor lucht valt deze vergelijking zeer bevredigend uit, voor de beide andere mengsels iets minder goed.

In fig. 12 vindt men krommen, die het verband tusschen magnetische draaiingsconstante en golflengte doen zien, getrokken met behulp van waarden, die uit eenige der bovenstaande interpolatieformules berekend zijn. Er blijkt duidelijk uit, dat de dispersie der magnetische draaiing voor alle gassen, behalve zuurstof, nagenoeg hetzelfde verloop heeft. Let men op den grooten magnetisatie-coëfficient van zuurstof, dan treedt het verband van de draaiingsdispersie met de magnetische eigenschappen der stof, waarop reeds door H. BECQUEREL is gewezen [3]), hier duidelijk in het licht [4]). Opvallend is het verder,

[1]) Zittingsversl. 1896/97, p. 132.

[2]) Zittingsversl. 1895/96, p. 301; 1896/97, p. 132.

[3]) H. BECQUEREL. Ann. de Ch. et de Ph. (5) 12 p. 85. Zie ook Zittingsversl. 1893/94 p. 31.

[4]) De buitengewoon groote dispersie, die BECQUEREL bij negatief draaiende stoffen heeft waargenomen, vestigde mijne aandacht op de negatieve draaiingsconstante, welke QUINCKE (Wied. Ann. 24. p. 615 (1885)) bij barnsteen heeft gevonden. Eene nieuwe meting met een stuk helder, lichtbruin barnsteen van 1.78 cM. dikte gaf ook werkelijk negatieve draaiing. Echter bleek de uittredende lichtstraal, ook zonder inwerking van den electromagneet, sterk elliptisch gepolariseerd te zijn. In verband met de theoretische onderzoekingen over het verband van dubbelbreking en magnetische draaiing (GOUY, WIENER) is nu dit resultaat zeer goed te verklaren zonder het aannemen van eene negatieve draaiingsconstante. Het is niet onwaarschijnlijk, dat de uitkomst van QUINCKE op eene dergelijke wijze kan worden verklaard.

dat de volgorde der onderzochte gassen, gerangschikt naar de grootte van de coëfficienten d_1 en d_2, dezelfde is als die, welke men voor de magnetisatie-coëfficienten vindt, zooals uit onderstaande tabel blijkt:

	d_1	d_2	$Q.10^{10}$ [2]
zuurstof	0.0704	—0.056 [1]	0.662
stikstofoxydule	0.303	+0.0101	—0.158
stikstof	0.309	0.0124	—0.165
koolzuur	0.310	0.0116	—0.172
waterstof	0.325	0.0157	—0.176

Het feit dat d_1 voor alle gassen met kleine magnetisatie-coëfficienten nagenoeg gelijk is, zou weer steun geven aan de formule van MASCART, die tot eene interpolatieformule van den vorm (I) leidt; de hierin voorkomende coëfficient γ hangt op eenvoudige wijze samen met d_1, en hangt volgens het onderzoek van JOUBIN [3]) in hooge mate van den magnetisatie-coëfficient af.

Indien men de draaiingsconstanten in boogmaat uitdrukt in plaats van in minuten, verkrijgt men de volgende coëfficienten:

$$10.^{10}\,\omega' = \frac{C_1'}{\lambda} + \frac{C_3'}{\lambda^3} = \frac{C_1'}{\lambda}\left(1 + \frac{d_1}{\lambda^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

$$10.^{10}\,\omega' = \frac{C_2'}{\lambda^2} + \frac{C_4'}{\lambda^4}\left(+ \frac{C_6'}{\lambda^6}\right) = \frac{C_2'}{\lambda^2}\left(1 + \frac{d_2}{\lambda^2}\right) \quad . \quad . \quad (II)$$

	druk	temp.	C_1'	C_3'	d_1	C_2'	C_4'	C_6'	d_2
Zuurstof	100 Kg.	7°.0	792	55.7	0.0704	863	—139.7	12.49	
mengsel met 87.8% O	" "	17°.0	700	67.8	0.097	725	— 88.9	7.33	
" " 26.0 " O	" "	17°.6	584	119.1	0.204	611	— 22 43	2.342	
lucht	" "	13°.0	557	134.4	0.241	629	— 36.57	4.10	
stikstof	" "	14°.0	498	153.8	0.309	534	6.60		0.0124
waterstof	85.0 Kg.	9°.5	404	131.5	0.325	441	6.92		0.0157
koolzuur	1 atm.	6°.5	7.80	2.416	0.310	8.42	0.0980		0.0116
stikstofoxydule	30.5 atm.	10°.9	220.6	66.8	0.303	236.4	2.385		0.0101

[1]) Volgens eene hier niet medegedeelde interpolatieformule (II) met twee termen.

[2]) QUINCKE'sche constanten met betrekking tot lucht. TÖPLER en HENNIG. Wied. Ann. 34, p. 790 (1880).

[3]) JOUBIN. Thèse Paris 1888, p. 24. Ann. de Ch. et de Ph. (6) 16, p. 78 (1889).

Voor practisch gebruik kan de volgende tabel dienen, die de magnetische draaiingsconstanten aangeeft voor verschillende golflengten, uitgedrukt in minuten, en vermenigvuldigd met 10^6.

λ	Zuurstof	mengsel 87.8% O	mengsel 26.0% O	lucht	stikstof	waterstof	koolzuur	stikstof-oxydule
druk	100 Kg.	100 Kg.	100 Kg.	100 Kg.	100 Kg.	85.0 Kg.	1 atm.	30.5 atm.
temp.	7°.0	17°.0	17°.6	13°.0	14°.0	9°.5	6°.5	10°.9
0.423	908	877	1074	1062	1097	921	17.23	480
431	875	849	1033	1020	1054	884	16.56	461
451	799	779	930	914	944	791	14.83	413
486	721	698	812	797	818	684	12.86	359
517	663	634	720	707	719	600	11.30	315
527	646	616	694	682	691	576	10.86	303
555	604	570	628	618	620	517	9.75	272
589	559	522	561	553	548	456	8.62	241
619	523	487	510	504	495	412	7.78	218
656	484	449	457	452	439	365	6.91	193
$\frac{\rho}{\rho_w}=$	0.531			0.559	0 563	0.570	0.838	0.616

In den laatsten regel van deze tabel vindt men de waarden berekend van het moleculair draaiingsvermogen voor Na-licht in verhouding tot dat van water, naar het voorbeeld van PERKIN [1]). Ofschoon uit diens onderzoekingen en die van anderen wel blijkt, dat de berekening van het moleculair draaiingsvermogen van eene scheikundige verbinding als de som van dat zijner atomen niet geheel door gaat, kan het toch van belang zijn de atoomdraaiingen van PERKIN te vergelijken met die, welke uit onze waarnemingen volgen. Uit bovenstaande waarden van het moleculair draaiingsvermogen volgt bijv. voor die van 1 atoom

$$O = 0.265$$
$$N = 0.281$$
$$H = 0.285$$

PERKIN vindt voor zuurstof 0.194 of 0.261 al naar de bindingswijze, en voor waterstof 0.254, dus getallen van dezelfde orde van

1) PERKIN. J. of Chem. Soc. 45, p. 421 (1884), en volgende deelen.

grootte. Het getal 0.717 van PERKIN, berekend voor stikstof in aminen, komt echter niet met het onze overeen; ook is onze waarde van N_2O niet uit de atoomwaarden van PERKIN op te bouwen. Als we in CO_2 voor 1 atoom koolstof 0.515 nemen naar PERKIN, vinden we $O_2 = 0.323$, wat meer met de waarde 0.39 zou overeenkomen, die HINRICHS [1]) uit organische zuren heeft afgeleid. Alles samengenomen is dus de overeenstemming vrij goed, behalve voor stikstof.

De Heer V. A. JULIUS biedt voor de boekerij aan de dissertatie van den Heer N. G. VAN HUFFEL: „*Over het verloop van den magnetischen toestand met den tijd in een ijzeren staaf*" en bespreekt het door den schrijver verkregen resultaat.

Na resumtie van het behandelde wordt de vergadering gesloten.

---

[1]) HINRICHS. C. R. 113, p. 500 (1891).

ERRATA.

Blz.	241	regel	7	v. o.	staat	$(b_1 - b_2 - 2\,b_{12})$	moet	zijn	$(b_1 + b_1 - 2\,b_{12})$.
„	247	„	15	v. b.	„	— 0.81	„	„	— 0.46.
			16	v. b.	„	— 0.46	„	„	— 0.81.
„	247	„	23	v. b.	„	304°.3	„	„	403°.3.

(4 Januari 1899.)

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 26 Januari 1899.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Bericht van den Heer STOKVIS, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 28

December 1898, berichtende dat met wijziging zijner beschikking van 7 October 1898 aan Dr. A. H. SCHMIDT te Utrecht thans eene rijkstoelage van *f* 1400.—, in plaats van *f* 700.—, verleend is voor zijn bezoek aan het Buitenzorg-Station.

3°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken, d. d. 24 Januari 1899 inhoudende verzoek om bericht en raad op een vraag van den Belgischen Gezant nopens hier te lande geregeld uitgeschreven prijsvragen.

Deze brief zal ook in de Letterkundige Afdeeling worden overgelegd. Door den Voorzitter wordt de Heer ZAAIJER aangewezen om in overleg met een lid door de Letterkundige Afdeeling aan te wijzen de gegevens samen te stellen, die als antwoord op deze vraag van den Belgischen Gezant kunnen dienen. De Heer ZAAIJER neemt deze opdracht aan.

4°. Circulaire van het Ministère du Commerce, de l'Industrie, des Postes et des Télégraphes te Parijs bericht gevende dat van 6 tot 12 Augustus 1900 een Internationaal Congres voor Wiskundigen te Parijs zal worden gehouden.

Aangenomen voor kennisgeving.

5°. Circulaire van de University te Cambridge bericht gevende dat op 2 Juni 1899 het feit herdacht zal worden dat Sir GABRIEL STOKES gedurende 50 jaar het Lucasian Professorship of Mathematics aan die Universiteit bekleed heeft, en de Akademie uitnoodigende zich bij die feesten te doen vertegenwoordigen.

De Voorzitter benoemt een Commissie, bestaande uit de Heeren VAN DER WAALS, LORENTZ en SCHOUTE, om een gelukwensch samen te stellen welke Prof. STOKES op dien gedenkdag zal worden aangeboden. In de volgende vergadering zal gevraagd worden welke leden de Akademie bij die gelegenheid zullen wenschen te vertegenwoordigen.

De Secretaris deelt mede dat voor het Archief der Akademie is aangekocht een verzameling papieren van VAN SWINDEN, betrekking hebbende op de invoering van den Meter. Deze papieren zijn een niet onbelangrijke aanvulling van stukken, die mede op deze invoering betrekking hebben, en reeds sedert lang in het bezit der Akademie zijn. Deze en nog meerdere andere stukken zijn nog niet onderzocht en geinventariseerd. Hij vraagt of de Voorzitter een Commissie benoemen wil, aan welke dat onderzoek zal worden opgedragen.

De Voorzitter benoemt in deze Commissie de Heeren J. A. C. OUDEMANS, BOSSCHA en KORTEWEG. De Heeren OUDEMANS en KORTEWEG nemen deze taak op zich. De Heer BOSSCHA, niet ter vergadering tegenwoordig, zal schriftelijk worden uitgenoodigd.

Aardkunde. — Namens de Geologische Commissie brengt de Heer VAN BEMMELEN het volgende verslag uit.

Evenmin als in het vorige jaar ontving Uwe Commissie van het Rijks en Provinciale Beheer van den Waterstaat, of van bijzondere personen eenig bericht over graafwerken of boringen, die de gelegenheid konden verschaffen, om profielen op te nemen of monsters van de aardlagen te verzamelen en te onderzoeken.

Wij moeten ons verslag dus bepalen tot de vermelding van den arbeid der Heeren H. VAN CAPPELLE, J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK, J. LORIÉ.

Dr. H. VAN CAPPELLE beschreef eenige uitkomsten van zijn onderzoek gedurende de laatste jaren op de Veluwe en in Groningen, waarvan wij in de laatste verslagen hebben gewaagd. Zij betreffen de plekken of eilanden van jonger Skandinavisch diluvium op oude praeglaciale terreinen. Zij zijn van veel belang als eene voorbereiding voor de kaarteering ten behoeve der nieuwe Geologische kaart. Zij zijn gepubliceerd in de Verhandelingen der Akademie als Mededeeling N°. 23.

Voorts heeft de Heer VAN CAPPELLE dezen zomer een geruimen tijd op het veld gearbeid. Hij heeft zijne waarnemingen omtrent de verspreiding der Noordelijke gesteenten in de Veluwe voortgezet, en een aantal nieuwe waarnemingen gedaan omtrent den bouw en de ligging van het helling- of heidezand. De uitkomsten zullen eene bijdrage leveren tot de kennis van de gedaanteverwisselingen, die het diluviale terrein van Midden-Nederland na den teruggang der gletschers heeft ondergaan. Zij zullen naar wij hopen in den loop van 1899 door den Heer VAN CAPPELLE aan de Akademie medegedeeld worden.

Prof. SCHROEDER VAN DER KOLK, die door zijne benoeming tot Hoogleeraar te Delft buiten staat was gedurende dezen afgeloopen zomer op het veld werkzaam te zijn, heeft zich bezig gehouden met de verdere uitwerking zijner methode ter bepaling van de samenstelling en afkomst van zandmonsters; zijne uitkomsten zijn van groot belang voor de geologische kaarteering onzer zandgronden en dus evenzoo als eene voorbereiding van de nieuwe Geologische opneming van ons land te beschouwen. Zijn onderzoek is in de Verhandelingen der Akademie verschenen als Mededeeling N°. 24.

Dr. LORIÉ heeft onze kennis van de diepere lagen op nieuw verrijkt door het onderzoek van de aardmonsters van twintig diepe grondboringen op verschillende plaatsen van ons land, en de uitkomsten van dat onderzoek in verband gebracht met hetgeen vroegere

boringen in naburige terreinen hebben aan 't licht gebracht. Zijne uitkomsten zullen eerstdaags in de Verhandelingen verschijnen als Mededeeling N°. 25.

De Heer G. REINDERS heeft op nieuw monsters ijzeroer uit de vroeger door hem onderzochte oervorming te Ederveen (zie mededeeling N°. 20, 1896) en te Tubbergen verzameld, welke het onderwerp van een voortgezet onderzoek van den derden ondergeteekende uitmaken.

Ten slotte hebben wij de eer aan de Akademie voor te stellen onzen dank te betuigen aan de Heeren VAN CAPPELLE, SCHROEDER VAN DER KOLK, LORIÉ en REINDERS, voor hunne belangelooze medewerking, en om voor het jaar 1900 aan den Heer Minister van Binnenlandsche Zaken de gewone toolage van *f* 500.— aan te vragen.

VAN DIESEN.
K. MARTIN.
J. M. VAN BEMMELEN.

De conclusiën van het verslag om de medewerkers te danken voor hunnen arbeid in het belang der Geologie van Nederland en aan den Minister van Binnenlandsche Zaken weder de toelage van *f* 500.— aan te vragen, ten einde hare werkzaamheden te kunnen voortzetten, worden goedgekeurd.

Aardkunde. — De Heer MARTIN spreekt over: *„Brakwatervormingen van de Mělawi in het binnenland van Borneo"*.

Het is reeds meer dan 40 jaren geleden, dat de mijningenieur R. EVERWIJN geognostische verkenningstochten in de Wester-Afdeeling van Borneo deed, en sedert hebben zich verschillende onderzoekers met de geologie dezer streek bezig gehouden; toch berust onze kennis van den opbouw van West-Borneo tot nu toe enkel op onsamenhangende gegevens en bezitten wij daarvan nog niet eens een ruw geognostisch overzichtsbeeld.

In de laatste jaren was de mijningenieur N. WING EASTON met een nader onderzoek van dit gebied belast, en onder anderen gelukte het reeds, om door middel der versteeningen, die door hem naar Leiden werden opgezonden, de existentie eener juraformatie op Borneo aan te wijzen [1]). Tot zijne laatste bezendingen behooren gesteenten met vele honderden van fossielen uit het stroomgebied van den Kapoeas, waarover ik hier eene voorloopige mededeeling wenschte te doen.

---

[1]) Zie: Sammlg. d. Geol. R. Museums in Leiden. Bd. V. (KRAUSE, MARTIN, VOGEL).

Van de voorwerpen, waarop ik hier in de eerste plaats het oog heb, zijn slechts enkele aan de hoofdrivier, even beneden de monding van den Mĕlawi, verzameld, terwijl de meeste uit de streek van den laatstgenoemden, belangrijken, linker zijtak van den Kapoeas afkomstig zijn, en wel zijn de vindplaatsen of aan den Mèlawi zelf gelegen, of aan zijne nevenrivier S. Kajan, of aan den S. Tèbidah, die zich in den S. Kajan uitstort. In 't geheel werden de fossielen op 10 verschillende plaatsen verzameld, en haast van alle lokaliteiten was een belangrijk materiaal van gesteenten met talrijke versteeningen voor het onderzoek beschikbaar. Toch was dit moeilijk, omdat de voorwerpen doorgaans buitengewoon brokkelig zijn en eene langdurige preparatie vereischten, die alleen met behulp der naald kon bewerkstelligd worden.

De versteeningen bevinden zich in kleigesteenten, die gedeeltelijk kalk bevatten en in mergel overgaan; soms vormen zij ook de kernen van mergel-concretiën. In andere gevallen wordt de klei zanderig en niet zelden levert zij alleen nog het bindmiddel voor de dicht opeengepakte fossielen. Schelpbreciën zijn talrijk vertegenwoordigd.

Onder de vele honderden exemplaren van schelpen en horens, die uit het gesteente verkregen werden, komen niet meer dan 7 determineerbare soorten voor, namelijk: *Arca melaviensis spec. nov.*, *Cyrena subtrigonalis* P. G. Krause, *Cyrena subrotundata* P. G. Krause, *Corbula dajacensis* P. G. Krause, *Melania melaviensis spec. nov.*, *Paludomus gracilis* P. G. Krause *spec.*, en *Paludomus crassa* P. G. Krause *spec.*, maar de meeste dezer soorten varieeren zeer sterk, waardoor de determinatie niet weinig bemoeilijkt wordt. Dezelfde soorten vond reeds P. G. Krause bij het onderzoek van het materiaal, dat G. A. F. Molengraaff op zijnen tocht aan den Boven-Kapoeas verzamelde, en wel aan den S. Pinoh en S. Lekawai, die eveneens zijtakken van den Mèlawi zijn; maar de genoemde species werden door hem gedeeltelijk anders geduid (*Paludomus*) of ook niet nader gedetermineerd (*Arca* en *Melania*), omdat het materiaal voor zijn onderzoek nog in verschillende opzichten onvolledig was.

Wanneer men nu de versteeningen van de verschillende vindplaatsen der coll. Molengraaff en coll. Wing Easton samenstelt, dan blijkt, dat in het stroomgebied van den Mĕlawi eene afzetting voorkomt, die een samenhangend geheel vormt, dus in hoofdzaak van denzelfden ouderdom is, en blijkbaar overeenkomt met de reeds door Everwijn — hoewel op onvoldoende gronden — tot het tertiair gerekende vorming. De fauna dezer formatie toont een aantal van facies-verschillen, vermoedelijk omdat gedurende hare vorming het

zoutgehalte niet overal en altijd hetzelfde was. Terwijl de *Cyrenen* en de *Corbula*, die zamen het grootste gedeelte der fossilen uitmaken, in brakwater leefden, en ook de *Arca* hare woonplaats waarschijnlijk in de onmiddellijke nabijheid der zee had, zijn tal van zoetwaterbewoners (*Melania* en *Paludomus*) met de brakwatervormen vermengd geworden. Dit kon vooral in de regentijden gebeuren.

De ouderdomsbepaling der lagen blijkt met het oog op het geschetste karakter der fauna uiterst moeilijk. Eene direkte bepaling enkel op grond van de soorten is onmogelijk, omdat geen enkele species noch uit Nederlandsch- noch uit Engelsch-Indië beschreven is, die met eene der boven opgenoemde overeenstemt. Ook de door WOODWARD beschreven binnenconchylen van Nias, die tot nu toe door anderen voor tertiair werden gehouden, kunnen voor de vergelijking van geenerlei dienst zijn; want de studie dezer vormen, die ik in Londen kon instellen, heeft mij geleerd, dat de bedoelde conchylen van Nias in het geheel niet tertiair, maar jonger zijn, zooals trouwens ook WOODWARD meende.

Van des te grooter beteekenis wordt de vergelijking met de „intertrappean beds" van Engelsch-Indië, die den overgang tusschen krijt en tertiair vormen. Hunne fauna laat nog relatiën tot de Laramiegroep van Noord-Amerika waarnemen, en dergelijke relatiën bestaan ook tusschen de Laramiegroep en de bovenste krijt van Ajka in Hongarije; de bedoelde fauna was dus geographisch nog niet zoo zeer gedifferentieerd als thans het geval is. Daarentegen laat de fauna der Mèlawi-lagen geenerlei overeenkomst met die der „intertrappean beds", der Laramiegroep etc. erkennen en nadert zij in karakter meer tot den tegenwoordigen tijd; want zij bevat alleen genera, die nog heden in Indië leven en daaronder het geslacht *Paludomus*.

Wanneer men van *Paludomus* de genera *Pyrgulifera Meek* en *Cosinia Stache*, die er zeker niet bijbehooren, afscheidt, dan schiet er nog maar enkel een groep over, die thans onder de meest kenmerkende van het Indische faunengebied moet gerekend worden. Het voorkomen van *Paludomus* toch is tot dit gebied beperkt; het geslacht leeft in Voor- en Achter-Indië, op Sumatra en vooral op Ceylon en Borneo zelf. Men vindt ook op Borneo in den hedendaagschen tijd met de fossielen zeer nauw verwante vormen; vooral lijkt *P. gracilis* bijzonder op *P. Everetti Smith* van Serawak.

Tegenover het verschil van de fauna der „intertrappean beds" staat dus overeenkomst in een zeer karakteristieken trek met de tegenwoordige fauna, en daarom moet de Mèlawi-afzetting jonger wezen dan de genoemde lagen uit Engelsch-Indië, die de grensvorming

tusschen krijt en tertiair voorstellen; zij kan dientengevolge niet ouder dan tertiair zijn. Vermoedelijk is zij echter wel oud-tertiair, want geen der bovengenoemde 7 soorten is in de hedendaagsche fauna bekend, zoodat dus wel alle als uitgestorven te beschouwen zijn; twee species (*Melania melaviensis* en *Cyrena subtrigonalis*) dragen ook een karakter, dat in vergelijking met de thans nog levende vormen eenigszins vreemd is. Intusschen kan een nadere ouderdomsbepaling als „tertiair" tot nu toe niet met zekerheid geschieden, en om die reden wil ik de afzetting ter voorkoming van allen misverstand slechts algemeen „Mĕlawigroep" noemen, naar de streek, waarin zij het eerst werd aangetroffen.

De Mĕlawigroep laat zich op grond van het onderzochte materiaal van af den S. Tĕmpoenak, beneden Sintang, naar het Oosten langs den Mĕlawi tot aan den S. Lekawai en buitendien aan den S. Kajan tot aan een punt boven Maboek aanwijzen [1]). Deze tertiaire (eoceene?) brakwaterafzetting kan zich alleen onder medewerking van stroomen of beken hebben gevormd, en misschien behoorden de laatstgenoemde tot hetzelfde riviernet, wat thans de Mĕlawi en zijn zijtakken voorstelt, zoodat dus deze waterloopen hare beddingen in sedimenten hebben ingesneden, die door hun eigen medewerking vroeger zijn ontstaan.

Scheikunde. — De Heer VAN BEMMELEN doet eene mededeeling over „*Hydrogel van IJzeroxyde*".

De Heer W. SPRING deelde onlangs in het Recueil des Travaux Chimiques des Pays-bas mede [2]), dat hij een hydraat van ijzeroxyde bereid had: d'une composition définie. Hij had dit verkregen door het gelatineuse neerslag, hetwelk Ammonia in eene verdunde Ferri-oplossing voortbrengt, na uitwassching, aan de lucht te laten droog

[1]) De verdere uitbreiding der Mĕlawigroep laat zich voorshands nog niet bepalen. Ik wil alleen opmerken, dat ik van de *Silat-rivier*, die zich bij Silat, boven Sintang, in de Kapoeas uitstort, door WING EASTON eveneens eene bezending gesteenten ontving, wier fauna echter van die der Mĕlawigroep verschilt.

Zij is vooral rijk aan schalen van *Vivipara*, waaronder minstens 2 verschillende soorten voorkomen, en bevat buitendien wederom *Corbula* (*s. str.*) *spec.* Deze laatste schijnt van *C. dajacensis* te verschillen, terwijl men onder de soorten van *Vivipara* een hoogst karakteristieken vorm vindt, die ik *V. Eastoni* wil noemen, en waarvan hiernaast 2 exemplaren zijn afgebeeld. Zij munt uit door het bezit van smalle en hooge spiralen, waarvan één in den hoek van de omgangen bijzonder hoog uitsteekt.




Het is mogelijk, dat deze afzettingen van de Silat-rivier ouder zijn dan de Mĕlawigroep; maar zeker zijn ze niet ouder dan cretaceïsch.

[2]) 18.222 (1898).

worden. Na 72 dagen werd het gewicht standvastig, en 5 maanden later onveranderd bevonden. Het beantwoordde aan de samenstelling $Fe_2O_3 . 4 H_2O$. Boven zwavelzuur verloor het water, zoodat na 3 dagen de samenstelling was $Fe_2O_3 . 1.78 H_2O$ (door mij berekend).

Ik heb vroeger, in 1888 [1]) en 1892, medegedeeld, dat het gelatineuse ijzeroxyde geene standvastige samenstelling bezat, maar eene *absorptie-verbinding* was *van* Fe_2O_3 *met water*. Het cijfer ± 4,0 H_2O had ik ook bij een der door mij onderzochte praeparaten gevonden, maar daarin een gehalte gezien, dat slechts toevallig aan een geheel getal beantwoordde. De meening, dat een bepaald hydraat verkregen zoude zijn, is in strijd met de natuur der hydrogels. De samenstelling toch is kontinu afhankelijk van 1°. den bouw van het kolloïd, die weder van de omstandigheden bij de gelvorming afhangt; 2°. de modificatiën welke die bouw heeft ondergaan door de verdere behandeling; 3°. de koncentratie der gasphase, waarmede de gel zich in evenwicht stelt; 4°. de temperatuur.

Aangezien ik slechts bij eenige weinige dampspanningen de samenstelling had bepaald, gaf SPRING's mededeeling mij aanleiding de geheele Isotherme bij 15° van Ont-Her-en Heront-watering te bepalen, en zorgvuldig na te gaan, hoe de Hydrogel zich aan de lucht, welker D. Sp. steeds wisselt, eigenlijk gedraagt.

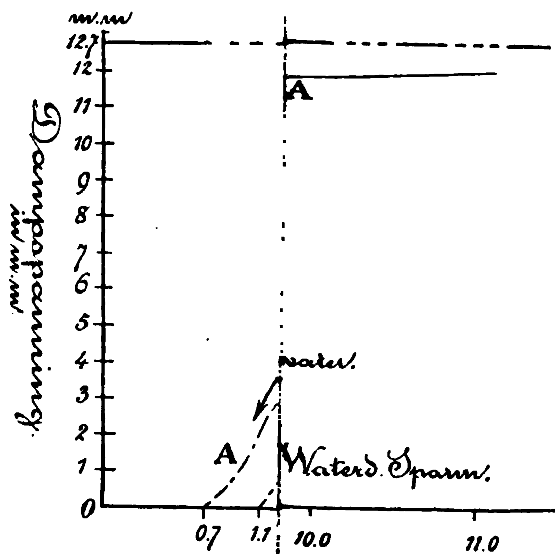
Ik bereidde daarvoor opnieuw een Hydrogel uit eene zeer verdunde Ferrioplossing [2]), en nam dezen dadelijk, dus nog geheel versch, in bewerking. Ik bepaalde bovendien dezelfde kromme lijnen voor het reeds in 1882 door mij onderzochte praeparaat, hetwelk thans 16 jaren ouder geworden was (III); en ten derde voor een in 1891 bereid praeparaat dat zeven jaren onder water had gestaan (II). Die bepalingen werden op dezelfde wijze verricht als vroeger voor den hydrogel van SiO_2 en van CuO [3]). Ook op de graphische voorstelling (zie de Fig.) zijn dezelfde letters en teekens gebruikt, namelijk A ↓ voor de kromme lijn der ontwatering, Z ↑ voor die der herwatering en Z ↓ voor die der herontwatering. Het evenwicht bij eene bepaalde D. Sp. werd op A ↓ slechts langzaam benaderd, des te langzamer naarmate deze minder van de verzadigde D. Sp. (12.7 m.m) verschilt. Bij 12^2 m.m was nog na 5 maanden een verlies in 1 maand tijds merkbaar; bij 9 m.m. werd na 3 maanden het verlies in 1 maand onmerkbaar, en bij 0° m.m. na eene week. Daarentegen

---

1) Recueil VII 106—114. J. f. prakt. Ch. **46**—529.

2) 1 Deel Fe_2O_3 op 66 d. water = 1 Mol. Fe_2O_3 op 585 d. water.

3) Zie Zittingsverslagen van 28 Januari 1893 en 29 Juni 1895. Thans zijn de evenwichten bepaald bij dampspanningen van $12^2—11^6—10^6—10—9^1—8^1—7^2—6^2—5—4^3—2—0^8$ m.m. zoowel voor A als voor Z ↓ en Z ↑.


m.m
12.7
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Dampspanning.
in m.m
A
water
A
Waterd. Spann.
0.7
1.1
10.0
11.0

werd bij Z ↑ en Z ↓ het evenwicht binnen 1—2 dagen verkregen, behalve op een gedeelte van Z ↓ (van punt O tot O_1) waarbij zich weder het verschijnsel der Hysteresis voordeed.

Uit de Figuur blijkt, dat de kromme lijnen met die van den Cu O- en den $Si O_2$-hydrogel overeenkomen.

Het watergehalte bij 15^0 is grooter dan van deze beiden (ik geef hier slechts dat bij 12^2 en bij 0 m.m. D. Sp.).

	12^2 m.m.	0° m.m.
$Fe_2 O_3$	± 9.5	1.5^1
Cu O	± 7	1.1
$Si O_2$	± 6	0.2^5

maar is evenzoo kontinu afhankelijk van de D. Sp.

Het punt O, dat bij het kiezelzuur eene afbreking der kontinuiteit vertoont, als gevolg eener omzetting in den gel (de omslag) en daarmede gepaard gaande verzwakking van het absorbtievermogen, en tevens het begin van de omkeerbaarheid van het ontwateringsproces, dit punt komt bij het $Fe_2 O_3$ niet zoo scherp voor den dag. Het verraadt zich echter op de volgende wijze. Als de gel, in eenig punt van de lijn A ↓ aangekomen zijnde, van daaruit weder herwaterd wordt (door blootstelling aan hoogere D. Sp. tot aan 12^7 m.m.) dan absorbeert hij slechts ± 0,2 H_2O; men zie daarvoor op fig. 1 de lijnen A ↑, die van de punten a, b, c, d uitgaan. Dit geldt echter alleen, als het gehalte van ± 3,5 nog niet bereikt is; daar beneden absorbeert de gel bij herwatering zooveel water, dat het gehalte bij verzadigde D. Sp. ± $3{,}6^5$ bedraagt. Hier vangt dus ongeveer de omkeerbaarheid van het verdere ontwateringsproces aan, en ligt een punt hetwelk in dit opzicht met het omslagpunt O bij het kiezelzuur overeenkomt. Aan het einde der ontwatering in het punt O_0 (D. Sp. = 0^0 m.m.) is eene uittreding van luchtbellen bij indompeling in water slechts in geringe mate waargenomen [1]. Men moet dus daaruit afleiden dat slechts weinige holle ruimten bij de ontwatering op den tak $O O_0$ ontstaan. Daarentegen is dit verschijnsel veel beter waargenomen bij den gel II (zie beneden). De eindkromme van herwatering Z ↑ heeft weder de punten O_1 en O_2 die bij de herontwatering aan den dag komen evenals bij het kiezelzuur. Want de herontwateringskromme Z ↓ valt niet samen noch met

[1]) In het kiezelzuur ontstaan vele holle ruimten, die een aanzienlijk volumen lucht in zich verdichten. Zie Verslag der Vergadering van 6 April 1898, 498—506.

Z ↑ noch met A. Wel is het verschil gering voor de takken $O_3 O_2$ en $O_1 O_0$, maar evenals bij het kiezelzuur, is de tak $O_2 O$ zeer afwijkend van $O_1 O_2$. Hetzelfde hysteresis-verschijnsel vertoont zich. De lijn Z ↑, inzonderheid de tak $O_1 O_2$ is slechts in de richting ↑ (herwatering), de tak $O O_1$ is slechts in de richting (ontwatering) te doorloopen. Er ontstaat eene versterking van absorbtievermogen op Z ↑, die nawerkt op Z ↓. Bij de herontwatering Z ↓ komt een punt O voor den dag, dat dezelfde verschijnselen vertoont als bij het kiezelzuur. Van dit punt O af stelt het evenwicht zich zeer langzaam in op den tak $O O_1$; eene verzwakking van absorbtievermogen heeft plaats, die nawerkt, zoodat bij herwatering niet de tak $O O_1$ teruggeloopen wordt naar den tak $O_1 O_2$. Het gevolg daarvan is dat hier evenals bij het kiezelzuur binnen de figuur $O O_1 O_2 O$ tusschenkrommen kunnen verwerkelijkt worden, indien men herwatert of ontwatert van een punt van de lijn OO_1 of de lijn $O_1 O_2$ uit. Twee dier tusschenkrommen, ééne van ontwatering ↓ en ééne van herwatering ↑, zijn in de figuur door gestippelde lijntjes aangegeven.

Modificatiën. Ook de modificatie die de tijd voortbrengt, waardoor het absorbtievermogen verzwakt, is dezelfde als bij het kiezelzuur. De figuur doet zulks zien voor een Gel die 16 jaren ouder is geworden (kromme lijn A ↓ van III). De gehalten zijn weder lager dan zij vroeger gevonden waren, toen dezelfde stof zeven jaren ouder was dan bij de eerste bepaling. Het verblijf van den gel gedurende zeven jaren onder water heeft evenzeer het absorbtievermogen verzwakt (kromme lijn A ↓ van II). Om der duidelijkheid wille zijn de krommen Z ↑ en Z ↓ van beiden weggelaten. Zij verschillen zeer weinig van de A ↓ lijn, en verwijderen zich daarvan eerst bij hoogere dampspanningen (ongeveer bij 10—11 m.m.) zooals uit de volgende tabel blijkt:

	III (16 jaar oud).		II 7 jaar onder water.	
	Z ↑	Z ↓	Z ↑	Z ↓
m.m.	Mol H_2O		Mol H_2O	
9	1.5^{6}	1.5^{6}	1.5	1.5
10	1.6^{3}	1.6^{5}	1.6^{6}	1.7^{3}
10^{7}	1.7^{4}	1.7^{7}	1.8^{5}	1.9^{5}
11^{6}	2.2^{3}	2.4^{7}	3.0^{2}	4.5
12^{3}	3.3^{5}	3.5^{3}	6.7	7.9^{6}
12^{7} verzadigd.	± 8.5 [1])		8.6 [2])	
	[1]) Verkregen in het verloop van eenige maanden.		[2]) Na 8 dagen.	

Hetzelfde verschijnsel doet zich hier voor als bij het kiezelzuur. Hoe meer gemodificeerd, hoe meer water het kan opnemen bij hoogere D. Sp. De hysteresis is daarheen verplaatst. De Gels II en III kunnen bij herwatering tot ruim 8 Mol H_2O opnemen, terwijl I het slechts tot ± 3.6^5 brengt.

Hoogst merkwaardig is het, dat III daarvoor maanden, II slechts dagen behoeft. Ook dit wijst op een verschil in bouw. Nu is het zeer merkwaardig dat de Gel III in het punt O_0 geene uittreding van luchtbellen vertoont, als hij in water wordt gedompeld, en Gel II wel. Bij Gel II vertoonen zich dadelijk aan de oppervlakte en aan de randen der doorschijnende (dus zeer dunne) vliesjes op tal van plaatsen kleinere en grootere luchtbelletjes. De gel bevat dus holle ruimten, maar hun gezamenlijk volumen is op verre na zoo groot niet als bij het kiezelzuur. In verband daarmede schijnt het te staan, dat II vrij spoedig veel waterdamp opslurpt bij eene D. Sp. van 12 m.m, en III die geene holle ruimten bevat dit zoo uiterst langzaam doet.

Uit het bovenstaande volgt dat geen chemisch hydraat door droging aan de lucht kan verkregen worden, en dat bovendien de samenstelling daarbij moet wisselen met de wisseling in den vochtigheidstoestand der lucht. Dit werd gestaafd door het dagelijksch wegen van eene aan de lucht geplaatste hoeveelheid van I (versch bereid en tusschen twee poreuze platen uitgeperst) gedurende een half jaar. Het bevatte in den aanvang ± 18 Mol H_2O en hield dus nog veel water ingesloten. Met afnemende snelheid was het gehalte na 9 dagen gedaald tot 5,4 H_2O; van toen af kwam het merkbaar onder den invloed van de wisselingen der luchtvochtigheid, zoodat het onregelmatig in gewicht afnam en soms toenam. Na $1^1/_3$ maand was het gehalte gedaald tot 4,64 H_2O, en wisselde af gedurende nog 3 maanden, naarmate van den vochtigheidstoestand der lucht, tusschen 4,64 en 4,55 H_2O. Onveranderd gewicht, of rijzing, of daling, werden in overeenstemming met den stand des hygrometers (van KLINKERFUES) bevonden. Een kleine achteruitgang was ten slotte bemerkbaar. Ware de vochtigheidstoestand, die zich in dien tijd tusschen 10 en 8 m.m had bewogen, gedaald tot 7 m.m. en daarop een tijdlang gebleven, dan zou voor het praeparaat I de samenstelling ± 4 H_2O bereikt zijn, want dit bedrag is bij *die* dampspanning als evenwichtscijfer verkregen. Die samenstelling zou slechts weinig gerezen zijn, als de vochtigheidstoestand weder hooger ware geworden.

Dat de samenstelling afhankelijk is van de temperatuur, dat het absorbtievermogen verzwakt wordt door verwarming op hoogere

temperaturen, en ten slotte bij gloeihitte wordt opgeheven, dat alles heb ik vroeger medegedeeld. [1])

De overgang van het kolloïdale ijzeroxyd in een kristalloïdaal chemisch hydraat is aan Dr. KLOBBIE en mij slechts gelukt voor het monohydraat [2]), door inwerking van water bij 15° op de hexagonale kristallen van het Natriumferriet (Fe_2O_3. Na_2O) waarbij Na_2O door H_2O allengs vervangen wordt, zonder dat de kristallijne toestand (vorm, doorschijnendheid, polarisatievermogen) gewijzigd wordt. De natuur levert ons het kristallijne Monohydraat: het Göthit, dat eene verhitting tot ± 280° verdragen kan zonder water te verliezen en tot den amorphen toestand over te gaan. [3]).

Scheikunde. — De Heer VAN BEMMELEN biedt namens den Heer B. DE BRUIJN een opstel aan, over een onderzoek verricht in het Anorganisch Chemisch Laboratorium der Universiteit te Leiden, betreffende: „*Het evenwicht van stelsels van drie stoffen, waarbij twee vloeistoffen optreden*".

Bij stelsels van drie komponenten, waarin twee vloeibare phasen optreden, kan men de volgende gevallen onderscheiden:

1⁰ de komponenten A en B vormen te zamen twee vloeibare hasen, evenzoo de komponenten A en C en B en C.

2⁰ de komponenten A en B en A en C vormen twee vloeibare phasen, maar de komponenten B en C, ten minste wat stabiele toestanden betreft, niet.

3⁰ alleen de komponenten A en B vormen twee vloeibare phasen; A en C of B en C doen dit voor zoo verre het stabiele toestanden geldt, niet.

4⁰ de komponenten geven twee aan twee, ten minste in stabielen toestand, nooit twee vloeibare phasen.

Van de eerste drie gevallen zijn voorbeelden onderzocht door SCHREINEMAKERS; [4]) het doel van dit onderzoek was ook van het laatste geval een voorbeeld na te gaan. Eerst toen het onderzoek zoo goed als geëindigd was, verscheen eene verhandeling van SNELL over chloorkalium, aceton en water, waardoor een voorbeeld van het vierde geval is gegeven [5]).

---

[1]) Recueil **7**. 111—113. Zeitschr. anorg Ch. **18**. 24.

[2]) J. f. pr. Ch. **46**. 523—529.

[3]) J. f. pr. Ch. **46**. 521.

[4]) Zeitschr. f. phys. Chem. **25** 543 **26** 237 **27** 95 (1898) **22** 417 (1897).

[5]) Journ. of phys. Chem. **2** 457 (1898).

De heer DE BRUIJN onderzocht de evenwichten in de volgende stelsels:

Ammoniumsulfaat, aethylalkohol en water.

Kaliumcarbonaat, methylalkohol en water.

Kaliumcarbonaat, aethylalkohol en water.

Natriumsulfaat, aethylalkohol en water.

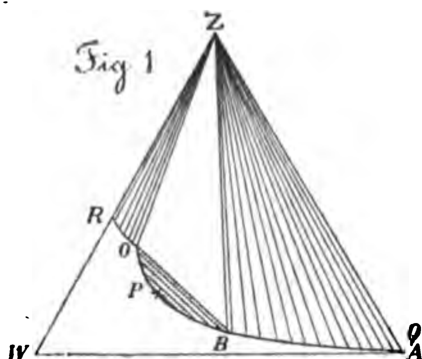
Met behulp van den theoretischen leiddraad door SCHREINEMAKERS gegeven in zijne verhandelingen over evenwichten in stelsels van drie komponenten, waarbij twee vloeibare phasen optreden [1]), gelukte het een beeld te ontwerpen van de evenwichten in de onderzochte stelsels. De samenstelling der phasen is op bekende wijze in een driehoek voorgesteld; neemt men loodrecht op het vlak van den driehoek de temperatuur-as, dan verkrijgt men eene voorstelling in de ruimte.

I. *Het stelsel: ammoniumsulfaat, aethylalkohol en water.*

Boven ± 8° is de algemeene vorm der isothermen als in fig 1 aangegeven. De isotherme bestaat n.l. uit drie deelen: RO, Op B en BQ, die in O en B onder een hoek aan elkander sluiten. RO en BQ geven alle mogelijke oplossingen aan, die met het vaste $(NH_4)_2$ SO_4 in evenwicht kunnen zijn. Op B is de connodale lijn met het plooipunt p, zij geeft dus de oplossingen aan, die twee aan twee met elkander in evenwicht kunnen zijn; de punten O en B zijn de twee vloeistofphasen, die niet alleen met elkander, maar ook met vast $(NH_4)_2$ SO_4 in evenwicht zijn. Bij temperatuursverandering verschuiven de verschillende deelen van de isotherme; bij hoogere temperatuur verwijderen de lijnen ZO en ZB zich van elkander; bij temperatuursverlaging naderen zij elkander, en vallen bij ± 8° samen. Daar bij deze temperatuur de punten O, B en p samenvallen, bestaat de isotherme bij deze en lagere temperaturen nog slechts uit één stuk, omdat RO en BQ in elkanders verlengde vallen; men heeft dus nog slechts alleen de evenwichten van vast zout met oplossing. Bij 6°,5 heeft de heer DE BRUIJN zulk eene isotherme bepaald. Twee vloeistofphasen zijn in stabiel evenwicht niet meer mogelijk; de heer DE BRUIJN heeft ze wel verschillende keeren waargenomen, maar zij verdwenen onder afscheiding van de vaste phase.

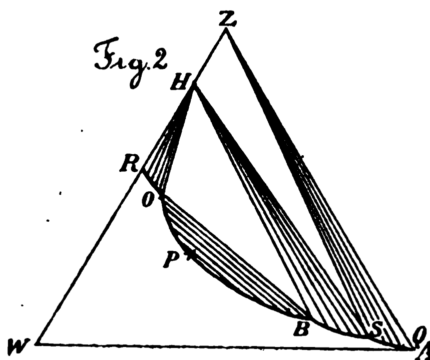
---

[1]) Zeitschr. f. phys. Chem. **22** 93,515 (1897) **25** 305 (1898).



Ook bij hoogere temperaturen, waar de isothermen vormen hebben als in fig 1, heeft de heer DE BRUIJN verschillende isothermen bepaald. Wat de connodale lijnen voor de verschillende temperaturen betreft, bleek, dat deze elkander op vele wijzen doorsnijden of elkander binnen de analysefouten bedekken. Om dit verder te onderzoeken werden verschillende doorsneden bepaald, waarin de verhouding van water en alkohol dezelfde was, maar de hoeveelheid $(NH^4)_2$ SO_4 veranderde. In overeenstemming met de ligging der connodale lijnen ten opzichte van elkander vond de heer DE BRUIJN het volgende. Zet men als ordinaat het $(NH_4)_2$ SO_4 gehalte uit en als abscis de temperatuur, waarbij twee vloeistofphasen homogeen worden of eene homogene vloeistofphase zich in twee andere splitst, dan verkrijgt men bij een hooger alkoholgehalte met de temperatuur stijgende lijnen; bij lager alkoholgehalte lijnen, die met de temperatuur dalen; tusschen beiden in lijnen, die een maximum vertoonen, welk maximum bij hooger alkoholgehalte naar hoogere temperatuur verschuift. Uit deze verschillende doorsneden volgt in overeenstemming met de bepaalde isothermen, dat men oplossingen van $(NH_4)_2$ SO_4 in water en alkohol kan hebben, die bij eene bepaalde temperatuur homogeen zijn, maar zich in twee lagen splitsen, zoowel bij temperatuursverhooging als verlaging. De heer DE BRUIJN heeft verschillende dezer oplossingen gemaakt.

II. *Het stelsel: Kaliumcarbonaat, methylalkohol en water.*



Naast de beide vloeistofphasen treedt in dit stelsel als vaste phase het hydraat $(K_2CO_3)^2\,(H_2O)^3$ op (bij lagere temperaturen misschien nog een hooger hydraat). De isotherme heeft hier den vorm van fig. 2. RO en BS geven de oplossingen aan, die met $(K_2CO_3)^2$ $(H_2O)^3$ in evenwicht kunnen zijn; SQ de oplossingen in evenwicht

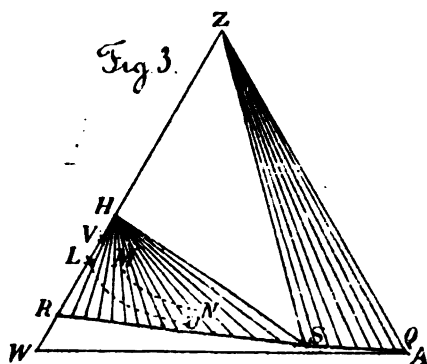
met K_2CO_3. OpB is de connodale lijn met het plooipunt p; met iedere vloeistofphase van deel Op kan eene van pB in evenwicht zijn. De heer DE BRUIJN heeft bij verschillende temperaturen de ligging der connodale lijn Op B bepaald. Evenals in het vorige stelsel naderen bij temperatuursverlaging de punten O en B elkander; in het vorige stelsel vielen zij bij ± 8° samen, in dit stelsel echter eerst bij ± —33°.

III. *Het stelsel: Kaliumcarbonaat, aethylalkokol en water.*

De isotherme heeft hier denzelfden vorm als in het vorige stelsel. De samenstelling der twee vloeistofphasen in evenwicht met het hydraat werd bepaald bij temperaturen van — 18° tot 75°. Het zoutgehalte neemt met de temperatuur toe, het alkoholgehalte verandert minder dan de analysefouten bedragen. Dat er echter bij temperatuursverandering in de beide vloeistofphasen wel degelijk verandering van samenstelling plaats heeft, volgt uit de waarneming, dat dergelijke homogene oplossingen bij temperatuursverandering zich in twee vloeistofphasen splitsen. Verscheiden paren gekonjugeerde punten werden bepaald op de connodale lijn bij 17° en bij 35°. De connodale lijnen voor verschillende temperaturen snijden elkander ook hier. Doorsneden zooals bij het ammoniumsulfaat zijn hier niet bepaald; uit eene enkele waarneming van SNELL volgt, dat deze doorsneden hier geen maximum, maar een minumum zullen vertoonen.

Een groot verschil in het gedrag van den methyl- en aethylalkohol blijkt uit het volgende. Bij 17° bevat de bovenlaag in evenwicht met de vaste phase 91,5 pCt. aethylalkohol en 0,06 pCt. K_2CO_3; de benedenlaag 0,2 pCt. aethylalkohol en 52,2 pCt. K_2CO_3. De aethylalkohol en het kaliumcarbonaat vormen dus ieder met een deel van het water eene vloeistof, waarin de andere komponent bijna niet voorkomt. In het stelsel K_2CO_3, CH_3OH en H_2O bevat de bovenlaag echter bij diezelfde temperatuur 69,6 pCt. methylalkohol en 6,25 pCt. K_2CO_3. de benedenlaag 5,7 pCt. methylalkohol en 48,4 pCt. K_2CO_3. Een ander groot verschil in het gedrag van methyl- en van aethylalkohol in deze stelsels is het volgende. In het stelsel met aethylalkohol heeft de temperatuur op de ligging der punten O en B bijna geen invloed; de verhouding van water en alkohol blijft in de beide vloeistofphasen, die met het vaste hydraat van K_2CO_3 in evenwicht zijn, van — 18° tot + 75° bijna onveranderd. In het stelsel met methylalkohol heeft de temperatuur echter grooten invloed op de verhouding van water en methylalkohol, welke laatste meer mengbaar zijn in tegenwoordigheid van het vaste zout dan water en aethylalkohol.

IV. *Het stelsel: Natriumsulfaat, aethylalkohol en water.*



In dit stelsel onderzocht de heer DE BRUIJN, behalve de stabiele evenwichten ook eenige minder stabiele. Fig. 3 geeft den algemeenen vorm der isothermen beneden 32°5 aan; de getrokken krommen RS en SQ geven stabiele, de gestippelde kromme LU en MN minder stabiele evenwichten aan. RS geeft de oplossingen aan, die met vast $Na_2SO_4.10H_2O$ in evenwicht kunnen zijn; SQ de oplossingen in evenwicht met Na_2SO_4; S is de oplossing, die met $Na_2SO_4 . 10 H_2O$ en Na_2SO_4 in evenwicht is. Bij temperatuursverhooging beweegt het punt S zich naar links en naar boven en valt bij 32°5 met R in V samen, welk punt de samenstelling der waterige oplossing aangeeft, die met vast $Na_2SO_4 . 10H_2O$ en Na_2SO_4 in evenwicht kan zijn. Bij temperatuursverhooging verkleint de lijn RS zich dus, terwijl SQ langer wordt; bij 32°5 verdwijnt RS en is nog alleen SQ over, terwijl S op de lijn WZ komt te liggen. De heer DE BRUIJN heeft deze isothermen proefondervindelijk voor verschillende temperaturen bepaald.

Behalve de hierboven besproken stabiele evenwichten n.l. $Na_2SO_4 . 10H_2O$ + oplossing en Na_2SO_4 + oplossing, bepaalde de heer DE BRUIJN ook nog het minder stabiele stelsel $Na_2 SO_4 . 7 H_2O$ + oplossing. De oplossingen in evenwicht met het hydraat $Na_2SO_4 .7 H_2O$ worden voorgesteld door de lijn LU. (fig. 3). Daar deze geheel boven de kromme RS gelegen is, gaan deze oplossingen, als de minder stabiele toestand opgeheven wordt, in eene oplossing van RS over.

Konden in de hierboven besproken evenwichten stelsels van twee vloeistofphasen in stabielen toestand optreden, hier is dit niet meer mogelijk. Wel zijn deze stelsels gemakkelijk te verkrijgen als men slechts zorgt, dat noch Na_2SO_4, noch $Na_2SO_4 . 7H_2O$, noch $Na_2SO_4 . 10H_2O$ met de beide vloeistofphasen in aanraking kunnen komen. Het is den heer DE BRUIJN dan ook gelukt de connodale lijnen voor verschillende temperaturen te bepalen, waarbij echter gezorgd moest worden, dat de vloeistofphasen niet met de lucht in aanraking kwamen. Was dit het geval, of werd er slechts een stofje $Na_2SO_4 . 10H_2O$ in gebracht, dan volgde dadelijk kristallisatie van $Na_2SO_4 . 10 H_2O$ en gingen de twee lagen in slechts ééne over. Dat dit ook het geval moet zijn, volgt uit fig. 3, want de connodale lijnen, welke de heer DE BRUIJN bepaalde, liggen niet alleen boven RS, maar zelfs boven LU en zijn in de figuur door MN aangegeven.

Wiskunde. — De Heer CARDINAAL spreekt over: „*de afbeelding der door een punt gaande of in een vlak liggende schroeven van* BALL *volgens de methode van* CAPORALI."

1. De hier volgende mededeeling moet beschouwd worden als eene voortzetting en uitbreiding der voordracht, gehouden op het 70ste Congres der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte te Dusseldorf (Sept. 1898) en opgenomen in het laatste Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Daarin is de in het volgende toegepaste methode in haar verband tot de „Theory of Screws" van Sir R. St. BALL beschouwd; ik meen dus nu te kunnen volstaan met het voorop plaatsen van eenige korte aanwijzingen, voor het begrip van het doel der mededeeling onmisbaar.

2*a*. De hier onderstelde beweging van een lichaam is de beweging met vrijheid van den vierden graad; de schroeven, waarom beweging mogelijk is, vormen een kwadratisch stralencomplex, bestaande uit alle schroeven, reciprook met een gegeven cylindroïde C^3.

b. Men construeert de schroeven, door een punt P gaande en tot het complex behoorende, door uit P loodlijnen op de beschrijvende rechten van C^3 neer te laten; elk dezer loodlijnen snijdt bovendien nog twee beschrijvende rechten van C^3, op gelijken afstand van het middelvlak gelegen (toegevoegde beschrijvende rechten). De meetkundige plaats dezer schroeven is dan de complexkegel P^2.

c. Op overeenkomstige wijze construeert men de schroeven in een vlak π gelegen. Zij omhullen eene parabool π^2.

3. De afbeelding der stralen van een kwadratisch complex is o. a. door R. STURM en CAPORALI behandeld. Men vindt ze in den breede weergegeven in STURM's Liniengeometrie, III, p. 272—282. Het bijzondere complex, gevormd door de boven omschreven schroeven, behoort tot het type, behandeld op p. 438—444. Ofschoon, zooals te verwachten was, de resultaten, in het volgende neergelegd, overeenstemmen met de aldaar verkregene, zoo is er toch een groot verschil in de behandeling; dit verschil laat zich aldus omschrijven:

1°. De bewijzen worden hier oogenblikkelijk uit de theorie van BALL afgeleid, terwijl zij bij STURM als bijzondere gevallen uit de algemeene theorie van het stralencomplex volgen.

2°. De constructiën, meer bepaald eene hoofdconstructie, worden werkelijk uitgevoerd.

4. Fig. 1 stelt de axonometrische projectie eener cylindroïde voor, van welke de constructie bekend wordt ondersteld. De dubbelrechte d valt langs de as OZ; men onderstelt verder, dat de draaiing der

beschrijvende rechten begonnen is in het vlak $Z\,O\,Y$; op de rechte O—0 is de grootste parameter g uitgemeten, op de volgende rechten I—1, II—2, enz. worden nu de opvolgende parameters steeds van de dubbelrechte uitgemeten; terwijl de meting wordt gestaakt in den stand, waarin de draaiing 180° bedraagt en dus de geheele hoogte van de cylindroïde aan beide zijden van het middelpunt O doorloopen is. Ter opheldering dient in de eerste plaats de cirkel, die gediend heeft om de parameterlengte van elke beschrijvende rechte te vinden, geteekend op de helft der schaal van de hoofdfiguren waarin de lengte van een willekeurige beschrijvende rechte (b.v. II—2) met den daarbij behoorenden uitwijkingshoek is aangeduid. In de tweede plaats ziet men axonometrisch geconstrueerd de op $X\,O\,Y$ geprojecteerde parameterkromme met de projectiën O—0, O—1, enz. der beschrijvende rechten. Verder is uit het punt A op $a \equiv 1$—7 de loodlijn $A\,B$ op II—4 geconstrueerd. Volgens 2*b* is dit eene schroef; zij snijdt dus de aan 1—7 toegevoegde rechte $a' \equiv I$—5.

Opmerkingen. *a.* De projectie der bovengenoemde parameterkromme is eene kromme, geheel aan den eenen kant van de as $O\,Y$ gelegen. Blijkbaar is dit de helft der figuur, die men zou verkrijgen bij het in constructie brengen der kromme, die tot vergelijking heeft: $\varrho = a + 2\, r \cos^2 \theta$. Dat door de gevolgde constructie slechts de helft der kromme verkregen wordt, is een gevolg van de aanname, bij de meting gemaakt.

b. In de geconstrueerde figuur hebben alle parameterwaarden hetzelfde teeken; ware dit niet het geval, dan zoude de figuur der projectie gewijzigd worden, de half geteekende kromme zou voor het oog een dubbelpunt vertoonen alzoo de volledige projectie een viervoudig punt. Dit laatste is nu geïsoleerd geworden.

5. Fig. 2 stelt de parallelprojectie van de hoofdkromme der afbeelding van Caporali voor en moet in verband met fig. 1 beschouwd worden. Op de beschrijvende rechte a van C^3 is een punt A, aangenomen. Door A is de schroef $A\,A'\,B$ getrokken, die een der stralen is van den bundel uit het middelpunt A in het vlak $A\,a' \equiv \alpha$. A, als nulpunt van α, bepaalt met a een lineair stelsel van de 3de orde van lineaire stralencomplexen.

Nu wordt bij deze figuren ondersteld, dat C^3 zich in de ruimte Σ, de hoofdkromme zich in de verwante ruimte Σ_1 bevindt. Met elk lineair complex in Σ komt een vlak in Σ_1 overeen, met elke schroef een punt. De hoofdkromme is de meetkundige plaats der punten in Σ_1 zoodanig, dat daarmede in Σ niet alleen een enkele schroef, maar een schroevenbundel overeenkomt.

Dit vooropstellende en naar de mededeeling onder No. 1 genoemd

verwijzende, kunnen we tot de ontleding der hoofdkromme overgaan. Zij bestaat uit de navolgende deelen:

a. De kegelsnede K^2_d in vlak δ_1, meetkundige plaats der punten overeenkomende met schroevenbundels, die een straal met bundel (A, α) gemeen hebben en waarvan de vlakken evenwijdig aan de dubbelrechte d zijn.

b. De kegelsnede K^2_u in vlak v_1, meetkundige plaats der punten, overeenkomende met schroevenbundels, die een straal met (A, α) gemeen hebben en uit evenwijdige stralen bestaan.

c. De rechte $l_1 \equiv D_d D_u$, die K^2_d en K^2_u snijdt, meetkundige plaats der punten, overeenkomende met schroevenbundels, welker top op a' ligt en welker vlak door a gaat.

De beide kegelsneden hebben twee imaginaire punten met elkander gemeen, de vlakken δ_1 en v_1 zijn de meetkundige plaatsen der punten, overeenkomende met schroeven $// d$ en met die in het vlak in het oneindige. Zij zijn hier niet aangeduid.

In de figuur zijn verder geconstrueerd de toppen T_g en T_k der beide kwadratische kegelvlakken, door K^2_d en K^2_u bepaald. De verbindingslijn $T_g\, T_k$ snijdt δ_1 en v_1 in M_d en M_u.

6. Thans kunnen de met de kegelvlakken en parabolen van Σ overeenkomende vormen van Σ_1 gevonden worden. Het is klaarblijkelijk, dat men in Σ_1 kromme lijnen zal verkrijgen. Men denke zich nu den top P en construeere een schroevenkegel P^2. De constructie geeft aanleiding tot de navolgende opmerkingen:

a. Men denke zich een nulstelsel met daarin liggend lineair complex σ door (A, α) gebracht; het nulvlak van P snijdt kegel P^2 in twee stralen; het overeenkomstige vlak σ_1 snijdt dus de met P^2 overeenkomende kromme P_1^2 in twee punten; P_1^2 is dus een kegelsnede.

b. Een schroef van P^2 snijdt a en a'; P_1^2 snijdt dus l_1 in een punt.

c. Een schroef van P^2 is $// d$; P_1^2 snijdt dus δ_1 in een punt, dat niet op K^2_d gelegen is.

d. Het is van veel belang te bepalen, hoeveel schroeven van P^2 behooren tot bundels evenwijdige schroeven, die een schroef met (A, α) gemeen hebben. Men brenge daartoe door P een vlak $// \alpha$; twee schroeven van P^2, m en n, zijn evenwijdig aan schroeven m' en n' van bundel (A,α); hieruit volgt dat m en m' loodrecht staan op dezelfde beschrijvende rechte van C^3; zij behooren dus tot denzelfden bundel evenwijdige schroeven, en wel tot een bundel, die met (A, α) een schroef gemeen heeft. Hetzelfde geldt van n en n', alzoo snijdt P_1^2 de kegelsnede $K_u{}^2$ in twee punten.

e. Verder moet bepaald worden, hoeveel schroeven van P^2 behooren tot bundels schroeven, welker vlakken evenwijdig aan d

loopen en die een schroef met (A,α) gemeen hebben. Daarvoor is het noodig die snijpunten van schroeven van P^2 met schroeven van (A,α) te bepalen, die tevens gelegen zijn op eene beschrijvende rechte van C^3. Men beschouwe nu eerst de doorsnede van vlak α met C^3, zij bestaat uit de rechte a' en een kegelsnede A^2. In de tweede plaats merke men op, dat de voetpunten der loodlijnen uit P op de beschrijvende rechten van C^3 insgelijks een kegelsnede B^2 vormen, gelegen in een vlak, dat buitendien nog eene rechte b met C^3 gemeen heeft. De beide ontaarde cubische krommen $A^2 + a'$, $B^2 + b$, snijden elkander in drie punten. Daar a' en b elkaar niet kunnen snijden, liggen die snijpunten zoodanig, dat a' een punt met B^2, b een punt met A^2 en A^2 met B^2 één punt L gemeen heeft. L is nu het eenige snijpunt, dat aan den bovengestelden eisch voldoet; P_1^2 snijdt dus K^2_d in één punt.

7. De krommen, in Σ_1 overeenkomende met de schroeven, die de parabolen in de vlakken π omhullen, worden op overeenkomstige wijze bepaald. Dit zal in het kort geschieden.

a. Uit het nulpunt van π ten opzichte van een nulstelsel door (A,α) kan men twee raaklijnen aan de parabool π^2 trekken. De overeenkomstige kromme π_1^2 is dus eene kegelsnede.

b. Een schroef in π_1^2 snijdt a en a'; π_1^2 snijdt dus l_1 in een punt.

c. Een schroef in π ligt in het oneindige; π_1^2 snijdt dus het vlak v_1 in een punt buiten $\overline{K}^2_u$.

d. Een schroef van bundel (A,α) loopt evenwijdig aan het vlak π; beide behooren tot denzelfden bundel evenwijdige schroeven; alzoo heeft π_1^2 een punt met K^2_u gemeen.

e. De snijlijn $\overline{\alpha\pi}$ snijdt C^3, behalve in haar snijpunt met a', in twee punten M en N. Uit M gaan twee raaklijnen aan π^2, een daarvan loopt naar een punt, gelegen op de beschrijvende rechte m' van C^3, die toegevoegd is aan die waarop M ligt; de andere staat loodrecht op m zelve. De laatstgenoemde raaklijn bepaalt met de schroef AM een vlak $\perp m$, waaruit volgt, dat in dit vlak een bundel ligt, welks vlak $// d$ is en die een schroef met (A,α) gemeen heeft. Op het punt N kan dezelfde redeneering worden toegepast. Hieruit volgt, dat de overeenkomstige kegelsnede π_1^2 de kegelsnede K^2_d in twee punten snijdt.

8. De kegelsneden P_1^2 en π_1^2 hebben alzoo vier punten met de kromme $K^2_u + K^2_d + l_1$ gemeen, hun aantal in Σ_1 zoude dus ∞^4 bedragen; er zijn evenwel in Σ slechts ∞^3 complexkegels en krommen, er moet dus nog een nadere bepaling der kegelsneden zijn. Dit blijkt ook op de volgende wijze:

Alle complexkegels P^2 behooren tot nulstelsels van een bijzonder

vlal

LI.

neter

soort. De verbindingslijn PA bepaalt nl. zulk een bijzonder lineair stralencomplex; het bestaat uit alle stralen, die PA snijden. Al deze nulstelsels hebben met elkander het punt A gemeen; het stralennet door A bevat de gemeenschappelijke stralen dezer nulstelsels, en eindelijk bestaan de gemeenschappelijke schroeven uit den bundel (A, α) en den bundel door $A \perp \alpha$. Hieruit volgt:

Alle nulstelsels, waarin de schroeven der complexkegels gelegen zijn, hebben als gemeenschappelijken bundel den bundel door $A \perp \alpha$, daarmede komt in Σ_1 een punt C_d op K^2_d overeen. (Vergelijk STURM III p. 276).

Op overeenkomstige wijze bewijst men, dat de schroevenbundel, die gemeen is aan alle nulstelsels der complexkrommen, de bundel evenwijdige schroeven is, die in α ligt; met dien bundel komt dus in Σ_1 een punt C_u op K^2_u overeen.

9. Nu zal een constructie afgeleid worden, om de punten C_d en C_u te vinden. Het is blijkbaar voldoende, zoo we het snijpunt nagaan van een vlak, waarin een der kegelsneden P_1^2 of π_1^2 gelegen is, met K^2_d en K^2_u en wel dat snijpunt, dat niet tevens een punt van P_1^2 of π_1^2 is. Daarvoor kunnen we in Σ een bijzonderen kegel of kegelsnede kiezen.

Men neme daartoe P op de dubbelrechte d en wel in het punt, waarin de beschrijvende rechten met den grootsten en kleinsten parameter g en k samenkomen. Kegel P^2 splitst zich in twee vlakken door d; een vlak is $\perp g$; daarin ligt een schroevenbundel met P als top, alle schroeven hebben een parameter gelijk aan dien van k; het tweede is $\perp k$, het bevat insgelijks een schroevenbundel, welks schroeven een parameter gelijk aan dien van g hebben. Met elk dezer bundels komt in Σ_1 een rechte overeen; de eerste behoort tot den kegel T^2_k, de tweede tot T^2_g; daar verder een schroef van den gesplitsten kegel P^2 langs d valt, zoo gaat in Σ_1 het overeenkomstige vlak door $D_d\, T_g\, T_k$, het snijdt alzoo K^2_d nog in een punt, het gezochte punt C_d. De constructie van dit punt is dus hierdoor gevonden.

10. Uit het voorgaande leidt men gemakkelijk de constructie van het punt C_u af. Men legge het vlak π door g en k. De parabool π^2 splitst zich in twee bundels evenwijdige schroeven, welke uit stralen $\perp g$ en $\perp k$ bestaan, de eerste bezitten den parameter k, de tweede den parameter g. Het overeenkomstige vlak in Σ_1 gaat dus door twee beschrijvende rechten der kegels T^2_k en T^2_g, beide bundels bevatten tevens den straal in het oneindige van het vlak $\overline{gk}$. Deze laatste is de rechte, waardoor de dubbelrakende vlakken van C^3 gaan; het daarmede overeenkomende punt in Σ_1 is D_u. Het punt C_u wordt dus gevonden door het vlak $T^2_g T^2_k D_u$ te construeeren en het snijpunt daarvan met K^2_u te bepalen.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ spreekt over: „*Trillingen van electrisch geladen stelsels in een magnetisch veld*".

§ 1. Terwijl vele spectraallijnen, bij welke men thans het verschijnsel van ZEEMAN heeft waargenomen, onder den invloed van magnetische krachten, overeenkomstig de welbekende eenvoudige theorie tripletten of, bij waarneming langs de krachtlijnen, doubletten worden, ondergaan een vrij groot aantal andere lijnen meer ingewikkelde veranderingen. CORNU [1]) toonde aan dat de lijn D_1 in plaats van een triplet een quadruplet wordt, waarvan de uiterste componenten evenwijdig aan de krachtlijnen en de binnenste loodrecht daarop gepolariseerd zijn. Dergelijke quadrupletten zijn ook in een aantal andere gevallen waargenomen. Soms [2]) zijn bij tripletten of quadrupletten de buitenste en binnenste componenten andersom gepolariseerd dan gewoonlijk, en MICHELSON [3]), PRESTON)[4] e. a. hebben bij sommige lijnen zelfs eene splitsing in 5, 6 of meer componenten gevonden.

Ik wensch nu te doen zien, hoe men uit zekere onderstellingen omtrent het mechanisme der lichtemissie het ontstaan van dergelijke veelvoudige lijnen kan afleiden. Natuurlijk gevoel ik zeer goed dat de voorstelling die ik mij van de verschijnselen gemaakt heb allicht door eene veel geschiktere zal kunnen worden vervangen; in de behandelde gevallen wil ik dan ook alleen voorbeelden zien, waardoor de veelvoudige lijnen minder bevreemdend worden dan zij eerst zijn. Te minder ben ik geneigd veel waarde aan den bijzonderen vorm mijner onderstellingen te hechten, omdat ik slechts wat een enkel geval, nl. wat het quadruplet van CORNU betreft, getracht heb de theorie in bijzonderheden met de waarnemingen te doen overeenstemmen, en daar toen niet, of althans zeer gebrekkig, in geslaagd ben.

§ 2. Uit het feit dat de componenten waarin eene lijn in het magnetisch veld gesplitst wordt, in vele gevallen even scherp zijn als de oorspronkelijke lijn volgt, dat de trillingstijden van alle lichtgevende deeltjes in de lichtbron op dezelfde wijze worden veranderd. Dit is alleen mogelijk, wanneer òf alle deeltjes in het magnetisch veld op dezelfde wijze gericht worden, òf wel de invloed der magnetische krachten niet verandert, al wordt het deeltje op willekeu-

---

1) CORNU, Comptes rendus, T. 126.

2) BECQUEREL en DESLANDRES, Comptes rendus, T. 127, p. 18.

3) MICHELSON, Phil. Mag., Vol. 45, p. 348.

4) PRESTON, ibidem, p. 325.

rige wijze gedraaid. Wegens de moeilijkheden, die zich bij de eerste hypothese voordoen [1]), heb ik aangenomen dat de lichtgevende deeltjes bolvormig zijn en in alle richtingen dezelfde eigenschappen hebben. Dit is zeer goed vereenigbaar met de voorstelling dat een scheikundig atoom een stelsel van veel ingewikkelder bouw is; immers, het trillende bolvormige ioon kan een onderdeel, misschien een klein onderdeel van het geheele atoom zijn [2]).

Zooals ik vroeger [3]) aantoonde, kan een triplet verkregen worden, wanneer er onder de verschillende enkelvoudige trillingswijzen, waarvoor het stelsel vatbaar is, drie voorkomen, voor welke, als er geen magnetisch veld is, de trillingstijd dezelfde is, wanneer dus, zooals men het kan uitdrukken, het stelsel drie aequivalente graden van vrijheid heeft. Later werd door den Heer PANNEKOEK opgemerkt [4]) dat men eene viervoudige lijn kan verkrijgen, wanneer er, in denzelfden zin, 4 aequivalente graden van vrijheid zijn, en in het algemeen eene n-voudige lijn, wanneer n enkelvoudige trillingswijzen gelijken trillingstijd hebben.

Werkelijk bestaan nu bij bolvormige stelsels, wanneer zij „boventonen" geven, meer dan drie aequivalente graden van vrijheid.

§ 3. Het eerste stelsel dat ik beschouwen zal bestaat uit een bolopppervlak met den straal a, dat met eene electrische lading belegd is. Deze lading die wij ons aan de ponderabele materie van de bolvormige schil gebonden zullen denken, hebbe in den natuurlijken toestand de overal even groote vlaktedichtheid σ; de vlaktedichtheid der ponderabele stof zij ϱ. Ik zal aannemen dat de deeltjes van het bolopppervlak zich alleen langs dit oppervlak verplaatsen kunnen, dat zij daarbij hunne lading medenemen, zoodat er „verdichtingen" of „verdunningen" der lading ontstaan kunnen, en dat elk deeltje op zich zelf naar zijn evenwichtsstand wordt teruggedreven door eene kracht, die bij de beschouwde oneindig kleine trillingen evenredig met de verplaatsing is. Wanneer de verplaatsing door $\mathfrak{a}$ wordt voorgesteld, zal die kracht voor de vlakte-eenheid berekend

$$-k^2\,\mathfrak{a}$$

zijn, waarbij k^2 eene voor alle deelen van den bol even groote constante is. Ter vereenvoudiging zal ik niet aannemen dat er eene

---

[1]) Verg. LORENTZ, Verslag der Vergad. Akad. van Wetensch. VI, p. 197, en Arch. néerl., Sér. 2, T. 2, p. 5.

[2]) Verg. LORENTZ, Verslag der Vergad. Akademie van Wetenschappen VI, p. 514.

[3]) Wied. Ann. Bd. 63, p. 278.

[4]) Verslag der Vergad. Akademie van Wetenschappen VII, p. 120.

veerkracht wordt opgewekt door de relatieve verplaatsingen van het eene punt der schil ten opzichte van het andere. De eenige band tusschen de bewegingen der verschillende punten, waardoor zij tot één stelsel worden, zijn de electrische krachten die zij op elkâar uitoefenen. Deze nu reduceeren zich tot de gewone electrostatische werkingen, wanneer, zooals ook in werkelijkheid het geval moet zijn, de golflengte der uitgezonden trillingen zeer groot is in vergelijking met de middellijn van den bol. Dan kunnen de krachten, die bij zekeren stand der deeltjes werken, berekend worden alsof op deze of gene wijze die stand werd vastgehouden. De krachten worden dus door de configuratie bepaald (altijd buiten het magnetisch veld), en „weerstanden" die van de snelheden afhangen zijn er niet, zoodat de trillingen niet gedempt worden. Inderdaad mag dan ook, zoolang de golflengte veel grooter is dan de afmetingen van het trillende stelsel, van de demping door uitstraling worden afgezien.

§ 4. Zoolang er nu geen magnetisch veld is, kan de bol trillen op de volgende wijze:

Zij Y_h eene bolfunctie van de h^{de} orde, dus eene functie die bepaald wordt door de richting van den naar het beschouwde punt getrokken straal, dan is op eenig oogenblik de verplaatsing van een punt van het bolppervlak

$$p \frac{\partial Y_h}{\partial l}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarbij onder l die richting in het boloppervlak, in het beschouwde punt, verstaan wordt, in welke Y_h het sterkst toeneemt, en $\frac{\partial Y_h}{\partial l}$ als een vector in die richting wordt opgevat. De factor p is in alle punten van den bol hetzelfde en wel van den vorm

$$q \cos (n_h t + c), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zoodat n_h de frequentie der trillingen is.

Wegens de door (1) bepaalde verplaatsingen zal de dichtheid veranderd zijn; zij is niet meer σ, maar

$$\sigma + h(h+1)\frac{\sigma}{a^2} p\, Y_h .$$

Hieruit vindt men voor de electrische kracht langs het oppervlak werkende

$$- 4 \pi V^2 \frac{h(h+1)}{2h+1} \cdot \frac{\sigma}{a} p \frac{\partial Y_h}{\partial l}$$

(V de snelheid van het licht) en dus voor de kracht per eenheid van oppervlak, daar de lading hiervan $= \sigma$ kan gesteld worden,

$$- 4 \pi V^2 \frac{h(h+1)}{2h+1} \cdot \frac{\sigma^2}{a} p \frac{\partial Y_h}{\partial l} .$$

De bewegingsvergelijking wordt dus:

$$\varrho \ddot{p} \frac{\partial Y_h}{\partial l} = - k^2 p \frac{\partial Y_h}{\partial l} - 4 \pi V^2 \frac{h(h+1)}{2h+1} \frac{\sigma^2}{a} p \frac{\partial Y_h}{\partial l},$$

zoodat $\frac{\partial Y_h}{\partial l}$ wegvalt, en de frequentie n_h bepaald wordt door de formule

$$\varrho n_h^2 = k^2 + 4 \pi V^2 \frac{h(h+1)}{2h+1} \cdot \frac{\sigma^2}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hieruit blijkt dus dat de frequentie dezelfde is zoolang de bewegingstoestand op de gestelde wijze aan eene bolfunctie van de orde h beantwoordt, onverschillig *welke* bolfunctie van deze orde men neemt.

Den „grondtoon" geeft onze bol, wanneer $h = 1$ is, den eersten boventoon voor $h = 2$, enz. Hij kan echter den grondtoon nog op verschillende wijzen geven, en evenzoo den eersten boventoon.

Bij de beschouwde trillingen bestaat eene kinetische energie

$$T = \tfrac{1}{2} \varrho \dot{p}^2 \int \left(\frac{\partial Y_h}{\partial l}\right)^2 d\omega .$$

Voor deze uitdrukking, waarin $d\omega$ een element van het bolopper-vlak is, kan men wegens de eigenschappen der bolfunctiën ook schrijven

$$T = \tfrac{1}{2} h(h+1) \frac{\varrho}{a^2} \dot{p}^2 \int Y_h^2 d\omega .$$

De potentieele energie bedraagt

$$U = 2 \pi V^2 \frac{h^2(h+1)^2}{2h+1} \frac{\sigma^2}{a^3} p^2 \int Y_h^2 d\omega + \tfrac{1}{2} k^2 p^2 \int \left(\frac{\partial Y_h}{\partial l}\right)^2 d\omega =$$

$$= \left[2 \pi V^2 \frac{h^2(h+1)^2}{2h+1} \frac{\sigma^2}{a^3} + \tfrac{1}{2} h(h+1) \frac{1}{a^2} k^2\right] p^2 \int Y_h^2 d\omega .$$

Voeren wij ter bekorting de beide constanten

$$A_h = 4\pi V^2 \frac{h^2 (h+1)^2}{2h+1} \frac{\sigma^2}{a^3} + h(h+1)\frac{k^2}{a^2}$$

en

$$B_h = h(h+1)\frac{\varrho}{a^2}$$

in, dan is

$$T = \tfrac{1}{2} B_h \dot{p}^2 \int Y_h^2 \, d\omega$$

en

$$U = \tfrac{1}{2} A_h p^2 \int Y_h^2 \, d\omega \ .$$

§ 5. Stellen wij ons thans voor dat men voor h een bepaald getal kiest, en alleen de trillingen wil beschouwen die aan bolfunctiën van deze orde beantwoorden. Die hebben dan alle dezelfde frequentie n_h, maar kunnen nog van elkâar verschillen door de gekozen bolfunctie Y_h, of door de ligging der *polen*, waardoor elke bolfunctie bepaald wordt. Ook kunnen trillingen, beantwoordende aan verschillende bolfunctiën van de orde h, met willekeurige amplituden en phasen, gelijktijdig bestaan.

Intusschen is er slechts een beperkt aantal van elkander onafhankelijke bewegingswijzen; immers, elke bolfunctie van de orde h kan uit $2h+1$, tot op zekere hoogte willekeurig gekozen bolfunctiën van deze orde, met bepaalde ligging der polen, worden opgebouwd. Er zijn dus ook niet oneindig vele maar slechts $2h+1$ aequivalente graden van vrijheid met de frequentie n_h. Wij stellen ons nu voor dat men $2h+1$ bepaalde bolfunctiën van de orde h zoodanig kiest, dat daaruit alle andere bolfunctiën van die orde kunnen worden samengesteld. Als wij *deze* bolfunctiën, die ik de „fundamenteele" zal noemen, door

$$Y_{h1}\ ,\quad Y_{h2}\ ,\quad Y_{h3}\ \text{enz.}$$

voorstellen, kunnen wij bij den meest algemeenen bewegingstoestand dien wij thans te beschouwen hebben de verplaatsing voorstellen door

$$\alpha = p_1 \frac{\partial Y_{h1}}{\partial l} + p_2 \frac{\partial Y_{h2}}{\partial l} + p_3 \frac{\partial Y_{h3}}{\partial l} + \text{enz.}, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

in welke vergelijking elke term, op de in § 4 aangegeven wijze, een vector langs het boloppervlak voorstelt.

In de verschillende termen duidt dus l niet dezelfde richting aan.

Voor de potentieele en de kinetische energie bij den door (4) voorgestelden toestand vindt men nu gemakkelijk

$$U = \frac{1}{2} a_{11} p_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} p_2^2 + \frac{1}{2} a_{33} p_3^2 + \text{ enz.} \ldots +$$
$$+ a_{12} p_1 p_2 + a_{13} p_1 p_3 + \text{ enz},$$
$$T = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{p}_2^2 + \frac{1}{2} b_{33} \dot{p}_3^2 + \text{ enz.} \ldots +$$
$$+ b_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + b_{13} \dot{p}_1 \dot{p}_3 + \text{ enz.},$$

waarin

$$a_{\mu\mu} = A_k \int Y^2_{k\mu} \, d\omega, \qquad a_{\mu\nu} = A_k \int Y_{k\mu} \, Y_{k\nu} \, d\omega,$$

$$b_{\mu\mu} = B_k \int Y^2_{k\mu} \, d\omega, \qquad b_{\mu\nu} = B_k \int Y_{k\mu} \, Y_{k\nu} \, d\omega$$

is.

Wanneer wij alleen de trillingen van de orde h willen beschouwen, kunnen wij van de overige graden van vrijheid van het stelsel geheel afzien, en de $2 h + 1$ grootheden p_1, p_2, p_3 . . . als de algemeene coordinaten die den stand van het stelsel bepalen beschouwen. De bewegingsvergelijking die op de coordinaat p_μ betrekking heeft is dan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\mu}\right) = - \frac{\partial U}{\partial p_\mu},$$

en, wanneer er nog andere dan de tot nu toe beschouwde krachten, met de algemeene componenten Q_μ mochten werken,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\mu}\right) = - \frac{\partial U}{\partial p_\mu} + Q_\mu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

§ 6. Wanneer een electrisch geladen stelsel in een magnetisch veld trilt zullen op de deeltjes ervan krachten werken, die evenredig met hunne electrische lading zijn en per eenheid van lading op bekende wijze door het vector-produkt van de snelheid en de magnetische kracht worden bepaald. Stel nu dat het stelsel, vóór de magnetische kracht werkt, in een bewegingstoestand A met de frequentie n verkeert, dan zal wegens de daarbij bestaande snelheden door het magnetisch veld een stel van krachten F in het leven worden geroepen, die klaarblijkelijk met dezelfde frequentie n in richting wisselen. Welke beweging deze krachten, naast A, nog aan

het stelsel zullen geven, kan als een vraagstuk over medetrillen worden opgevat. In het algemeen zullen de krachten F het stelsel in een of meerdere zijner andere bewegingstoestanden B doen medetrillen, en of hierbij een zekere toestand B in aanmerking komt of niet wordt hierdoor bepaald, of de krachten F, zooals zij op een bepaald oogenblik zijn, bij oneindig kleine verplaatsingen, zooals die aan de beweging B beantwoorden, al dan niet een arbeid verrichten.

Een rechtstreeksche invloed der krachten F op den toestand A waaruit zij ontstonden is uitgesloten omdat de door de beweging van een deeltje opgewekte electromagnetische kracht loodrecht op de richting der snelheid staat en dus bij *deze* beweging geen arbeid verricht.

Wat de andere bewegingswijzen betreft, hangt verder alles van de frequentie af. Is de frequentie n' van eene bewegingswijze B aanmerkelijk verschillend van de frequentie n der krachten F, dan zullen deze slechts een zwak medetrillen op de wijze B, en wel met de frequentie n, tengevolge hebben, daar toch, zooals de ervaring leert, de krachten F zeer klein zijn in verhouding tot de overige werkende krachten. Evenals de krachten F zal de amplitudo der verkregen beweging B evenredig met de veldsterkte H zijn, en de electromagnetische krachten F' behoorende bij de snelheden B, zullen kleine grootheden van de orde H^2 zijn. Van de terugwerking dezer krachten op den bewegingstoestand A zal men kunnen afzien.

Geheel anders wordt de zaak, wanneer er onder de bewegingen B eene is met eene frequentie, gelijk aan die van A. Dan kan, onder den invloed der krachten F, eene beweging B met groote amplitudo bestaan; zooals de mathematische berekening leert wordt die amplitudo vergelijkbaar met die van A zelf. De krachten F' zullen nu de beweging A wijzigen, en wel de periode veranderen. Dit laatste volgt hieruit dat de krachten F dezelfde phasen hebben als de snelheden bij A, en dus $^1/_4$ trillingstijd in phase verschillen van de verplaatsingen A. Nu zullen de verplaatsingen bij den toestand B dezelfde (of de tegengestelde) phase moeten hebben als de krachten F. De krachten F' zullon dus $^1/_4$ trillingstijd in phase verschillen van de krachten F; zij zullen derhalve dezelfde of de tegengestelde phase hebben als de verplaatsingen A, en dit is juist noodig wanneer zij de periode der beweging A zullen veranderen.

Tevens blijkt het dat de gelijktijdig bestaande bewegingen A en B $^1/_4$ trillingstijd in phase zullen verschillen, en hieraan is het te wijten dat evenwijdig aan de krachtlijnen circulair gepolariseerd licht wordt uitgestraald.

§ 7. Daar blijkens het bovenstaande de trillingen van de orde h in het magnetisch veld geen noemenswaardigen invloed kunnen ondervinden van de trillingen van andere orde, kunnen wij de trillingen van de orde h op zichzelf blijven beschouwen. De grootheid Q_μ in de vergelijking (5) wordt nu bepaald door de voorwaarde dat $Q_\mu \, \delta p_\mu$ de arbeid moet zijn, dien de electromagnetische krachten bij eene oneindig kleine verplaatsing δp_μ verrichten. Daar nu de bedoelde krachten lineaire functien van de snelheden $\dot{p}$ zijn, moet Q_μ den volgenden vorm hebben:

$$Q_\mu = \Sigma_\nu \, \varepsilon_{\mu\nu} \, \dot{p}_\nu \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

De coefficienten ε kan men berekenen, wanneer men bij elke bolfunctie $Y_{h\mu}$ de functie

$$W_{h\mu} = r^h \, Y_{h\mu}$$

invoert, waarin r de afstand tot het middelpunt van den bol is. Men vindt dan, wanneer de magnetische kracht H de richting der z-as heeft, zooals wij in het vervolg zullen aannemen,

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \frac{H\sigma}{a^{2h+2}} \int z \begin{vmatrix} x, & y, & z, \\ \frac{\partial W_{h\mu}}{\partial x}, & \frac{\partial W_{h\mu}}{\partial y}, & \frac{\partial W_{h\mu}}{\partial z} \\ \frac{\partial W_{h\nu}}{\partial x}, & \frac{\partial W_{h\nu}}{\partial y}, & \frac{\partial W_{h\nu}}{\partial z} \end{vmatrix} d\omega \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Hierbij is het middelpunt van den bol tot oorsprong van coordinaten gekozen.

Wij zullen aannemen dat de y-as naar de plaats gericht is, die de waarnemer inneemt, als hij de verschijnselen loodrecht op de krachtlijnen wil beschouwen.

Verder zullen wij de fundamenteele bolfunctiën somtijds aanwijzen door indices die de ligging der polen aanduiden. Zoo is Y_x de eenassige bolfunctie van de eerste orde, waarvan de pool ligt in het snijpunt van de positieve x-as met het boloppervlak, Y_{xy} de bolfunctie van de tweede orde, die tot polen heeft de snijpunten met de positieve x- en de positieve y-as, Y_{xx} de zonale bolfunctie waarvan de twee polen samenvallen in het snijpunt met de x-as, enz. Bij deze notatie kan de index die de orde aangeeft achterwege blijven.

Uit (7) volgt, zooals in het algemeen moet zijn,

$$\varepsilon_{\mu\mu} = 0 \ , \qquad \varepsilon_{\nu\mu} = -\varepsilon_{\mu\nu} \, .$$

§ 8. Wij onderzoeken nu in de eerste plaats trillingen volgens eene bolfunctie van de 1ste orde.

Als fundamenteele functiën kiezen wij:

$$Y_{11} = Y_x \, , \qquad Y_{12} = Y_y \, , \qquad Y_{13} = Y_z \, ,$$

zoodat

$$W_{11} = x \, , \qquad W_{12} = y \, , \qquad W_{13} = z$$

is.

Wij hebben dan

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = {}^4/_3 \, \pi \, a^2 \, A_1,$$

$$a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0,$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = {}^4/_3 \, \pi \, a^2 \, B_1 = {}^8/_3 \, \pi \, \varrho,$$

$$b_{12} = b_{23} = b_{31} = 0,$$

$$\varepsilon_{12} = {}^4/_3 \, \pi \, H \, \sigma \ , \qquad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$

De bewegingsvergelijkingen worden dus, als wij a_{11}, b_{11} en ε_{12} door α_1, β_1 en ε_1 vervangen,

$$\beta_1 \, \ddot{p}_1 = -\alpha_1 \, p_1 + \varepsilon_1 \, \dot{p}_2 \, , \qquad (8)$$

$$\beta_1 \, \ddot{p}_2 = -\alpha_1 \, p_2 - \varepsilon_1 \, \dot{p}_1 \, , \qquad (9)$$

$$\beta_1 \, \ddot{p}_3 = -\alpha_1 \, p_3.$$

Hieruit volgt vooreerst dat buiten het magnetisch veld, dus voor $\varepsilon_1 = 0$, de frequentie n_1 van alle trillingen bepaald wordt door

$$n_1^2 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{A_1}{B_1} \, ,$$

wat ook uit (3) volgt.

Is er wel een magnetisch veld, dan hebben de trillingen volgens Y_z nog onveranderd deze frequentie, terwijl er verder twee bewegingstoestanden met eene gewijzigde frequentie mogelijk zijn. Stelt men nl. dat p_1 en p_2 den tijd bevatten in den factor e^{int}, dan blijkt het dat

aan (8) en (9), wanneer men grootheden van de orde H^2 verwaarloost, kan worden voldaan door

$$p_2 = + i p_1, \qquad n = n_1 + n'_1$$

en door

$$p_2 = - i p_1, \qquad n = n_1 - n'_1,$$

waarbij

$$n'_1 = \frac{\varepsilon_1}{2 \beta_1} = \frac{H \sigma}{4 \varrho}$$

is, of wel, wanneer $e = 4 \pi a^2 \sigma$ de geheele electrische lading, en $m = 4 \pi a^2 \varrho$ de geheele massa is,

$$n'_1 = \frac{H e}{4 m}.$$

Hoe men, door alleen het reëele gedeelte van de opgegeven waarden te nemen, tot bewegingstoestanden komt, waarbij tusschen de trillingen die aan Y_x en Y_y beantwoorden, in de eene of andere richting een phaseverschil van $^1/_4$ trillingstijd bestaat, behoeft geen betoog.

Daar bij eene der trillingen volgens Y_x, Y_y of Y_z de electrische ladingen zich in hoofdzaak volgens eene der coördinaatassen heen en weer bewegen, m.a.w. in de richting van eene der assen een wisselend electrisch moment bestaat, heeft de nu onderzochte bewegingstoestand veel overeenkomst met die, welke in de elementaire theorie van het Zeeman-effect wordt aangenomen. Geen wonder dus dat men tot dezelfde tripletten en doubletten komt als in die theorie. Alleen is bij gelijke waarden van e en m de verandering n'_1 der frequentie half zoo groot als in de elementaire theorie.

§ 9. Bij het onderzoek der trillingen van de tweede orde kiezen wij als fundamenteele bolfunctiën:

$$Y_{21} = Y_{xy}, \quad Y_{22} = Y_{x'y'}, \quad Y_{23} = Y_{xz}, \quad Y_{24} = Y_{zz}, \quad Y_{25} = Y_{zz}.$$

De indices x' en y' hebben hierbij betrekking op twee assen OX' en OY', die door wenteling van OX en OY om de z-as verkregen worden, en waarvan de eerste den hoek tusschen OX en OY midden door deelt.

Aan deze vijf fundamenteele functiën, uit welke inderdaad alle bolfunctiën van de tweede orde kunnen worden opgebouwd, beantwoordt

$$W_{21} = {}^3/_2\, x\, y, \quad W_{22} = {}^3/_2\, x'\, y' = {}^3/_4\, (y^2 - x^2),$$

$$W_{23} = {}^3/_2\, x\, z, \quad W_{24} = {}^3/_2\, y\, z$$

$$W_{25} = {}^1/_2\, (-x^2 - y^2 + 2\, z^2).$$

De verschillende coefficienten nemen thans, als men

$${}^1/_5\, \pi\, a^2\, A_2 = \alpha_2, \quad {}^1/_5\, \pi\, a^2\, B_2 = \beta_2, \quad {}^3/_5\, \pi\, H\, \sigma = \varepsilon_2$$

stelt, de volgende waarden aan:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 3\, \alpha_2, \quad a_{55} = 4\, \alpha_2$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = 3\, \beta_2, \quad b_{55} = 4\, \beta_2$$

$$\varepsilon_{12} = +\, 2\, \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_{21} = -\, 2\, \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_{34} = +\, \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_{43} = -\, \varepsilon_2.$$

De hier niet voorkomende coefficienten hebben alle de waarde 0. De bewegingsvergelijkingen worden:

$$3\, \beta_2\, \ddot{p}_1 = -\, 3\, \alpha_2\, p_1 + 2\, \varepsilon_2\, \dot{p}_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

$$3\, \beta_2\, \ddot{p}_2 = -\, 3\, \alpha_2\, p_2 - 2\, \varepsilon_2\, \dot{p}_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

$$3\, \beta_2\, \ddot{p}_3 = -\, 3\, \alpha_2\, p_3 + \varepsilon_2\, \dot{p}_4 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

$$3\, \beta_2\, \ddot{p}_4 = -\, 3\, \alpha_2\, p_4 - \varepsilon_2\, \dot{p}_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

$$\beta_2\, \ddot{p}_5 = -\, \alpha_2\, p_5.$$

Buiten het magnetisch veld wordt dus de frequentie van al deze trillingen bepaald door

$$n_2{}^2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{A_2}{B_2}.$$

In het magnetisch veld hebben de aan Y_{zz} beantwoordende trillingen nog deze frequentie. Aan de vergelijkingen (10) en (11) kan verder — wanneer wij weder met uitdrukkingen werken, die den factor e^{int} bevatten — voldaan worden door

$$p_2 = +\, i\, p_1 \quad , \quad n = n_2 + n_2',$$

en eveneens door

$$p_2 = -i p_1 \quad , \quad n = n_2 - n_2' \ ,$$

waarbij

$$n_2' = \frac{\varepsilon_2}{3\,\beta_2} = \frac{H\,\sigma}{6\,\varrho} = \frac{H\,e}{6\,m}$$

is. Hieraan beantwoorden twee bewegingstoestanden, elk samengesteld uit eene Y_{xy}-trilling, gecombineerd met eene $Y_{x'y'}$-trilling, en wel zoo, dat de amplitudes gelijk zijn, en de phasen $^1/_4$ trillingstijd van elkander verschillen.

De vergelijkingen (12) en (13) leiden tot twee dergelijke combinaties van eene Y_{xz}- en eene Y_{yz}-trilling; de frequentie bij de eene is

$$n_2 + \tfrac{1}{2}\, n_2' \ ,$$

en bij de andere

$$n_2 - \tfrac{1}{2}\, n_2' \ .$$

§ 10. Tot dergelijke uitkomsten komt men ook wanneer men aanneemt dat eene lading met de overal even groote dichtheid σ over eene bolvormige ruimte verspreid is, en dat elk volume-element na eene verplaatsing $\mathfrak{a}$ uit zijn evenwichtsstand eene kracht ondervindt, die het daarheen terugdrijft en evenredig met de verplaatsing is. Zij $k^2\,\mathfrak{a}$ deze kracht, ϱ de onveranderlijk onderstelde massa per volume-eenheid en stellen wij ons voor dat de bol ook eene lading met de dichtheid $-\sigma$ bevat, die *niet* verplaatst kan worden. Men vindt dan dat een bewegingstoestand mogelijk is, waarbij in elk punt

$$\mathfrak{a} = p\,\frac{\partial\, W_h}{\partial\, l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

is, $W_h = r^h\, Y_h$ zijnde, terwijl het differentiaalquotient een vector voorstelt in de richting, in welke W_h het snelst toeneemt, en met eene grootte, bepaald door de toename per lengte-eenheid, in die richting.

De factor p is daarbij weder van den vorm (2), en men vindt thans

$$\varrho\, n_h^2 = k^2 + 4\,\pi\, V^2 \frac{h\,\sigma^2}{2\,h+1} \ .$$

Deze uitkomst heeft eene eigenschap die aan een bekend verschijnsel bij de reeksen van spectraallijnen herinnert; laat men nl. het ranggetal h voortdurend grooter worden, dan nadert n_h tot eene bepaalde limiet. Ook nu beantwoordt — maar thans op de in (14) uitgedrukte wijze — elke trillingstoestand aan eene bolfunctie en men

kan weder alles terugbrengen tot zekere fundamenteele bolfunctiën en verder juist zoo te werk gaan als in de voorgaande § §. Ik zal deze berekeningen hier niet mededeelen, en alleen vermelden dat men in het magnetisch veld bij de trillingen der eerste orde thans de drie perioden

$$n_1 \quad \text{en} \quad n_1 \pm \frac{H\,e}{2\,m},$$

en bij de trillingen der tweede orde de vijf perioden

$$n_2\,, \quad n_2 \pm \frac{H\,e}{2\,m}\,, \quad n_2 \pm \frac{H\,e}{4\,m}$$

vindt. Onder e en m is hierbij weder de geheele lading en de geheele massa te verstaan.

§ 11. Met behulp van de gewone bewegingsvergelijkingen voor den omringenden aether kan men uitmaken welke trillingen door de boven beschouwde stelsels zullen worden uitgestraald. In de uitdrukkingen die men b.v. voor de componenten der dielectrische verplaatsing vindt, komen termen voor, die omgekeerd evenredig zijn met de eerste macht van den afstand r tot het middelpunt van den bol, maar ook termen die omgekeerd evenredig zijn met hoogere machten van r. Het is duidelijk dat alleen de eerste termen de uitstraling van licht bepalen. Terwijl nu deze termen bij de trillingen van de eerste orde eene welbekende gedaante hebben, vertoonen zij bij de trillingen van de tweede orde de eigenaardigheid dat zij den factor $\frac{a}{\lambda}$ bevatten, wanneer weder a de straal van den bol en λ de golflengte van het uitgezonden licht is. Dientengevolge zal, als de verplaatsingen in of op den trillenden bol bij de Y_2-trillingen van dezelfde orde van grootte zijn als bij de Y_1-trillingen, het door de eerste uitgestraalde licht zeer veel zwakker zijn dan het door de laatste uitgestraalde. Immers, $\frac{a}{\lambda}$ is, naar hetgeen wij van molekulaire afmetingen weten, eene zeer kleine breuk en moet dat ook wel zijn, daar anders de trillingen te veel gedempt en de spectraallijnen te weinig scherp zouden worden.

Nu zou men kunnen meenen dat de amplitudo der Y_2-trillingen op den bol zelf zoo veel grooter kon zijn dan die der Y_1-trillingen dat, ondanks den factor $\frac{a}{\lambda}$, de Y_2-trillingen merkbaar licht konden

uitstralen. Door dit, hoewel het mij zeer onwaarschijnlijk voorkwam, voor een oogenblik aan te nemen, verkreeg ik uit de boven medegedeelde uitkomsten voor elk der twee behandelde stelsels bij de waarneming loodrecht op de krachtlijnen in alle opzichten het quadruplet van CORNU (de middelste lijn van het quintuplet dat op het eerste gezicht in onze uitkomsten ligt opgesloten, verdween n.l. geheel), maar ik vond dat bij waarneming langs de krachtlijnen niet, zooals in werkelijkheid het geval is, de twee buitenste, maar de twee middelste componenten van het quadruplet zouden moeten overblijven. Dit is voldoende om ons geheel terug te brengen van het denkbeeld dat de invloed van den factor $\frac{a}{\lambda}$ door eene groote amplitudo op den bol zou worden gecompenseerd. Wij moeten wel aannemen dat de trillingen die aan bolfunctiën van de tweede orde beantwoorden inderdaad geen waarneembaar licht kunnen uitstralen. Waarom zij dat niet kunnen doen, als a uiterst klein is in vergelijking met λ, is duidelijk; immers, op den bol heeft men dan, in elkanders onmiddellijke nabijheid, gelijke en tegengestelde verplaatsingen van gelijke ladingen.

Ook door de trillingen van hoogere dan de tweede orde kunnen de beschouwde bollen natuurlijk geen licht uitzenden, en het is wel duidelijk dat iets dergelijks ook zou gelden van de boventonen van stelsels van andere gedaante. Een geluidgevend lichaam waarvan verschillende punten in verschillende phasen verkeeren zal om dezelfde reden geen merkbaar geluid uitzenden, wanneer zijne afmetingen zeer klein zijn in vergelijking met de golflengte in de lucht. Dat eene stemvork (zonder klankkast) een zoo zwak geluid voortbrengt hangt hiermede samen, dat de afstand der beenen zoo klein is in vergelijking met λ.

Neemt men aan dat al het licht dat eene vlam uitzendt, in werkelijkheid te danken is aan trillingen „van de eerste orde," ik bedoel aan trillingen, waarbij, al hangen zij nu niet juist van eene „bolfunctie" af, een wisselend electrisch moment in eene bepaalde richting bestaat, dan ziet men aanstonds in dat, zooals steeds het geval is gebleken, bij de waarneming langs de krachtlijnen die strepen overblijven, die bij de waarneming loodrecht op de krachtlijnen evenwijdig aan deze lijnen gepolariseerd zijn.

§ 12. Het eenige middel dat ik heb kunnen bedenken om bij deze opvatting toch de trillingen van de tweede orde eene rol te laten spelen en dus de veelvoudige lijnen bij het ZEEMAN-effect te verklaren, bestaat in de onderstelling dat in de lichtbron niet alleen

primaire trillingen, zooals de tot nu toe beschouwde, plaats hebben, maar ook combinatietrillingen (verschil- en somtrillingen). De Heer V. A. JULIUS [1]) heeft er reeds voor vele jaren op gewezen dat de vele gelijke verschillen die er tusschen de frequenties der lijnen van een spectrum gevonden worden, op het bestaan van zulke trillingen wijzen, en inderdaad zie ik geen anderen weg om b. v. te verklaren dat bij de alkalimetalen vele doubletten hetzelfde verschil tusschen de trillingsgetallen hunner componenten vertoonen.

Ik wil hierbij opmerken dat combinatietrillingen, als men het begrip maar wat ruim opvat, op velerlei wijze kunnen ontstaan. Vooreerst, wanneer men te doen heeft met verplaatsingen, groot genoeg om de elastische (of bij onze bollen ook de electrische) krachten niet meer evenredig aan de eerste macht der verplaatsing te doen zijn. Verder, bij onze geladen bolvormige schil, zoodra de veranderingen in dichtheid zoo groot zijn dat voor den convectiestroom niet meer het product der snelheid met de *oorspronkelijke* dichtheid mag gesteld worden. Eindelijk kunnen tusschen twee trillende deeltjes tengevolge hunner beweging krachten optreden, waardoor zij in hun geheel in vibratie gebracht worden. Men verbeelde zich b. v. dat twee bolvormige schillen, zooals wij er boven ééne beschouwd hebben, concentrisch, de eene binnen de andere geplaatst zijn, en dat, terwijl de ladingen van beide op de beschouwde wijze trillen, de eene schil in haar geheel om een evenwichtstand kan heen- en weergaan. Onder deze laatste rubriek van combinatietrillingen kan ook het geval gebracht worden, dat de eene bol eene onveranderlijke lading volgens eene bolfunctie heeft; immers, men kan zeggen dat hij dan eene trilling met de frequentie 0 uitvoert.

Zonder nu omtrent het mechanisme der combinatietrillingen iets naders te onderstellen zal ik alleen aannemen dat alles symmetrisch rondom het middelpunt van een deeltje kan plaats hebben en dat wanneer bij de eene trilling grootheden voorkomen van den vorm

$$q \cos (nt + c) \quad . \quad . \qquad . \quad (15)$$

en bij de andere grootheden van den vorm

$$q' \cos (n't + c'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

de combinatietrillingen afhangen van het product

[1]) V. A. JULIUS, De lineaire spectra der elementen. Verh. der Kon. Akad. v Wetensch., Deel 26.

$$q\,q'\cos(nt+c)\cos(n't+c') = \tfrac{1}{2}\,q\,q'\cos[(n-n')\,t+(c-c')] +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,q\,q'\cos[(n+n')\,t+(c+c')].$$

Van de beide trillingen die aan de twee laatste termen beantwoorden zal ik ter bekorting alleen de eerste, de verschiltrilling, beschouwen.

§ 13. Men kan nu gemakkelijk inzien, en door de uitwerking van een of ander voorbeeld bevestigen, dat door de combinatie van eene trilling van de tweede orde met eene trilling van de eerste orde eene trilling van de eerste orde kan verkregen worden, die licht kan uitstralen. Daarbij kunnen de primaire trillingen door denzelfden bol worden uitgevoerd of wel door twee concentrische schillen.

Verbeelden wij ons nu de drie trillingen die aan de bolfunctiën Y_x, Y_y en Y_z beantwoorden en de vijf trillingen die door Y_{xy}, $Y_{x'y'}$, Y_{xz}, Y_{yz}, Y_{zz} bepaald worden; laat de vroeger ingevoerde grootheid p bij eene der drie eerste trillingen den vorm (15) en bij eene der vijf laatste den vorm (16) hebben. Om redenen van symmetrie kan eene combinatie van deze twee alleen dan eene combinatietrilling volgens eene bepaalde coördinaat-as opleveren, wanneer onder de drie indices die voor de aanwijzing der twee bolfunctiën dienen de op de bedoelde as betrekking hebbende een oneven aantal malen voorkomt. Zoo kan b.v. de samenwerking van de Y_{xy}-trilling met de Y_x-trilling wel eene trilling volgens de y-as, maar niet volgens de x-as opleveren.

Bij de beschouwing der werkelijk, in de richting der coördinaatassen opgewekte trillingen komt nu verder hunne amplitudo in aanmerking. Deze zal in elk bijzonder geval evenredig met het product qq' zijn en dus verkregen worden als men dit met een zekeren „amplitudofactor" vermenigvuldigt.

Houdt men nu in het oog dat zoodra men eene b.v. de eerste der twee samenwerkende trillingen a en b in eenige componenten, stel a_1, a_2, enz. ontbindt, de combinatietrilling $\{a, b\}$ verkregen wordt door de combinatietrillingen $\{a_1, b\}$, $\{a_2, b\}$, enz. met elkander samen te stellen, dan ziet men gemakkelijk in dat alle amplitudofactoren in één daarvan kunnen worden uitgedrukt. Stelt men nl. deze factoren voor door de teekens $[Y_{xx}, Y_x]_x$ enz., waarbij de laatste index aanduidt, welke richting de combinatietrilling zal hebben, dan moet b.v.

$$[Y_{yy}, Y_x]_x = [Y_{zz}, Y_x]_x$$

en

$$[Y_{xx}, Y_x]_x + [Y_{yy}, Y_x]_x + [Y_{zz}, Y_x]_x = 0$$

zijn, het laatste omdat tusschen de bolfunctiën van de tweede orde de betrekking

$$Y_{xx} + Y_{yy} + Y_{zz} = 0$$

bestaat. Stelt men dus

$$[Y_{xx}, Y_x]_x = \varkappa,$$

dan is

$$[Y_{yy}, Y_x]_x = -\tfrac{1}{2}\varkappa, \quad [Y_{zz}, Y_x]_x = -\tfrac{1}{2}\varkappa$$

en hiermede is nu de factor voor alle gevallen bekend, waarin de tweeassige bolfunctie eene zonale is, en hare pool 90° van die der eenassige verwijderd is of er mede samenvalt. Door geschikte ontbinding kan men alle andere gevallen hiertoe terugbrengen. Men vindt aldus de amplitudofactoren die in de volgende tabel vereenigd zijn; de letters x, y, z wijzen telkens de richting der combinatietrilling aan.

	Y_{xy}	$Y_{x'y'}$	Y_{xz}	Y_{yz}	Y_{zz}
Y_x	$+ \frac{3}{4}\varkappa$ (x)	$- \frac{3}{4}\varkappa$ (x)	$+ \frac{3}{4}\varkappa$ (z)	0	$- \frac{1}{2}\varkappa$ (x)
Y_y	$+ \frac{3}{4}\varkappa$ (x)	$+ \frac{3}{4}\varkappa$ (y)	0	$+ \frac{3}{4}\varkappa$ (z)	$- \frac{1}{2}\varkappa$ (y)
Y_z	0	0	$+ \frac{3}{4}\varkappa$ (x)	$+ \frac{3}{4}\varkappa$ (y)	$+ \varkappa$ (z)

§ 14. In het magnetisch veld bestaan nu drie bewegingstoestanden van de eerste orde met de frequenties

$$n_1 + n'_1\ , \quad n_1 - n'_1\ , \quad n_1 \ldots\ldots \quad (17)$$

Wij zullen de amplitudines der veranderlijke p_1 (§ 8) bij de beide eerste en der veranderlijke p_3 bij de laatste

$$q_1\ ,\quad q_2\ ,\quad q_3$$

noemen.

Verder zijn er vijf bewegingen van de tweede orde met de frequenties

$$n_2 + n'_2\ , \quad n_2 - n'_2\ , \quad n_2 + \tfrac{1}{2} n'_2\ , \quad n_2 - \tfrac{1}{2} n'_2\ , \quad n_2 \ldots \quad (18)$$

De amplitudines van p_1 (§ 9) bij de twee eerste, van p_3 bij de twee volgende en van p_5 bij de laatste zullen wij

$$q'_1\ ,\quad q'_2\ ,\quad q'_3\ ,\quad q'_4\ ,\quad q'_5$$

noemen.

Het zal nu voldoende zijn, twee van de 15 combinaties te beschouwen en wel vooreerst die van de eerste beweging van het drietal (17) met de eerste van het vijftal (18).

Wij hebben daarbij te doen, aan den eenen kant met eene Y_{xy}-trilling, voor te stellen door

$$q'_1 \cos [(n_2 + n'_2)\, t + c']$$

en eene $Y_{x'y'}$ -trilling, voor te stellen door

$$q'_1 \cos [(n_2 + n'_2)\, t + c' + \tfrac{1}{2} \pi],$$

en aan den anderen kant met eene Y_x-trilling

$$q_1 \cos [(n_1 + n_1')\, t + c]$$

en eene Y_y-trilling

$$q_1 \cos [(n_1 + n_1')\, t + c + \tfrac{1}{2} \pi] .$$

Het tabelletje der vorige § raadplegende komt men dan tot eene trilling

$$\begin{aligned} &{}^3/_4\, \varkappa\, q_1\, q_1' \cos [(n_2 - n_1 + n_2' - n_1')\, t + c' - c - \tfrac{1}{2} \pi] - \\ &- {}^3/_4\, \varkappa\, q_1\, q_1' \cos [(n_2 - n_1 + n_2' - n_1')\, t + c' - c + \tfrac{1}{2} \pi] = \\ &= {}^3/_2\, \varkappa\, q_1\, q_1' \cos [(n_2 - n_1 + n_2' - n_1')\, t + c' - c - \tfrac{1}{2} \pi] \end{aligned}$$

volgens de x-as, en eene trilling

$$\begin{aligned} &{}^3/_4\, \varkappa\, q_1\, q_1' \cos [(n_2 - n_1 + n_2' - n_1')\, t + c' - c] + \\ &+ {}^3/_4\, \varkappa\, q_1\, q_1' \cos [(n_2 - n_1 + n_2' - n_1')\, t + c' - c] = \\ &= {}^3/_2\, \varkappa\, q_1\, q_1' \cos [(n_2 - n_1 + n_2' - n_1')\, t + c' - c) \end{aligned}$$

volgens de y-as. Deze trillingen geven bij de waarneming loodrecht op de krachtlijnen aanleiding tot een lichtbundel met de trillingen loodrecht op de krachtlijnen, en waarvan de intensiteit door $\frac{9}{4}\, \varkappa^2\, q_1^2\, q_1'^2$ kan worden voorgesteld, en daar zij ${}^1/_4$ trillingstijd in phase verschillen, bij de waarneming langs de krachtlijnen tot circulair gepolariseerd licht.

Door eene overeenkomstige berekening vindt men dat uit de eerste

der bewegingen (17) en de tweede der bewegingen (18) geene combinatie-trillingen voortvloeien.

Gaat men alle combinaties na, dan komt men tot de volgende uitkomst, wat de waarneming loodrecht op de krachtlijnen betreft.

A. Men ziet in het spectrum, met trillingen evenwijdig aan de krachtlijnen:

1. Eene middelste lijn (frequentie n_2-n_1). Intensiteit evenredig met

$$q_3^2\, q'^2_5\ [12]\ .$$

2. Aan weerskanten daarvan op afstanden $\frac{1}{2}\, n_2'-n_1'$ lijnen met de intensiteiten

$$\frac{9}{4}\, q_1^2\, q_3'^2\ [9] \quad \text{en} \quad \frac{9}{4}\, q_2^2\, q_4'^2\ [9]\ .$$

B. Trillingen loodrecht op de krachtlijnen geven aanleiding tot:

1. Twee lijnen, op afstanden $n_2'-n_1'$ van *A*, 1. Intensiteiten:

$$\frac{9}{4}\, q_1^2\, q_1'^2\ [9] \quad \text{en} \quad \frac{9}{4}\, q_2^2\, q_2'^2\, [9]\ .$$

2. Twee lijnen op afstanden $\frac{1}{2}\, n'_2$ van *A*, 1. Intensiteiten:

$$\frac{9}{16}\, q_3^2\, q'^2_3 \left[\frac{9}{2}\right] \quad \text{en} \quad \frac{9}{16}\, q_3^2\, q'^2_4 \left[\frac{9}{2}\right].$$

3. Twee lijnen op afstanden n'_1 van *A*, 1. Intensiteiten:

$$\frac{1}{4}\, q_1^2\, q'^2_5 \left[\frac{3}{2}\right] \quad \text{en} \quad \frac{1}{4}\, q_2^2\, q'^2_5 \left[\frac{3}{2}\right].$$

Bij de waarneming langs de krachtlijnen verkrijgt men dezelfde lijnen als in het geval *B*, thans circulair-gepolariseerd en met dezelfde relatieve intensiteiten.

In werkelijkheid komen in de lichtbron talllooze molekulen voor met zeer verschillende waarden der grootheden q en q'. In de onderstelling dat zoowel bij de trillingen der eerste als bij die der tweede orde alle bewegingsrichtingen in dezelfde mate voorkomen, en dat bovendien eene bepaalde trilling der tweede orde gelijkelijk met alle verschillend gerichte trillingen der eerste orde gecombineerd wordt, vind ik voor de relatieve intensiteiten de getallen die boven tusschen haakjes zijn opgegeven.

§ 15. In het bijzondere geval dat de trillingen der eerste orde geen ZEEMAN-effect vertoonen, dus $n'_1 = 0$ is, vallen de lijnen B_3 samen tot eene enkele lijn in het midden met de intensiteit 3.

De lijnen A_2 en B_1 zouden dan juist de door CORNU waargenomen verschijnselen opleveren, maar bovendien zou men nog in geval B de zwakke zoo even vermelde lijn en de lijnen B_2, half zoo sterk als B_1, zien en in geval A de middelste lijn A_1, sterker dan A_2. Wellicht kunnen deze lijnen op den achtergrond treden, doordat de wijze, waarop de deeltjes aan het trillen worden gebracht, niet gunstig is voor het gelijktijdig ontstaan der bewegingen, uit welker combinatie zij voortvloeien. De middelste lijn A_1 moet altijd op den achtergrond treden door de absorptie in de buitenste deelen der lichtbron. Hoe trouwens deze lijn bij symmetrisch gebouwde lichtgevende deeltjes ooit geheel zou kunnen ontbreken is mij een raadsel.

Een ander bijzonder geval is: $n'_2 = {}^2/_3\, n'_1$ (§ 9).

Dan vallen de lijnen B_1 en B_2 samen tot lijnen met de intensiteit ${}^{27}/_2$. Deze sterke lijnen zouden dan maar half zoo ver van elkander liggen als de lijnen A_2, en wanneer men van A_1 en B_3 mocht afzien, zou men een quadruplet hebben, zooals er werkelijk zijn waargenomen, waarvan de buitenste componenten loodrecht op, en de binnenste evenwijdig aan de krachtlijnen gepolariseerd zijn.

§ 16. Ten slotte merk ik nog het volgende op.

1. Daar de frequentie der combinatietrillingen *bepaald* wordt door die der primaire is er verder bij deze combinatietrillingen van geen direct ZEEMAN-effect sprake.

2. Daar de spectraallijnen *omgekeerd* kunnen worden, gaat de met behulp van combinatietrillingen gegeven verklaring alleen op wanneer een stelsel tot meêtrillen gebracht kan worden door eene kracht die in periode overeenstemt, niet met eene primaire trilling, maar met eene combinatietrilling. Dit is, naar het mij voorkomt, werkelijk het geval, maar het zou mij thans te ver voeren, dit punt nader te behandelen.

3. Wil men de medegedeelde beschouwingen toepassen op trillingen van nog hoogere dan de tweede orde, dan moet men bedenken dat deze niet met trillingen van de eerste orde combinatietrillingen, eveneens van de eerste orde kunnen opleveren. Deze laatste, dus bewegingen die licht kunnen uitstralen, kunnen echter ontstaan als men telkens twee trillingen waarvan de orde 1 verschilt met elkander combineert. Vertoonden nu de primaire trillingen de in § 10 vermelde en bij de reeksen van spectraallijnen waargenomen eigenaardig-

heid, dan zou men deze, aldus handelende, niet bij de verschil-, maar wel bij de somtrillingen terugvinden. Intusschen schijnt mij deze opvatting van de reeksen van spectraallijnen moeilijk vereenigbaar met het feit dat zoovele lijnen door een magnetisch veld in tripletten worden veranderd.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt voor het Verslag een opstel aan over: „*Trinodale bikwadratische krommen*".

1. Beschouwt men de knooppunten D_1, D_2, D_3 eener trinodale vlakke kromme van de vierde orde als de hoekpunten van een coördinatendriehoek, dan heeft de bedoelde kromme een vergelijking van den vorm

$$\Gamma_4 \equiv a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{33} x_1^2 x_2^2 +$$

$$+ 2 x_1 x_2 x_3 (a_{12} x_3 + a_{23} x_1 + a_{31} x_2) = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

De vergelijkingen

$$\Phi_2 \equiv b_1 x_2 x_3 + b_2 x_3 x_1 + b_3 x_1 x_2 = 0 \;, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\Psi_2 \equiv c_1 x_2 x_3 + c_2 x_3 x_1 + c_3 x_1 x_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

stellen dan twee door de knooppunten getrokken kegelsneden voor.

Wanneer de coëfficienten dezer vergelijkingen aan de voorwaarden

$$b_1 c_1 = a_{11} \,, \quad b_2 c_2 = a_{22} \,, \quad b_3 c_3 = a_{33} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

voldoen, zoo blijkt uit de identiteit

$$\Phi_2 \Psi_2 - \Gamma_4 \equiv x_1 x_2 x_3 \Sigma (b_1 c_2 + b_2 c_1 - 2 a_{12}) x_3 \,, \quad . \quad . \quad (5)$$

dat de vier punten, welke Γ_4, buiten de knooppunten om, gemeen heeft met de *geassocieerde* kegelsneden Φ_2 en Ψ_2, op de rechte liggen, welke beantwoordt aan

$$\Sigma (b_1 c_2 + b_2 c_1 - 2 a_{12}) x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Elimineert men hieruit met behulp van (4) de coëfficienten c_1, c_2, c_3,

zoo vindt men voor de koorde, welke Φ_2 met Γ_4 gemeen heeft, de vergelijking

$$\Sigma\,(a_{11}\,b_2^2 - 2\,a_{12}\,b_1\,b_2 + a_{22}\,b_1^2)\,b_3\,x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

2. Zijn de coëfficienten b en c slechts door twee voorwaarden

$$b_2\,c_2 = a_{22}\,, \quad b_3\,c_3 = a_{33} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

verbonden, dan volgt uit

$$\Phi_2\,\Psi_2 - \Gamma_4 \equiv x_2\,x_3\,\Omega_2\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

dat men door de knooppunten D_2, D_3 en de snijpunten B_1, B_2 en C_1, C_2 van Γ_4 met Φ_2 en Ψ_2 een kegelsnede kan leggen, die tot vergelijking heeft

$$\Omega_2 \equiv (b_1\,c_1 - a_{11})\,x_2\,x_3 + x_1\,\Sigma\,(b_1\,c_2 + b_2\,c_1 - 2\,a_{12})\,x_3 = 0 \quad . \quad (10)$$

Φ_2 en Ψ_2 zullen genoemd worden *complementair* t. o. v. D_2, D_3.

Houdt men C_1, C_2 vast, terwijl de kegelsnede Ω_2 verandert, dan doorloopt het veranderlijke paar B_1, B_2 een involutie I_b^2, welke ingesneden wordt door den bundel $\Phi_2 = 0$.

Blijkbaar wordt de veranderlijke koorde $B_1\,B_2$ voorgesteld door (7), waar, in verband met (8), slechts b_1 veranderlijk is. Vervangt men in (7) a_{22} en a_{33} door $b_2\,c_2$ en $b_3\,c_3$, zoo vindt men voor $B_1\,B_2$ de nieuwe vergelijking

$$\begin{aligned}(c_3\,x_2 + c_2\,x_3)\,b_1^2 + [\,(b_3\,c_2 + b_2\,c_3 - 2\,a_{23})\,x_1 - 2\,a_{13}\,x_2 - 2\,a_{12}\,x_3]\,b_1 + \\ + a_{11}\,(b_3\,x_2 + b_2\,x_3) = 0\,, \quad . \quad . \quad (11)\end{aligned}$$

die t. o. v. b_1 van den tweeden graad is. De involutie-kromme is dus een kegelsnede $\mathfrak{H}_2$ met de vergelijking

$$4\,a_{11}\,(b_2\,x_3 + b_3\,x_2)\;(c_2\,x_3 + c_3\,x_2) = [\,(b_2\,c_3 + b_3\,c_2)\,x_1 - 2\,\Sigma\,a_{12}\,x_3]^2 \,. \quad . \quad (12)$$

Uit de symmetrie van (12) t. o. v. de grootheden b en c blijkt nu, dat $\mathfrak{H}_2$ tevens de omhullende is van de verbindingslijnen der paren $C_1\,C_2$ van de involutie I_c^2, welke ontstaat als men een paar B_1, B_2 vasthoudt en Ω_2 veranderlijk denkt.

Deze beide *complementaire* involuties zijn verder, blijkens het bovenstaande, daardoor gekenmerkt, dat elk paar van I_b^2 met elk paar van I_c^2 wordt verbonden door een kegelsnede, welke ook D_2, D_3

bevat [1]). In het bijzonder snijdt elke koorde $B_1 B_2$ een paar der I_c^2 in, en omgekeerd.

3. De involutiekromme $\mathfrak{H}_2$ is in verband met (8) volkomen bepaald door de waarde van $(b_2 c_3 + b_3 c_2)$. Vervangt men dezen parameter door $2k$, dan wordt $\mathfrak{H}_2$ voorgesteld door de vergelijking

$$a_{11}(a_{33} x_2^2 + 2 k x_2 x_3 + a_{22} x_3^2) = (\Sigma a_{23} x_1 - k x_1)^2 , \quad . \quad (13)$$

die van den tweeden graad is met betrekking tot den parameter k, zoodat de kegelsneden $\mathfrak{H}_2$ een stelsel met index *twee* vormen.

Vervangt men, ter bekorting, de vergelijking (13) door

$$P k^2 + 2 Q k + R = 0 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

waar dan P, Q, R bekende kwadratische vormen aanwijzen, dan is de omhullende van het stelsel gegeven door

$$P R - Q^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Bij uitwerking blijkt deze vergelijking met (1) overeen te stemmen; de omhullende van het stelsel (14) is dus de gegeven trinodale Γ_4.

Uit de identiteit

$$(P k^2 + 2 Q k + R) R - k^2 (P R - Q^2) \equiv (Q k + R)^2 \quad . \quad (16)$$

volgt, dat elke kegelsnede $\mathfrak{H}_2$ de kromme Γ_4 raakt in de snijpunten van $\mathfrak{H}_2$ met $Q k + R = 0$, of, wat op hetzelfde neerkomt, in de punten, welke de kegelsneden $Q k + R = 0$ en $P k + Q = 0$ gemeen hebben.

De vier raakpunten van Γ_4 met de door k_1 aangewezen $\mathfrak{H}_2$ liggen dus ook op

$$k_2 (P k_1 + Q) + (Q k_1 + R) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Daar (17) symmetrisch is in de parameters k_1 en k_2, zal de door haar voorgestelde kegelsnede ook de raakpunten bevatten van de vierpuntig rakende $\mathfrak{H}_2$, die door k_2 wordt aangewezen.

Hieruit mag men nog besluiten, dat elke kegelsnede van het net

---

[1]) In een opstel voorkomende in deel XIV van het Nieuw Archief voor Wiskunde (blz. 193—200) heb ik aangetoond, dat dergelijke *complementaire* stelsels van puntenparen op de bikwadratische krommen met twee knooppunten worden aangetroffen. Ook de bijzondere involuties van § 5 hebben hun analoga op de bedoelde krommen.

$$\lambda P + \mu Q + \nu R = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

twee viertallen raakpunten van vier maal rakende kegelsneden $\mathfrak{H}_2$ bevat. De overeenkomstige parameter-waarden volgen uit

$$\nu k_1 k_2 = \lambda \quad \text{en} \quad \nu (k_1 + k_2) = \mu .$$

4. Ter bepaling van de tot het stelsel behoorende lijnenparen vervangen we k door $\varkappa : \lambda$ en stellen dan den discriminant van (13) gelijk aan nul. Na herleiding vinden we

$$(a_{23} \lambda - \varkappa)^2 \, \lambda^2 \, (a_{22} a_{33} \lambda^2 - \varkappa^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Voor $\lambda = 0$ heeft men blijkbaar de dubbel te tellen rechte $D_2 D_3$.

Voor $\varkappa = \lambda \sqrt{a_{22} a_{33}}$ de in twee dubbelraaklijnen ontaarde vier maal rakende kegelsnede

$$(a_{23} - \sqrt{a_{22} a_{33}}) x_1 + a_{13} x_2 + a_{12} x_3 = \pm (x_2 \sqrt{a_{11} a_{33}} + x_3 \sqrt{a_{11} a_{22}}) . \quad (20)$$

Ook $\varkappa = - \lambda \sqrt{a_{22} a_{33}}$ geeft twee dubbelraaklijnen.

Ten slotte levert $\varkappa = a_{23} \lambda$ de kegelsnede

$$(a_{11} a_{22} - a_{12}^2) x_3^2 + 2 (a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}) x_2 x_3 + (a_{11} a_{33} - a_{13}^2) x_2^2 = 0, \quad (21)$$

die uit de beide door D_1 naar de kromme Γ_4 getrokken raaklijnen is samengesteld.

Op een willekeurige rechte l bepalen de kegelsneden $\mathfrak{H}_2$ een (2,2) overeenkomst; daar tot de coïncidenties van dit stelsel het snijpunt van l met $D_2 D_3$ moet gerekend worden, zijn er *drie* krommen $\mathfrak{H}_2$, welke een gegeven rechte aanraken. Deze komen overeen met de drie manieren, waarop men de snijpunten van l en Γ_4 in 2 paren kan verdeelen. Elk dier paren bepaalt een involutie, dus een kromme $\mathfrak{H}_2$. Dit is slechts schijnbaar hiermede in tegenspraak, dat een I^2 eerst door 2 paren bepaald is; immers, de beide in D_1 gelegen punten vormen een paar van elke I_b^2.

Blijkbaar is aan elk paar knooppunten van Γ_4 een stelsel van vier maal rakende kegelsneden toegevoegd.

5. Worden de in § 2 bedoelde kegelsneden Φ_2 en Ψ_2 identiek, dan volgt uit de vergelijking

$$\Phi_2^2 - \Gamma_4 \equiv x_2 x_3 \Omega_2 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

dat de door D_2 en D_3 getrokken kegelsnede Ω_2 de kromme Γ_4 aan-

raakt in de beide punten, welke Ω_2 nog gemeen heeft met de door de drie knooppunten gelegde kegelsnede Φ_2.

Men heeft nu te stellen

$$b_2 = \pm \sqrt{a_{22}} \quad \text{en} \quad b_3 = \sqrt{a_{33}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Van de beide hierdoor aangewezen stelsels beschouwen we voorloopig slechts het door het bovenste teeken bepaalde stelsel. Alle hiertoe behoorende kegelsneden Φ_2 worden aangewezen door

$$\Phi_2 \equiv x_1 x_2 \sqrt{a_{33}} + x_1 x_3 \sqrt{a_{22}} + \lambda\, x_2 x_3 \sqrt{a_{11}} = 0 \; . \; . \; . \quad (24)$$

Men heeft dan

$$\Omega_2 \equiv (1-\lambda^2)\, a_{11}\, x_2 x_3 + 2\,(a_{12} - \lambda \sqrt{a_{11}\, a_{22}})\, x_1 x_3 +$$
$$+ 2\,(a_{13} - \lambda \sqrt{a_{11}\, a_{33}})\, x_1 x_2 + 2\,(a_{23} - \sqrt{a_{22}\, a_{33}})\, x_1^2 = 0, \quad (25)$$

waaruit blijkt, dat deze door D_2, D_3 getrokken, elders dubbelrakende, kegelsneden een stelsel met index *twee* vormen.

Voor de verbindingslijn der raakpunten B_1, B_2 vindt men met behulp van (6)

$$(1+\lambda^2)\,(x_2 \sqrt{a_{11}\, a_{33}} + x_3 \sqrt{a_{11}\, a_{22}}) = 2\,\lambda\,(\Sigma\, a_{12}\, x_3 - x_1 \sqrt{a_{22}\, a_{33}}) \; . \quad (26)$$

Deze raakkoorden vormen derhalve een stralenbundel, die tot top heeft het snijpunt der rechten

$$x_2 \sqrt{a_{11}\, a_{33}} + x_3 \sqrt{a_{11}\, a_{22}} = 0\,, \qquad \Sigma\, a_{12}\, x_3 = x_1 \sqrt{a_{22}\, a_{33}} \; . \quad (27)$$

Iedere straal draagt twee paren der door de paren B_1, B_2 gevormde involutie. De waarden voor λ, die overeenkomen met de door den straal

$$\mu\,(x_2 \sqrt{a_{11}\, a_{33}} + x_3 \sqrt{a_{11}\, a_{22}}) + (\Sigma\, a_{12}\, x_3 - x_1 \sqrt{a_{22}\, a_{33}}) = 0 \; . \quad (28)$$

gedragen paren, vindt men uit

$$\lambda^2 + 2\,\mu\,\lambda + 1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Voor $\mu = \pm 1$ verkrijgt men twee stralen d_0 en d_1, waarop de beide paren zijn samengevallen; dit zijn dus dubbelraaklijnen.

Evenzoo blijkt, dat het negatieve teeken in (23) een stelsel van

dubbel rakende, door D_2, D_3 getrokken, kegelsneden levert, waarvan de raakkoorden door het snijpunt der overige twee dubbelraaklijnen, d_2 en d_3, gaan.

6. De kegelsneden door D_2, D_3, welke Γ_4 in B_1 raken, bepalen een I^2. Van haar beide dubbelpunten wordt het eene, B_2, met B_1 verbonden door een straal uit het punt $(d_0\ d_1) \equiv D_{01}$; het tweede, B_{II}, bevindt zich met B_1 op een straal door $D_{23} \equiv (d_2\ d_3)$. Nu is B_1 een dubbelpunt der complementaire I^2; laat het tweede dubbelpunt door B_I worden aangeduid. Daar elk paar der eerste involutie met elk paar der tweede wordt verbonden door een kegelsnede, die D_2, D_3 bevat, zijn er twee dubbelrakende kegelsneden Ω_2 die Γ_4 in B_I, B_2 en in B_I, B_{II} raken. Hieruit volgt, dat $B_I\,B_2$ door D_{23} en $B_I\,B_{II}$ door D_{01} gaat.

In Γ_4 kunnen dus oneindig vele vierhoeken beschreven worden, waarvan het eene paar overstaande zijden door D_{01}, het andere paar door D_{23} gaat.

Hun hoekpunten vormen de groepen eener bikwadratische involutie.

Elk tweetal paren der involutie (B_1, B_2), welke door den stralenbundel met top D_{01} wordt ingesneden, ligt in een kegelsnede met de knooppunten D_2, D_3. Dit volgt gereedelijk uit de vergelijking

$$a_{11}\Gamma_4 - (x_1x_2\sqrt{a_{33}} + x_1x_3\sqrt{a_{22}} + \lambda_1 x_2x_3\sqrt{a_{11}})(x_1x_2\sqrt{a_{33}} + x_1x_3\sqrt{a_{22}} +$$
$$+ \lambda_2 x_2x_3\sqrt{a_{11}}) \equiv a_{11}x_2x_3\{2(a_{23} - \sqrt{a_{22}a_{33}})x_1^2 +$$
$$+ [2a_{13} - (\lambda_1+\lambda_2)\sqrt{a_{11}a_{33}}]x_1x_2 +$$
$$+ [2a_{12} - (\lambda_1+\lambda_2)\sqrt{a_{11}a_{22}}]x_1x_3 + (1-\lambda_1\lambda_2)x_2x_3\sqrt{a_{22}a_{33}}\} \quad . \quad . \quad (30)$$

Om de vergelijking te vinden van de kegelsnede, welke D_2 en D_3 verbindt met de hoekpunten van een der boven genoemde vierhoeken $B_1\ B_2\ B_I\ B_{II}$, beschouwen we de volgende identiteit

$$\varrho(x_1x_2\sqrt{a_{33}} + x_1x_3\sqrt{a_{22}} + \lambda_1x_2x_3\sqrt{a_{11}})(x_1x_2\sqrt{a_{33}} + x_1x_3\sqrt{a_{22}} + \lambda_2x_2x_3\sqrt{a_{11}}) +$$
$$+ \sigma(x_1x_2\sqrt{a_{33}} - x_1x_3\sqrt{a_{22}} + \mu_1x_2x_3\sqrt{a_{11}})(x_1x_2\sqrt{a_{33}} - x_1x_3\sqrt{a_{22}} +$$
$$+ \mu_2x_2x_3\sqrt{a_{11}}) \equiv a_{11}(\Sigma a_{11}x_2^2x_3^2 + 2\Sigma a_{12}x_1x_2x_3^2) \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Men vindt gemakkelijk, dat hieraan voldaan wordt, wanneer men stelt

$$\varrho = (\sqrt{a_{22}a_{33}} + a_{23}) : 2\sqrt{a_{22}a_{33}} \quad \text{en} \quad \sigma = (\sqrt{a_{22}a_{33}} - a_{23}) : 2\sqrt{a_{22}a_{33}}.$$

Door nu de waarde van $(\lambda_1 + \lambda_2)$, die uit (31) voortvloeit, te

substitueeren in de vergelijking der in het rechter lid van (30) aangewezen kegelsnede, vindt men, dat de kegelsnede ($D_2 D_3 B_1 B_2 B_I B_{II}$) wordt voorgesteld door

$$A_{11} x_1^2 - A_{12} x_1 x_2 - A_{13} x_1 x_3 + \nu x_2 x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Hier is ν een nieuwe, van $\lambda_1 \lambda_2$ afhankelijke, parameter, terwijl A_{ik} den minor aanduidt, welke in den door de grootheden a_{ik} gevormden determinent bij a_{ik} behoort.

Blijkbaar levert $\nu = 0$ het eenigste quadrupel der door de punten B gevormde bikwadratische involutie, waarvan de punten in een rechte lijn liggen. De rechte $D_{01} D_{23}$ heeft dus tot vergelijking

$$A_{11} x_1 - A_{12} x_2 - A_{13} x_3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Door op te merken dat het derde diagonaalpunt Δ van vierhoek $B_1 B_2 B_I B_{II}$ de pool is van $D_{01} D_{23}$ t. o. v. de door (32) aangewezen kegelsnede, vindt men gemakkelijk, dat de coördinaten van Δ bepaald worden door

$$\frac{y_1}{2 A_{12} A_{13} - A_{11} \nu} = \frac{y_2}{A_{11} A_{13}} = \frac{y_3}{A_{11} A_{12}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

De meetkundige plaats van Δ is dus de rechte

$$A_{12} x_2 = A_{13} x_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

7. Uit de betrekking

$$a_{11} (\Sigma a_{11} x_2^2 x_3^2 + 2 x_1 x_2 x_3 \Sigma a_{23} x_1) \equiv (a_{11} x_2 x_3 + a_{12} x_1 x_3 + a_{13} x_1 x_2)^2 +$$

$$+ x_1^2 [(a_{11} a_{33} - a_{13}^2) x_2^2 + 2 (a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}) x_2 x_3 + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) x_3^2] \,. \,(36)$$

blijkt, dat de uit D_1 naar Γ_4 getrokken raaklijnen worden voorgesteld door

$$A_{22} x_2^2 - 2 A_{23} x_2 x_3 + A_{33} x_3^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

terwijl hun raakpunten R_1, R_I worden ingesneden door de kegelsnede

$$\varrho_1 \equiv a_{11} x_2 x_3 + a_{12} x_1 x_3 + a_{13} x_1 x_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Uit de vergelijking

$$\varrho_2 \equiv a_{12}\, x_2\, x_3 + a_{22}\, x_1\, x_3 + a_{23}\, x_1\, x_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

der kegelsnede $(D_1\, D_2\, D_3\, R_2\, R_{II})$ vindt men (volgens § 2) voor den bundel der kegelsneden, die t. o. v. D_2, D_3 complementair zijn met ϱ_2, de vergelijking

$$\lambda\, x_2\, x_3 + a_{23}\, x_1\, x_3 + a_{33}\, x_1\, x_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Tot dezen bundel behoort derhalve

$$\varrho_3 \equiv a_{13}\, x_2\, x_3 + a_{23}\, x_1\, x_3 + a_{33}\, x_1\, x_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

De punten D_2, D_3, R_2, R_{II}, R_3, R_{III} kunnen dus door een kegelsnede verbonden worden.

Door toepassing van (10) vindt men, dat die kegelsnede wordt aangewezen door

$$\varrho_{23} \equiv A_{11}\, x_1^2 - A_{12}\, x_1\, x_2 - A_{13}\, x_1\, x_3 + A_{23}\, x_2\, x_3 = 0 \quad . \quad (42)$$

Zij behoort dus tot den door (32) voorgestelden bundel. Dit was trouwens te voorzien, daar de beide uit D_2, D_3 getrokken paren van raaklijnen een der in § 6 bedoelde ingeschreven vierhoeken leveren.

Op overeenkomstige wijs leidt men uit de beschouwing van den met ϱ_1 complementairen bundel af, dat D_2, D_3, R_1 en R_I in een kegelsnede liggen met het puntenpaar C', C'', dat bepaald is door

$$a_{11}\, a_{23}\, x_2\, x_3 + a_{22}\, a_{31}\, x_3\, x_1 + a_{33}\, a_{12}\, x_1\, x_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Uit de symmetrie dezer vergelijking volgt nog, dat C', C'' ook met de viertallen D_1, D_2, R_3, R_{III} en D_1, D_3, R_2, R_{II} door kegelsneden worden verbonden.

Voor de kegelsnede $(D_2\, D_3\, R_1\, R_I\, C'\, C'')$ levert (10) de vergelijking

$$\gamma_1 \equiv (a_{12}\, A_{12} + a_{13}\, A_{13})\, x_1^2 + (a_{13}\, A_{23} - a_{12}\, A_{22})\, x_1\, x_2 +$$
$$+ (a_{12}\, A_{23} - a_{13}\, A_{33})\, x_1\, x_3 + a_{11}\, A_{23}\, x_2\, x_3 = 0 \quad . \quad . \quad (44)$$

Volgens een bekende eigenschap liggen de zes antitangentiaalpunten R in een kegelsnede.

Dit wordt bevestigd door de identiteit

$$A_{23}^2\, \Gamma_4 - \varrho_{23}\, \gamma_1 \equiv x_1^2\, \varrho_{123}\, , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

waar ϱ_{123} een vorm van den tweeden graad voorstelt.

Maar bovendien blijkt uit (45), dat *deze kegelsnede nog de punten C' en C'' met Γ_4 gemeen heeft.*

8. Blijkens de identiteit

$$\Gamma_4 \equiv (a_{33}\, x_2^2 + 2\, a_{23}\, x_2\, x_3 + a_{22}\, x_3^2)\, x_1 + (a_{11}\, x_2\, x_3 + \\ + 2\, a_{12}\, x_1\, x_3 + 2\, a_{13}\, x_1\, x_2)\, x_2\, x_3 \quad (46)$$

liggen de tangentiaalpunten T_1 en T_{I} van D_1 in de kegelsnede

$$\tau_1 \equiv a_{11}\, x_2\, x_3 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_3 + 2\, a_{13}\, x_1\, x_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Zij is complementair met de door (43) aangewezen kegelsnede; *er is dus een kegelsnede ε_1, welke door D_2, D_3, T_1, T_{I}, C', C'' gaat.*

Evenzoo blijkt, *dat D_2, D_3, T_2, T_{II}, T_3, T_{III} in een kegelsnede τ_{23} liggen.*

En nu kan men weer een identiteit van den vorm

$$\lambda\, \Gamma^4 + \tau_{23}\, \varepsilon_1 \equiv x_1^2\, \tau_{123} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

opstellen, waaruit dan volgt, dat C' en C'' ook met de zes punten T door een kegelsnede τ_{123} worden verbonden.

De kegelsnede τ_{123} der zes tangentiaalpunten en de kegelsnede ϱ_{123} der zes antitangentiaalpunten snijden elkaar derhalve in twee op Γ_4 gelegen punten.

Door Brill is aangetoond, dat ook de zes buigpunten door een kegelsnede ω worden verbonden (Math. Ann. XII, 106), welke Γ_4 nog in twee punten snijdt, die tot de kegelsnede τ_{123} behooren (Math. Ann. XIII, 182).

Uit het bovenstaande volgt nu, dat de complementaire punten op de drie merkwaardige kegelsneden ϱ_{123}, τ_{123} en ω gelegen zijn.

9. Er zijn blijkbaar vier kegelsneden Φ_2, die met hun geassocieerden samenvallen, dus elk de raakpunten van een dubbelraaklijn insnijden. Zij worden voorgesteld door

$$\left.\begin{aligned} \delta_0 &\equiv x_2\, x_3 \sqrt{a_{11}} + x_3\, x_1 \sqrt{a_{22}} + x_1\, x_2 \sqrt{a_{33}} = 0, \\ \delta_1 &\equiv -x_2\, x_3 \sqrt{a_{11}} + x_3\, x_1 \sqrt{a_{22}} + x_1\, x_2 \sqrt{a_{33}} = 0, \\ \delta_2 &\equiv x_2\, x_3 \sqrt{a_{11}} - x_3\, x_1 \sqrt{a_{22}} + x_1\, x_2 \sqrt{a_{33}} = 0, \\ \delta_3 &\equiv x_2\, x_3 \sqrt{a_{11}} + x_3\, x_1 \sqrt{a_{22}} - x_1\, x_2 \sqrt{a_{33}} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (49)$$

Door toepassing van (6) kunnen hieruit de vergelijkingen der

dubbelraaklijnen d_0, d_1, d_2, d_3 gemakkelijk worden gevonden. Natuurlijk kan men deze ook uit (26) afleiden.

Daar δ_0 en δ_3, δ_1 en δ_2 complementair zijn t. o. v. D_1 en D_2, zijn er twee identiteiten van den vorm

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_4 - \delta_0\,\delta_3 &\equiv 2\,x_1\,x_2\,\xi_{03}\,, \\ \Gamma_4 - \delta_1\,\delta_2 &\equiv 2\,x_1\,x_2\,\xi_{12}\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (50)$$

waaruit blijkt, dat D_1 en D_2 *met de raakpunten van d_0 en d_3 door een kegelsnede $\xi_{03} = 0$ en met de raakpunten van d_1 en d_2 door een kegelsnede $\xi_{12} = 0$ worden verbonden.*

Verder levert dan de identieke vergelijking

$$a_{33}\,\Gamma_4 - \xi_{03}\,\xi_{12} \equiv x_3^2\,\vartheta \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

het bewijs van de bekende eigenschap, dat de acht raakpunten der vier dubbelraaklijnen in een kegelsnede

$$\vartheta \equiv \Sigma\,A_{11}\,x_1^2 - 2\,\Sigma\,a_{13}\,a_{23}\,x_1\,x_2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

liggen.

Men ziet gemakkelijk in, dat de raakpunten van d_1 en d_2 met het knooppunt D_3 een kegelsnede bepalen, die tot vergelijking heeft

$$\eta_{12} \equiv d_1\,d_2 - (a_{12} + \sqrt{a_{11}\,a_{22}})\,\xi_{12} \equiv (a_{12} + \sqrt{a_{11}\,a_{22}})\,\varrho_3 -$$
$$- (A_{11}\,x_1^2 - 2\,A_{12}\,x_1\,x_2 + A_{22}\,x_2^2) = 0 \quad (53)$$

Uit den tweeden vorm van η_{12} volgt nu, dat zij ook de antitangentiaalpunten van D_3 bevat.

Op dezelfde wijs kan men aantoonen, dat D_3 door een kegelsnede wordt verbonden met zijn antitangentiaalpunten en de raakpunten van d_0 en d_3.

Daar de zes punten R in een kegelsnede ϱ_{123} liggen, terwijl $D_{03} \equiv (R_1\,R_{II}, R_2\,R_I)$, $D_{02} \equiv (R_3\,R_I, R_1\,R_{III})$ en $D_{01} \equiv (R_2\,R_{III}, R_3\,R_{II})$ is, heeft de ingeschreven zeshoek $R_1\,R_{II}\,R_3\,R_I\,R_2\,R_{III}$ de dubbelraaklijn d_0 tot rechte van PASCAL. Evenzoo blijkt, dat de overige drie dubbelraaklijnen PASCAL-rechten zijn voor drie andere uit punten R gevormde zeshoeken.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt een opstel aan van den Heer J. J. VAN LAAR, getiteld: „*Berekening der tweede correctie op de grootheid b der toestandsvergelijking van* VAN DER WAALS."

In een mededeeling, voorkomende in het Verslag van de Vergadering der Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie v. Wetenschappen van 29 October 1898 (verschenen 9 November 1898) heeft prof. V. D. WAALS er o. a. op gewezen hoe een tweede correctie op de grootheid b zijner toestandsvergelijking zou kunnen gevonden worden. Daar de daarbij voorkomende integratien uiterst langwijlig en omvangrijk bleken te wezen, zijn deze niet verder uitgevoerd geworden.

Ik heb toen getracht de bedoelde integratien tot een goed einde te brengen, en deel thans in kort overzicht de door mij gevonden resultaten mede, daarbij verwijzende naar een uitvoeriger verhandeling, binnen kort elders te publiceeren (in de Archives du Musée Teyler), wat betreft de verschillende mathematische ontwikkelingen, die tot mijne uitkomsten hebben geleid.

De te integreeren vorm luidde (zie blz. 164—165 van het geciteerd Verslag):

$$\iint \frac{N}{V} \cdot 2\pi (h + a \cos\theta)^2 \, dh \, d\theta \times \text{segmentdeel},$$

waarin het bedoelde segmentdeel is gevonden te zijn:

$$^1/_3\, a^2 \sin\varphi \cos\varphi \sqrt{R^2 - a^2} + {}^2/_3\, R^3\, Bg\, tg \left(tg\, \varphi \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \right) -$$

$$- a \sin\varphi \left(R^2 - {}^1/_3\, a^2 \sin^2\varphi\right) Bg\, tg \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{a \cos\varphi}.$$

Voeren wij nu eerst de integratie naar θ uit tusschen de grenzen 0 en θ_1, waarin θ_1 gegeven is door de omstandigheid dat het middelpunt C van den derden bol niet binnen de beide bollen A en B kan liggen (zie de figuur op bl. 164). Wij hebben dus te integreeren:

$$2 \int_0^{\theta_1} (h + a \cos\theta)^2 \, d\theta,$$

[1]) De door prof. V. D. WAALS met C aangeduide hoek AMG is hier φ genoemd, terwijl de met φ aangeduide hoek door mij δ is genoemd.

gevende na eenige herleiding:

$$2\left[(h^2 + {}^1/_2\, a^2)\,\theta_1 + (2\,a\,h\,\sin\theta_1 + {}^1/_2\, a^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1)\right].$$

Noemt men nu den hoek CMA, wanneer het punt C op het boloppervlak A ligt, $2\,\psi$, zoo is blijkbaar, daar $\theta_1 = 180 - \varphi - 2\,\psi$:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\theta_1 = \quad \sin(\varphi + 2\,\psi) = \quad \sin\varphi\cos 2\,\psi + \cos\varphi\sin 2\,\psi \\ \cos\theta_1 = -\cos(\varphi + 2\,\psi) = -\cos\varphi\cos 2\,\psi + \sin\varphi\sin 2\,\psi \end{array}\right\},$$

of daar

$$\sin\varphi = \frac{{}^1/_2\, r}{a} \qquad \cos\varphi = \frac{h}{a} \qquad tg\,\varphi = \frac{{}^1/_2\, r}{h}$$

$$\sin\psi = \frac{{}^1/_2\, R}{a} \qquad \sin 2\,\psi = \frac{R}{a^2}\sqrt{a^2 - {}^1/_4\, R^2} \qquad \cos 2\,\psi = \frac{1}{a^2}(a^2 - {}^1/_2\, R^2),$$

ook $$\sin\theta_1 = \frac{1}{a^3}\left[{}^1/_2\, r\,(a^2 - {}^1/_2\, R^2) + h\,R\sqrt{a^2 - {}^1/_4\, R^2}\right]$$

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{a_3}\left[-h\,(a^2 - {}^1/_2\, R^2) + {}^1/_2\, r\,R\sqrt{a^2 - {}^1/_4\, R^2}\right],$$

derhalve, met inachtneming der betrekking

$$h^2 = a^2 - {}^1/_4\, r^2,$$

na herleiding:

$$2ah\sin\theta_1 + {}^1/_2\, a^2 \sin\theta_1\cos\theta_1 = \frac{1}{2\,a^4}\left[{}^1/_2\, r\sqrt{a^2 - {}^1/_4\, r^2}\,(3\,a^4 - {}^1/_2\, R^4) + \right.$$

$$\left. + R\sqrt{a^2 - {}^1/_4\, R^2}\left(3\,a^4 + {}^1/_2\, a^2 (R^2 - r^2) - {}^1/_4\, R^2 r^2\right)\right] \quad . \quad . \quad (1)$$

$$(h^2 + {}^1/_2\, a^2)\,\theta_1 = ({}^3/_2\, a^2 - {}^1/_4\, r^2)\left[Bg\,tg\frac{-{}^1/_2\, r}{\sqrt{a^2 - {}^1/_4\, r^2}} - 2\,Bg\,tg\frac{{}^1/_2\, R}{\sqrt{a^2 - {}^1/_4\, R^2}}\right], (2)$$

daar $\theta_1 = (180 - \varphi) - 2\,\psi$ is.

De te integreeren vorm wordt nu:

$$4\pi\frac{N}{V}\int\left[(1) + (2)\right] \times \text{segmentdeel} \times dh.$$

Ter verdere vereenvoudiging stellen wij nu:

$$\tfrac{1}{2} r = n R \qquad a = y R,$$

zoodat

$$h = R \sqrt{y^2 - n^2}$$

$$dh = \tfrac{1}{2} R \frac{dy^2}{\sqrt{y^2 - n^2}}$$

wordt. De boven gegeven uitdrukking voor het segmentdeel gaat dan over in:

$$\tfrac{1}{3} R^3 \left[n \sqrt{(1 - y^2)(y^2 - n^2)} + 2\, Bg\, tg \left(n \sqrt{\frac{1 - y^2}{y^2 - n^2}} \right) - \right.$$
$$\left. - n (3 - n^2)\, Bg\, tg \sqrt{\frac{1 - y^2}{y^2 - n^2}} \right].$$

(1) wordt:

$$\tfrac{1}{2} R^3 \frac{1}{y^4} \left[n (3 y^4 - \tfrac{1}{2}) \sqrt{y^2 - n^2} + \left\{ 3 y^4 + \tfrac{1}{2} y^2 (1 - 4n^2) - n^2 \right\} \sqrt{y^2 - \tfrac{1}{4}} \right].$$

(2) wordt:

$$\tfrac{1}{2} R^2 (3 y^2 - 2 n^2) \left[Bg\, tg \frac{-n}{\sqrt{y^2 - n^2}} - 2\, Bg\, tg \frac{\tfrac{1}{2}}{\sqrt{y^2 - \tfrac{1}{4}}} \right],$$

zoodat onze integraal thans overgaat in (voor y^2 schrijven we overal x):

$$I = \tfrac{1}{3} \pi R^6 \frac{N}{V} \int (A + B + C + D)\, dx,$$

waarin $\left(\text{lettende op } dh = \tfrac{1}{2} R \frac{dx}{\sqrt{x - n^2}} \right)$:

$$A = n \sqrt{1 - x} \left[\frac{n (3 x^2 - \tfrac{1}{2})}{x^2} \sqrt{x - n^2} + \frac{3 x^2 + \tfrac{1}{2} x (1 - 4n^2) - n^2}{x^2} \sqrt{x - \tfrac{1}{4}} \right]$$

$$B = n (3 x - 2 n^2) \sqrt{1 - x} \left[Bg\, tg \frac{-n}{\sqrt{x - n^2}} - 2\, Bg\, tg \frac{\tfrac{1}{2}}{\sqrt{x - \tfrac{1}{4}}} \right]$$

$$C = \left[\frac{n (3 x^2 - \tfrac{1}{2})}{x^2} + \frac{3 x^2 + \tfrac{1}{2} x (1 - 4 n^2) - n^2}{x^2} \sqrt{\frac{x - \tfrac{1}{4}}{x - n^2}} \right] \times$$
$$\times \left[2\, Bg\, tg \left(n \sqrt{\frac{1 - x}{x - n^2}} \right) - n (3 - n^2)\, Bg\, tg \sqrt{\frac{1 - x}{x - n^2}} \right]$$

$$D = \frac{3x - 2n^2}{\sqrt{x - n^2}} \left[Bg\,tg \frac{-n}{\sqrt{x - n^2}} - 2\,Bg\,tg \frac{1/2}{\sqrt{x - 1/4}} \right] \times$$

$$\times \left[2\,Bg\,tg \left(n \sqrt{\frac{1 - x}{x - n^2}} \right) - n\,(3 - n^2)\,Bg\,tg \sqrt{\frac{1 - x}{x - n^2}} \right]$$

Bij de nu volgende integratien zullen we voorloopig niet op de grenzen voor h (of x) letten. Ter verkorting der schrijfwijze stel ik nog de volgende bekortingen voor:

$$\sqrt{\frac{1 - x}{x - n^2}} = z \qquad \sqrt{\frac{1 - x}{x - 1/4}} = z'$$

$$\sqrt{(1 - x)\,(x - n^2)} = p \qquad \sqrt{(1 - x)\,(x - 1/4)} = p'$$

Wij vinden dan gemakkelijk voor de vijf deelen der integraal $\int A\,dx$:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 3\,n^2 \int p\,dx = {}^3/_4\,n^2 \left[\Big(2x - (1 + n^2)\Big)\,p - (1 - n^2)^2\,Bg\,tg\,z \right] \\ A_2 &= -\,{}^1/_2\,n^2 \int \frac{p}{x^2}\,dx = {}^1/_2\,n^2 \left[\frac{p}{x} - 2\,Bg\,tg\,z + \frac{1 + n^2}{n}\,Bg\,tg\,nz \right] \end{aligned}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{aligned} A_3 &= 3\,n \int p'\,dx = {}^3/_4\,n \left[(2x - {}^5/_4)\,p' - {}^9/_{16}\,Bg\,tg\,z' \right] \\ A_4 &= {}^1/_2\,n\,(1 - 4n^2) \int \frac{p'}{x}\,dx = {}^1/_2\,n\,(1 - 4n^2) \left[p' - {}^5/_4\,Bg\,tg\,z' + Bg\,tg\,{}^1/_2 z' \right] \\ A_5 &= -\,n^3 \int \frac{p'}{x^2}\,dx = n^3 \left[\frac{p'}{x} - 2\,Bg\,tg\,z' + {}^5/_2\,Bg\,tg\,{}^1/_2\,z' \right] \end{aligned}\right\},\ (4)$$

zooals is te verifieeren met de betrekkingen

$$dp = -{}^1/_2\,\frac{2x - (1 + n^2)}{p}\,dx \qquad dp' = -\,{}^1/_2\,\frac{2x - {}^5/_4}{p'}\,dx$$

$$d\,Bg\,tg\,z = -\,{}^1/_2\,\frac{dx}{p} \qquad d\,Bg\,tg\,z' = -\,{}^1/_2\,\frac{dx}{p'}$$

$$d\,Bg\,tg\,nz = -\,\frac{n}{2}\,\frac{dx}{xp} \qquad d\,Bg\,tg\,{}^1/_2\,z' = -\,{}^1/_4\,\frac{dx}{xp'}$$

Verder wordt, daar

$$\int dx\,(3\,x-2\,n^2)\sqrt{1-x} = -\,2\left[(1-{}^2/_3\,n^2)\,(1-x)^{3/2}-{}^3/_5\,(1-x)^{5/2}\right]$$

$$d\,Bg\,tg\,\frac{-n}{\sqrt{x-n^2}} = \frac{n}{2}\,\frac{dx}{x\sqrt{x-n^2}} \qquad d\,Bg\,tg\,\frac{{}^1/_2}{\sqrt{x-{}^1/_4}} = -\,{}^1/_4\,\frac{dx}{x\sqrt{x-{}^1/_4}}\,,$$

voor de beide deelen van $\int Bdx$ gevonden:

$$\left.\begin{aligned}
B_1 = &-2\,n\left[(1-{}^2/_3\,n^2)\,(1-x)^{3/2}-{}^3/_5\,(1-x)^{5/2}\right]Bg\,tg\,\frac{-n}{\sqrt{x-n^2}} - \\
&-n^2\left[\left(\frac{3}{10}\,x-\frac{7}{20}-\frac{13}{60}\,n^2\right)p-\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\,n^2+\frac{13}{60}\,n^4\right)Bg\,tg\,z+\right. \\
&\left.\qquad+\frac{4}{n}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\,n^2\right)Bg\,tg\,nz\right] \\
B_2 = &\;4\,n\left[(1-{}^2/_3\,n^2)\,(1-x)^{3/2}-{}^3/_5\,(1-x)^{5/2}\right]Bg\,tg\,\frac{{}^1/_2}{\sqrt{x-{}^1/_4}} - \\
&-n\left[\left(\frac{3}{10}\,x-\frac{19}{80}-\frac{2}{3}\,n^2\right)p'-\left(\frac{271}{320}-\frac{11}{6}\,n^2\right)Bg\,tg\,z'+\right. \\
&\left.\qquad+8\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\,n^2\right)Bg\,tg\,{}^1/_2\,z'\right]
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

De integratie der vier deelen van $\int C\,dx$ is reeds moeilijker. Betrekkelijk eenvoudig zijn nog C_1 en C_2:

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= -\,n^2\,(3-n^2)\int\frac{3\,x^2-{}^1/_2}{x^2}\,Bg\,tg\,z\,.\,dx = \\
&= -\,n^2\,(3-n^2)\left[-{}^3/_2\,p+\left\{3x+\frac{1}{2x}-{}^3/_2\,(1+n^2)\right\}Bg\,tg\,z-\frac{1}{2n}\,Bg\,tg\,nz\right] \\
C_2 &= 2\,n\int\frac{3\,x^2-{}^1/_2}{x^2}\,Bg\,tg\,nz\,.\,dx = \\
&= 2\,n\left[\frac{p}{4\,n\,x}-3\,n\,Bg\,tg\,z+\left(3\,x+\frac{1}{2x}-\frac{1+n^2}{4\,n^2}\right)Bg\,tg\,nz\right]
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Om C_3 te integreeren vermeerderen wij deze integraal met

$$-n(3-n^2)\int\sqrt{\frac{x-{}^1/_4}{x-n^2}}\,Bg\,tg\,z\,.\,dx\;,$$

welke later van D_3 zal worden afgenomen. C_3 wordt dan:

$$C_3' - n(3-n^2)\int\frac{4x^2+{}^1/_2\,x(1-4n^2)-n^2}{x^2}\sqrt{\frac{x-{}^1/_4}{x-n^2}}\,Bg\,tg\,z\,.\,dx\;.$$

Maar nu is:

$$\frac{4x^2+{}^1/_2\,x(1-4n^2)-n^2}{x^2}\sqrt{\frac{x-{}^1/_4}{x-n^2}}\,dx = d\left[\frac{4(x-{}^1/_4)}{x}\sqrt{(x-{}^1/_4)(x-n^2)}\right],$$

zoodat gevonden wordt (de verschillende ontwikkelingen zullen — zooals gezegd — later elders worden gepubliceerd):

$$C_3' = -n(3-n^2)\left[\frac{4(x-{}^1/_4)}{x}\sqrt{(x-{}^1/_4)(x-n^2)}\,Bg\,tg\,z - \right.$$
$$\left. -2\left\{p' + {}^1/_4\,Bg\,tg\,z' + {}^1/_4\,Bg\,tg\,{}^1/_2\,z'\right\}\right]. \quad (7)$$

Eveneens wordt de integraal C_4 vermeerderd met

$$2\int\sqrt{\frac{x-{}^1/_4}{x-n^2}}\,Bg\,tg\,nz\,.\,dx\;,$$

welke terstond van D_4 zal worden afgetrokken. Voor

$$C_4' = 2\int\frac{4x^2+{}^1/_2\,x(1-4n^2)-n^2}{x^2}\sqrt{\frac{x-{}^1/_4}{x-n^2}}\,Bg\,tg\,nz\,.\,dx$$

vindt men dan op geheel dezelfde wijze als bij C_3':

$$C_4' = 2\left[\frac{4(x-{}^1/_4)}{x}\sqrt{(x-{}^1/_4)(x-n^2)}\,Bg\,tg\,nz + \right.$$
$$\left. +2n\left\{\frac{1}{4}\;\frac{p'}{x} - 2\,Bg\,tg\,z' + \frac{11}{8}\,Bg\,tg\,{}^1/_2\,z'\right\}\right]. \quad (8)$$

Daar $\int \frac{3x-2n^2}{\sqrt{x-n^2}}\,dx = 2x\sqrt{x-n^2}$, zal men na verschillende herleidingen voor de 4 deelen van $\int D\,dx$ achtereenvolgens vinden:

$$D_1 = -n(3-n^2)\int \frac{3x-2n^2}{\sqrt{x-n^2}}\, Bg\,tg \frac{-n}{\sqrt{x-n^2}}\, Bg\,tg\,z\,.\,dx =$$

$$= -n(3-n^2)\Big[2x\sqrt{x-n^2}\,Bg\,tg\frac{-n}{\sqrt{x-n^2}}\,Bg\,tg\,z -$$

$$-\tfrac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x}\,Bg\,tg\frac{-n}{\sqrt{x-n^2}} + \tfrac{5}{6}np - n(x-\tfrac{3}{2}-\tfrac{5}{6}n^2)Bg\,tg\,z - \tfrac{4}{3}Bg\,tg\,nz\Big] \quad (9)$$

Evenzoo:

$$D_2 = 2\int \frac{3x-2n^2}{\sqrt{x-n^2}}\, Bg\,tg\frac{-n}{\sqrt{x-n^2}}\, Bg\,tg\,nz\,.\,dx =$$

$$= 2\Big[2x\sqrt{x-n^2}\,Bg\,tg\frac{-n}{\sqrt{x-n^2}}\,Bg\,tg\,nz - 2n\sqrt{1-x}\,Bg\,tg\frac{-n}{\sqrt{x-n^2}} +$$

$$+ 3n^2\,Bg\,tg\,z - n(x+2)\,Bg\,tg\,nz\Big] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

De integraal D_3, nl.

$$D_3 = 2n(3-n^2)\int \frac{3x-2n^2}{\sqrt{x-n^2}}\, Bg\,tg\frac{1/2}{\sqrt{x-1/4}}\, Bg\,tg\,z\,.\,dx$$

laat zich eerst herleiden tot

$$D_3 = 2n(3-n^2)\Big[2x\sqrt{x-n^2}\,Bg\,tg\frac{1/2}{\sqrt{x-1/4}}\,Bg\,tg\,z +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int\sqrt{\frac{x-n^2}{x-1/4}}\,Bg\,tg\,z\,.\,dx + \int\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,Bg\,tg\frac{1/2}{\sqrt{x-1/4}}\,.\,dx\,.$$

Maar daar $\int\sqrt{\frac{x-n^2}{x-1/4}}\,Bg\,tg\,z\,.\,dx$ zich laat vervormen tot

$$-\int\sqrt{\frac{x-1/4}{x-n^2}}\,Bg\,tg\,z\,.\,dx + 2\sqrt{(x-1/4)(x-n^2)}\,Bg\,tg\,z - p' - \tfrac{3}{4}\,Bg\,tg\,z',$$

nemen wij van D_3 af het stuk $2\,n(3-n^2) \times -\frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{x-\frac{1}{4}}{x-n^2}}\,Bg\,tg\,z\,.\,dx$, welk stuk, zooals wij boven zagen, reeds bij C_3 werd gevoegd. Na verschillende langwijlige herleidingen vinden wij dan eindelijk:

$$D_3' = 2n\,(3-n^2)\Big[2\,x\sqrt{x-n^2}\,Bg\,tg\,\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x-\frac{1}{4}}}\,Bg\,tg\,z\,-$$

$$-\,\tfrac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x}\,Bg\,tg\,\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x-\frac{1}{4}}} + \sqrt{(x-\tfrac{1}{4})(x-n^2)}\,Bg\,tg\,z\,-$$

$$-\,\frac{2}{3}\,p' - \frac{11}{12}\,Bg\,tg\,z' + \frac{4}{3}\,Bg\,tg\,\tfrac{1}{2}\,z'\Big] \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

En op gelijke wijze wordt voor

$$D_4 = -\,4\int \frac{3\,x-2\,n^2}{\sqrt{x-n^2}}\,Bg\,tg\,\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x-\frac{1}{4}}}\,Bg\,tg\,nz\,.\,dx,$$

na omwerking van de ontstane integraal $\frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{x-n^2}{x-\frac{1}{4}}}\,Bg\,tg\,nz\,.\,dx$ tot

$$\tfrac{1}{2}\Big[-\int \sqrt{\frac{x-\frac{1}{4}}{x-n^2}}\,Bg\,tg\,nz\,.\,dx + 2\,\sqrt{(x-\tfrac{1}{4})(x-n^2)}\,Bg\,tg\,nz\,-$$

$$-\,2\,n\,Bg\,tg\,z' + n\,Bg\,tg\,\tfrac{1}{2}\,z'\Big],$$

en aftrekking der reeds bij C_4 gevoegde integraal

$$2\int \sqrt{\frac{x-\frac{1}{4}}{x-n^2}}\,Bg\,tg\,nz\,.\,dx\,,$$

gevonden:

$$D_4' = -\,4\,\Big[2\,x\sqrt{x-n^2}\,Bg\,tg\,\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x-\frac{1}{4}}}\,Bg\,tg\,nz - 2n\,\sqrt{1-x}\,Bg\,tg\,\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x-\frac{1}{4}}} +$$

$$+\sqrt{(x-\tfrac{1}{4})(x-n^2)}\,Bg\,tg\,nz - 2\,n\,Bg\,tg\,z' + \tfrac{5}{2}\,n\,Bg\,tg\,\tfrac{1}{2}\,z'\Big]. (12)$$

Voegt men nu alle gelijksoortige termen bijeen, zoo zal men voor

$$-\int (A + B + C + D)\,dx$$

het volgende vinden:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1+n^2}{2x} + \tfrac{6}{5} n^2 x + \tfrac{2}{5} n^2 (4-3n^2)\right]\sqrt{(1-x)(x-n^2)} + \\
&\quad + \left[\frac{n(1+n^2)}{x} + \tfrac{6}{5} n x + \tfrac{1}{5} n (9-10n^2)\right]\sqrt{(1-x)(x-\tfrac{1}{4})} + \\
&+ \left[-n^2(3-n^2)\left(2x+\frac{1}{2x}\right) - n^2(1-2n^2+\tfrac{6}{5} n^4) + \right. \\
&\quad \left. + n(3-n^2)\left(\frac{1}{x}-2\right)\sqrt{(x-\tfrac{1}{4})(x-n^2)}\right] Bg\,tg\sqrt{\frac{1-x}{x-n^2}} + \\
&+ \left[2n\left(2x+\frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{n}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{7}{10}n^2) - \right. \\
&\quad \left. - 2\left(\frac{1}{x}-2\right)\sqrt{(x-\tfrac{1}{4})(x-n^2)}\right] Bg\,tg\left(n\sqrt{\frac{1-x}{x-n^2}}\right) - \\
&- \frac{21}{5} n\, Bg\,tg\sqrt{\frac{1-x}{x-\tfrac{1}{4}}} + \frac{39}{10} n\, Bg\,tg\,\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x-\tfrac{1}{4}}} + \\
&+ 2n\sqrt{1-x}\left(-\tfrac{2}{5}+(\tfrac{4}{5}-n^2)x+\tfrac{3}{5}x^2\right)\left(Bg\,tg\frac{-n}{\sqrt{x-n^2}} - 2Bg\,tg\frac{\tfrac{1}{2}}{\sqrt{x-\tfrac{1}{4}}}\right) \\
&+ 2x\sqrt{x-n^2}\left(Bg\,tg\frac{-n}{\sqrt{x-n^2}} - 2\,Bg\,tg\frac{\tfrac{1}{2}}{\sqrt{x-\tfrac{1}{4}}}\right) \times \\
&\quad \times \left[2\,Bg\,tg\left(n\sqrt{\frac{1-x}{x-n^2}}\right) - n(3-n^2)\,Bg\,tg\sqrt{\frac{1-x}{x-n^2}}\right]
\end{aligned} \qquad (13)$$

Voeren wij thans de grenzen voor h in. Deze zijn (zie de verhandeling van Prof. v. d. WAALS) voor waarden van r liggende tusschen R en $R\sqrt{3}$:

$$\frac{R^2-\frac{1}{2}r^2}{2\sqrt{R^2-\frac{1}{4}r^2}} \quad \text{en} \quad \sqrt{R^2-\tfrac{1}{4}r^2}\,,$$

terwijl ze voor waarden van r tusschen $R\sqrt{3}$ en $2R$ zijn:

$$-\sqrt{R^2-\tfrac{1}{4}} \quad \text{en} \quad \sqrt{R^2-\tfrac{1}{4}r^2}\,.$$

Dit wordt dus met onze notaties ($h = R\sqrt{x-n^2}$):

Voor $n = {}^1/_2$ tot ${}^1/_2 \sqrt{3}$:

$$\sqrt{x-n^2} \text{ van } \frac{1-2n^2}{2\sqrt{1-n^2}} \text{ tot } \sqrt{1-n^2} \left(x \text{ van } \frac{1}{4(1-n^2)} \text{ tot } 1 \right);$$

Voor $n = {}^1/_2 \sqrt{3}$ tot 1:

$$\sqrt{x-n^2} \text{ van } -\sqrt{1-n^2} \text{ tot } \sqrt{1-n^2} \; (x \text{ van } 1 \text{ tot } 1).$$

Substitutie dezer grenzen in (13) geeft, met inachtneming der omstandigheid, dat overal waar in *Bg tg* voorkomt $\sqrt{x-n^2}$, deze voor $\sqrt{x-n^2} = -\sqrt{1-n^2}$ in π overgaat, wanneer in den teller $\sqrt{1-x}$ (hetgeen 0 wordt) voorkomt:

$$\left.\begin{aligned}
I_a (n = {}^1/_2 \text{ tot } {}^1/_2 \sqrt{3}) &= -({}^1/_3 + {}^3/_2 n^2 - {}^3/_5 n^4)\sqrt{3-4n^2} + \\
&+ n^2(7-4n^2+{}^6/_5 n^4)\, Bg\, tg \frac{\sqrt{3-4n^2}}{1-2n^2} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{47}{10} n^2\right) Bg\, tg \frac{n\sqrt{3-4n^2}}{1-2n^2} + \\
&+ \frac{21}{5} n\, Bg\, tg \frac{\sqrt{3-4n^2}}{n} - \frac{39}{10} n\, Bg\, tg \frac{\sqrt{3-4n^2}}{2n} \\
I_b (n = {}^1/_2 \sqrt{3} \text{ tot } 1) &= \pi \left[\frac{1}{2n} - \frac{57}{10} n + \frac{17}{2} n^2 - \frac{9}{2} n^4 + \frac{6}{5} n^6\right] + \\
&+ {}^1/_2 \pi \sqrt{3}\,(2-3n+n^3)\sqrt{1-n^2} + \\
&+ 2\pi (2-3n+n^3)\sqrt{1-n^2} \left(Bg\, tg \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} - {}^1/_3 \pi \right)
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Hierbij is ook gebruik gemaakt van de omstandigheid dat

$$Bg\, tg \frac{-n}{\sqrt{x-n^2}} - 2\, Bg\, tg \frac{{}^1/_2}{\sqrt{x-{}^1/_4}}$$

voor $x = \dfrac{1}{4(1-n^2)}$ $\left(\text{dus } \sqrt{x-n^2} = \dfrac{1-2n^2}{2\sqrt{1-n^2}} \right)$ verdwijnt.

De gevonden uitdrukkingen voor I_a en I_b zijn door mij op allerlei wijzen geverifieerd en telkens juist bevonden. Ze zijn beide nog te vermenigvuldigen met ${}^1/_3 \pi R^6 \dfrac{N}{V}$. Voor wij nu overgaan tot de tweede integratie, naar n, moet eerst een *aanvullingsterm* berekend worden voor de gevallen (in de geciteerde Verhandeling niet ver-

meld) dat het punt M buiten het segment komt te vallen en er een *geheel* segment wordt ingesloten door een derden bol. Het is gemakkelijk in te zien dat de bedoelde aanvullingsterm verkregen wordt uit

$$I'_b = 2 \int\int \frac{N}{V}\, 2\,\pi\,(h + a \cos\theta)^2\, dh\, d\theta \times \text{segment},$$

hetgeen na eenige herleidingen oplevert, daar

$$\text{Segment} = {}^1/_3\, \pi\, (2\, R^3 - {}^3/_2\, R^2 r + {}^1/_8\, r^3) = {}^1/_3\, \pi\, R^3\, (2 - 3\, n + n^3):$$

$$I'_b = {}^1/_3\, \pi^2\, R^6\, \frac{N}{V}\, (2 - 3\, n + n^3) \int \left[\frac{n\,(3\, x^2 - {}^1/_2)}{x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3x^2 + {}^1/_2 x(1 - 4n^2) - n^2}{x^2} \sqrt{\frac{x - {}^1/_4}{x - n^2}} + \frac{3x - 2n^2}{\sqrt{x - n^2}} \left(Bg\, tg \frac{-n}{\sqrt{x - n^2}} - 2\, Bg\, tg \frac{{}^1/_2}{\sqrt{x - {}^1/_4}}\right)\right] dx.$$

Wij deelen van deze integraal alleen het resultaat mede, genomen tusschen de grenzen $\sqrt{x - n^2} = \dfrac{1 - 2\, n^2}{2\sqrt{1 - n^2}}$ tot

$$\sqrt{x - n^2} = -\sqrt{1 - n^2} \quad \left(\text{dus } x \text{ van } \frac{1}{4\,(1 - n^2)} \text{ tot } 1\right).$$

Klaarblijkelijk heeft deze integraal alleen op het tweede tempo ($n = {}^1/_2 \sqrt{3}$ tot 1) betrekking.

Men vindt:

$$I'_b = {}^1/_3\, \pi^2\, R^6\, \frac{N}{V}\, (2 - 3\, n + n^3) \left[{}^1/_2\, n - {}^1/_2 \sqrt{3\,(1 - n^2)} - \right.$$

$$\left. - 2 \sqrt{1 - n^2} \left(Bg\, tg \frac{n}{\sqrt{1 - n^2}} - {}^1/_3\, \pi\right)\right], \quad . \quad . \quad (15)$$

waardoor merkwaardiger wijze de boven berekende waarde van I_b belangrijk eenvoudiger wordt, en overgaat in (met weglating van den factor ${}^1/_3\, \pi\, R^6\, \dfrac{N}{V}$):

$$I_b + I''_b = \pi \left[\frac{1}{2n} - \frac{47}{10}\, n + 7\, n^3 - 4\, n^4 + \frac{6}{5}\, n^6\right] \quad . \quad . \quad (16)$$

Vermenigvuldigen wij nu met

$$4\pi r^2 dr \times \frac{N}{V} = 32\pi R^3 \frac{N}{V} \times n^2 dn,$$

zoo hebben wij nu nog te integreeren:

$$I = \frac{32}{3}\pi^2 R^9 \frac{N^2}{V^2}\left[\int_{1/2}^{1/2\sqrt{3}} I_a n^2 dn + \int_{1/2\sqrt{3}}^{1} (I_b + I''_b) n^2 dn\right]$$

Deze integratie splitsen wij weer in deelen.

$$I_1 = \int_{1/2}^{1/2\sqrt{3}} (-\,{}^1/_2\, n^2 - {}^3/_2\, n^4 + {}^3/_5\, n^6) \sqrt{3 - 4n^2}\, dn$$

levert:

$$I_1 = \left[\left(\frac{735}{8192} n - \frac{89}{1024} n^3 - \frac{83}{320} n^5 + \frac{3}{40} n^7\right)\sqrt{3 - 4n^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2205}{16384} Bg\, tg \frac{\sqrt{3 - 4n^2}}{2n}\right]_{1/2}^{1/2\sqrt{3}},$$

zooals met de betrekkingen

$$d\sqrt{3 - 4n^2} = \frac{-4n\, dn}{\sqrt{3 - 4n^2}} \qquad d\, Bg\, tg \frac{\sqrt{3 - 4n^2}}{2n} = \frac{-2\, dn}{\sqrt{3 - 4n^2}}$$

is te verifieeren. Invoering der grenzen geeft dan verder:

$$I_1 = -\frac{2169}{5 \times 16384}\sqrt{2} - \frac{2205}{16384} Bg\, tg \sqrt{2} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

In de tweede plaats (zie (14) en (16)):

$$I_2 = \int_{1/2}^{1/2\sqrt{3}} (7n^4 - 4n^6 + {}^6/_5\, n^8)\, Bg\, tg \frac{\sqrt{3 - 4n^2}}{1 - 2n^2} \,.\, dn + \int_{1/2\sqrt{3}}^{1} (7n^4 - 4n^6 + {}^6/_5\, n^8)\pi \,.$$

Daar $Bg\,tg\,\frac{\sqrt{3-4n^2}}{1-2n^2}$ voor $n = {}^1/_2\sqrt{3}$ de waarde π aanneemt, zoo vindt men met

$$d\,Bg\,tg\,\frac{\sqrt{3-4n^2}}{1-2n^2} = \frac{2n}{1-n^2}\,\frac{dn}{\sqrt{3-4n^2}},$$

en met inachtneming der betrekking $Bg\,tg\,2\sqrt{2} = \pi - 2\,Bg\,tg\,\sqrt{2}$:

$$I_2 = \left(\frac{5719}{15.256} - \frac{127}{7.32}\right)\pi + \left(\frac{169}{15.128} - \frac{1}{7.16}\right) Bg\,tg\,\sqrt{2} -$$

$$- \int_{{}^1/_2}^{{}^1/_2\sqrt{3}} \frac{{}^{14}/_5\,n^6 - {}^8/_7\,n^8 + {}^4/_{15}\,n^{10}}{(1-n^2)\sqrt{3-4n^2}}\,dn \quad . \; . \quad (18)$$

In de derde plaats:

$$I_3 = \int_{{}^1/_2}^{{}^1/_2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}n - \frac{47}{10}n^3\right) Bg\,tg\,\frac{n\sqrt{3-4n^2}}{1-2n^2}\,.\,dn + \int_{{}^1/_2\sqrt{3}}^{1} \left(\frac{1}{2}n - \frac{47}{10}n^3\right)\pi\,dn\,.$$

Met $d\,Bg\,tg\,\frac{n\sqrt{3-4n^2}}{1-2n^2} = \frac{3-2n^2}{1-n^2}\,\frac{dn}{\sqrt{3-4n^2}}$ vindt men gemakkelijk:

$$I_3 = -\frac{37}{40}\pi + \frac{7}{640}\,Bg\,tg\,\sqrt{2} - \int_{{}^1/_2}^{{}^1/_2\sqrt{3}} \frac{\frac{3}{4}n^2 - \frac{161}{40}n^4 + \frac{47}{20}n^6}{(1-n^2)\sqrt{3-4n^2})}\,dn \quad . \quad (19)$$

Voor

$$I_4 = \int_{{}^1/_2}^{{}^1/_2\sqrt{3}} \left[\frac{21}{5}n^3\,Bg\,tg\,\frac{\sqrt{3-4n^2}}{n} - \frac{39}{10}n^3\,Bg\,tg\,\frac{\sqrt{3-4n^2}}{2n}\right] dn$$

vindt men met

$$d\,Bg\,tg\,\frac{\sqrt{3-4n^2}}{n} = \frac{-dn}{(1-n^2)\sqrt{3-4n^2}} \qquad d\,Bg\,tg\,\frac{\sqrt{3-4n^2}}{2n} = \frac{-2\,dn}{\sqrt{3-4n^2}}:$$

$$I_4 = \left(-\frac{21}{320}\pi + \frac{21}{160} Bg\,tg\,\sqrt{2}\right) + \frac{39}{640} Bg\,tg\,\sqrt{2} +$$

$$+ \int_{1/2}^{1/2\sqrt{3}} \frac{\frac{21}{20} n^4 - \frac{39}{20} n^4 (1 - n^2)}{(1 - n^2)\sqrt{3 - 4n^2}} dn,$$

waarbij wederom bij het eerste stuk gebruik is gemaakt van de betrekking $Bg\,tg\,2\sqrt{2} = \pi - 2\,Bg\,tg\,\sqrt{2}$.

Voegen wij nu de verkregen termen bijeen, zoo ontstaat, buiten den voorfactor:

$$\left.\begin{aligned} I = -\frac{2169}{5.16384}\sqrt{2} + \left(\frac{383}{3.256} - \frac{127}{7.32}\right)\pi + \\ + \left(-\frac{2205}{16384} + \frac{559}{15.128} - \frac{1}{7.16}\right) Bg\,tg\,\sqrt{2} + \\ + \int_{1/2}^{1/2\sqrt{3}} \frac{-\,{}^3/_4\, n^2 + {}^{25}/_8\, n^4 - {}^{16}/_5\, n^6 + {}^8/_7\, n^8 - {}^4/_{15}\, n^{10}}{(1 - n^2)\sqrt{3 - 4n^2}} dn \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Voor de integratie dezer laatste integraal verwijzen wij opnieuw naar de uitvoeriger verhandeling en volstaan met de uitkomst voor I mede te deelen. Alleen maak ik er op opmerkzaam, dat nadat achtereenvolgens zijn bepaald:

$$\int \frac{n^2\,dn}{\sqrt{3 - 4n^2}} \text{ tot } \int \frac{n^8}{\sqrt{3 - 4n^2}},$$

benevens

$$\int \frac{n^2\,dn}{(1 - n^2\sqrt{3 - 4n^2}} = \pi - {}^5/_2\, Bg\,tg\,\sqrt{2},$$

alle bovenstaande integralen worden gevonden door splitsing. Zoo is b.v.:

$$\int \frac{n^4\,dn}{(1 - n^2)\sqrt{3 - 4n^2}} = \int \frac{n^2\,dn}{(1 - n^2)\sqrt{3 - 4n^2}} - \int \frac{n^2\,dn}{\sqrt{3 - 4n^2}},$$

enz. De uitkomst wordt dan, na vermenigvuldiging met den voorfactor, en met N voor alle N bollen:

$$\frac{32}{3}\pi^2 R^9 \frac{N^3}{V^2}\left[\frac{73}{7.45.64}\sqrt{2} - \frac{153}{7.5.256}\pi + \frac{153}{7.5.64} Bg\,tg\,\sqrt{2}\right] \quad . (21)$$

Noemen wij de uitdrukking tusschen haakjes voor een oogenblik ω, zoo kan dit geschreven worden :

$$\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^3 \frac{N^2}{V^2} \times \frac{9}{2}\frac{\omega}{\pi}$$

Voor het dubbele volume der N afstandssferen blijft dus, na inachtneming der 1e en 2e correctie :

$$N \cdot {}^4/_3\, \pi R^3 - ({}^1/_3\, \pi R^3)^2 \frac{17}{64}\frac{N^2}{V} + ({}^1/_3\, \pi R^3)^3 \cdot \frac{9}{2}\frac{\omega}{\pi}\frac{N^3}{V^2} =$$

$$= 8\,b \left[1 - \frac{17}{64}\frac{8\,b}{V} + \frac{9}{2}\frac{\omega}{\pi}\frac{64\,b^2}{V^2}\right] ,$$

daar $N \cdot {}^4/_3\, \pi R^3 = 8\,b$ is. Is nu $4\,b = b_\infty$, zoo wordt in

$$2\,b_\infty \left[1 - \frac{17}{32}\frac{b_\infty}{V} + 18\frac{\omega}{\pi}\left(\frac{b_\infty}{V}\right)^2\right]$$

de gezochte 2e correctie klaarblijkelijk $= 18\,\dfrac{\omega}{\pi}$, derhalve :

$$\beta = \frac{9}{35.32\,\pi}\left[\frac{73}{9}\sqrt{2} + 153\left(Bg\,tg\,\sqrt{2} - {}^1/_4\,\pi\right)\right],$$

of

$$\beta = \frac{1}{1120\,\pi}\left[73\sqrt{2} + 81.17\left(Bg\,tg\,\sqrt{2} - {}^1/_4\,\pi\right)\right] , \quad (22)$$

zijnde ons definitieve resultaat. De waarde hiervan is in 4 decimalen nauwkeurig :

$$\underline{\beta = 0.0958,}$$

alzoo bijna $^1/_{10}$, terwijl de 1e correctie α ruim $^1/_2$ was.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt voor de Werken der Akademie een verhandeling aan van den Heer S. L. VAN OSS te Zalt-Bommel, getiteld: *Das regelmässige Sechshundertzell und seine selbstdeckenden Bewegungen.*"

Deze wordt in handen gesteld van de Heeren SCHOUTE en KORTEWEG om daarover in de Februari-vergadering verslag uit te brengen.

Histologie. — De Heer WINKLER biedt voor de Werken der Akademie een verhandeling aan van den Heer G. C. VAN WALSEM, geneesheer te Meerenberg, getiteld: „*Proeve eener systematische methodiek van het normaal en pathologisch mikroskopisch-anatomisch en anthropologisch onderzoek van het centrale zenuwstelsel.*

Deze wordt in handen gesteld van de Heeren PEKELHARING en BEIJERINCK om daarover in de Februari-vergadering verslag uit te brengen.

Voor de Boekerij worden aangeboden: 1°. door den Heer MARTIN „Notiz ueber den Lias von Borneo" en namens den Heer P. G. KRAUSE 2 brochures: *a.* „Obsidianbomben aus Niederländisch-Indien"; *b.* „Verzeichniss einer Sammlung von Mineralien und Gesteinen aus Bunguran (Gross-Natuna) und Sededap im Natuna-Archipel"; 2°. door den Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN „Verslag van den Staat der Sterrenwacht te Leiden in het tijdvak van 15 September 1896 tot 19 September 1898."

Na resumtie van het behandelde wordt de vergadering gesloten.

(8 Februari 1899.)

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 25 Februari 1899.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren HOEK en P. ZEEMAN dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen;

2°. Brief van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid dd. 22 Februari 1899, berichtende dat bij Koninklijk Besluit van 18 Februari jl. voor het loopende jaar een subsidie van *f* 500.— is toegestaan voor het houden van aanteekeningen van geologischen aard bij grondboringen en doorsnijdingen van den bodem van Nederland.

3°. Bericht van het overlijden van den Heer PAUL JÉRÉMÉIEW, Directeur van de Société impériale minéralogique te St. Petersburg. Dit bericht zal met een brief van rouwbeklag beantwoord worden.

De Voorzitter deelt mede:

1°. dat de Heer BOSSCHA, wegens drukke bezigheden, zich verontschuldigd heeft zitting te nemen in de Commissie, welke de papieren van VAN SWINDEN, in het bezit der Akademie, zal onderzoeken en inventariseeren. De Heer P. ZEEMAN wordt door den Voorzitter alsnu daarvoor aangewezen [1];

2°. dat de Heer BEIJERINCK, na kennisneming van de verhandeling van Dr. G. A. VAN WALSEM, zich onbevoegd verklaard heeft om deze verhandeling te beoordeelen, en dat de Heer WINKLER, daartoe uitgenoodigd, zich bereid heeft verklaard in zijne plaats op te treden.

Verder vraagt de Voorzitter, wie der Leden de Akademie wil vertegenwoordigen bij het feest 1 en 2 Juni a. s. ter eere van Prof. STOKES te Cambridge te houden. In het bijzonder vraagt hij dit aan de Heeren LORENTZ en SCHOUTE, die zich verontschuldigen moeten, en aan den Heer VAN DER WAALS, die zich gaarne bereid verklaart de Akademie te vertegenwoordigen in het nog niet zekere geval, dat hij aan de uitnoodiging van den Senaat der Universiteit te Cambridge zal gevolg kunnen geven.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE brengt ook namens den Heer KORTEWEG, het volgende verslag uit over de verhandeling van Dr. S. L. VAN OSS: „*Das regelmässige Sechshundertzell und seine selbstdeckenden Bewegungen*".

De verhandeling van Dr. S. L. VAN OSS, over welke wij thans verslag uitbrengen, is een vervolg op de door hem in 1894 voor de philosophische faculteit te Giessen verdedigde dissertatie: „Die Be-

[1]) De Heer ZEEMAN, niet ter vergadering tegenwoordig, heeft later bericht gegeven, dat hij de benoeming aanvaardt.

wegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von vier Dimensionen" (Utrecht, P. DEN BOER). Terwijl daar de aan zich zelf tegengestelde 5- en 24-cellen en de aan elkaar tegengestelde 8- en 16-cellen eenigszins uitvoerig behandeld zijn, is alles wat van het overeenkomstige bij de aan elkaar tegengestelde 120- en 600-cellen verklaring geven kan wegens de samengesteldheid der daartoe noodige figuren achterwege gelaten en alleen het hoofdresultaat van de 7200 draaiingen, die met beide cellen in verband staan, vermeld. Deze leemte nu wordt in de nieuwe aan ons oordeel onderworpen verhandeling aangevuld. Wijl het den schrijver ook hier in hoofdzaak om de groep der anallagmatische bewegingen te doen is, stelt hij van de beide cellen, die daartoe even goed kunnen dienen, de meer eenvoudige 600-cel met zijn 120 hoekpunten op den voorgrond en wijdt hij alleen aan de uit een teekenaars oogpunt meer samengestelde 120-cel met zijn 600 hoekpunten ten slotte een tweetal platen.

Deze nieuwe verhandeling is verdeeld in twee hoofdstukken. In het eerste wordt de 600-cel óp zichzelf beschouwd, in het tweede worden zijn anallagmatische bewegingen besproken.

Na te hebben aangewezen hoe het samenstel van projectie-assen en vlakken, dat in de beschrijvende meetkunde der vierdimensionale ruimte gebruikt wordt, op een vlak kan worden neergeslagen, worden de reeds in 1887 door Dr. A. PUCHTA gegeven coördinaten van de 120 hoekpunten der 600-cel in teekening gebracht. Daardoor komt dan de reeds door den eersten ondergeteekende aangegeven regelmatige ligging dier hoekpunten om een diagonaal heen opnieuw aan het licht. Vervolgens wordt deze regelmatige ligging ook bij de 720 ribben en de 600 begrenzende tetraeders vervolgd, wat ons aanleiding geeft te vragen, waarom de 1200 begrenzende zijvlakken van dit onderzoek uitgesloten zijn. Uit de verkregen resultaten worden dan enkele liggingsverhoudingen van onderdeelen met betrekking tot elkaar afgeleid. Daarna wordt een middel aan de hand gedaan om van de 600-cel een volgens de regelen der stereographische projectie op onze ruimte geprojecteerde afbeelding te ontwerpen.

Zooals men weet heeft F. KLEIN in zijn „Vorlesungen über das Ikosaeder" duidelijk laten uitkomen welk kostbaar materiaal de aan de regelmatige lichamen der gewone ruimte verbonden anallagmatische bewegingen voor het goed begrip der groepentheorie oplevert. Een daarbij optredende wet dat het aantal bewerkingen der bij die bewegingen voorkomende groepen steeds het dubbel is van het aantal ribben van het betrokken lichaam is door den eersten ondergeteekende stelkundig, door den tweeden meetkundig aangetoond en daarna door den eersten (zie „Report of the British Association", Oxford, 1894)

op de ruimte met n afmetingen uitgebreid. Volgens deze wet moet de 600-cel een groep van 7200 anallagmatische bewegingen toelaten. Deze worden dan ook in het tweede hoofdstuk door den schrijver voor den dag gebracht. Daarin wordt eerst gewezen op het gewichtig onderscheid tusschen een enkelvoudige draaiing om één vlak en een dubbeldraaiing om twee onderling loodrechte vlakken, waarbij dan het geval van de gelijkbeenige dubbeldraaiing bijzonder merkwaardig is. Denkt men zich nu de cel geprojecteerd op twee onderling loodrechte vlakken α en β, die alleen het middelpunt der cel met elkaar gemeen hebben, dan zal een enkelvoudige draaiing om α de projectie op α onveranderd laten en de projectie op β om het middelpunt doen draaien, terwijl een dubbeldraaiing om α en β beide projecties om het middelpunt beweegt. Is de projectie op α een figuur met radiaire symmetrie, die bij draaiing over een zeker deel van π in zichzelf overgaat, dan beantwoordt een draaiing om β over dit bepaalde deel van π, welke beweging anallagmatisch is, in dien zin aan de bepaalde projectie (α, β), dat deze beweging onmiddellijk uit de projectie is af te lezen. Met behulp van deze eenvoudige beschouwing zijn de anallagmatische bewegingen opgespoord. En hierdoor is dit onderzoek in de ruimte met vier dimensies eigenlijk gemakkelijker dan in de gewone ruimte. Immers, als een kubus zich op een vlak loodrecht op een inwendige diagonaal als een regelmatige zeshoek projecteert, mag hieruit niet worden afgeleid dat een draaiing om die diagonaal over 60° dit lichaam met zich zelf tot bedekking brengt, want dit geschiedt eerst na een draaiing om 120°; anders gezegd de draaiing van een kubus om een diagonaal heeft niet de periode 6 maar de periode 3. Welnu, zulke complicaties komen in de vierdimensionale ruimte niet voor.

Is opsporen van anallagmatische bewegingen dus hier opsporen van regelmatige projecties, dan blijft de vraag hoe deze zijn opgespoord. Hier omtrent mogen volgende aanwijzingen voldoende zijn. Eerst worden uit elkaar afgeleid drie paar projecties op twee loodrechte vlakken α, β. Van deze heeft het eerste paar twee paar gelijkwaardige loodrechte assen, het tweede paar twee drietallen gelijkwaardige assen, het derde paar twee vijftallen gelijkwaardige assen; daarom hebben de uit het eerste paar afgeleide bewegingen de periode 2 of 4, die uit het tweede paar de periode 3 of 6, die uit het derde paar de periode 5 of 10. Wijl deze bewegingen het geheele stelsel nog niet uitputten, blijken er nog meer regelmatige projecties te zijn en wel in de gedaante van 12-, 20- en 30-hoeken, die dan ook werkelijk worden geteekend. Deze figuren hebben een schoonen, belangwekkenden vorm; zoo liggen bij de eerste de 120 hoekpunten in zeven concentrische

cirkels, enz. Werkelijk leiden zij tot de nog ontbrekende anallagmatische bewegingen, die ten slotte, naar hun periode gerangschikt, worden opgesomd.

We wijzen er op, dat het eerste paar projecties nog tot de eigenaardige stelling voert dat de hoekpunten der 600-cel vijfmaal genomen het materiaal leveren voor de hoekpunten van vijf-en-twintig 24-cellen; deze mag vergeleken worden met de bekende uitkomst, dat de middens der ribben van een regelmatig twaalf- of twintigvlak de hoekpunten zijn van 5 regelmatige achtvlakken.

Wij zijn van oordeel, dat de studie van Dr. VAN OSS de literatuur over het door hem beschouwde onderwerp op de gewenschte wijze aanvult en stellen U voor ze met de keurige er aan toegevoegde teekeningen in de Verhandelingen der Akademie te doen opnemen.

Groningen / *Amsterdam* } Februari 1899.

P. H. SCHOUTE.
D. J. KORTEWEG.

De conclusie van het verslag om de verhandeling op te nemen in de werken der Akademie wordt goedgekeurd.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES spreekt „*Over de orthoptische cirkels, welke bij lineaire stelsels van kegelsneden behooren.*"

1. De meetkundige plaats der punten, waaruit men onderling loodrechte raaklijnen kan trekken naar de kegelsnede

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=C,$$

is de cirkel, die voorgesteld wordt door

$$x^2+y^2=(A+B)\,C.$$

Deze *orthoptische* cirkel (cirkel van MONGE) is bestaanbaar voor de ellipsen en de hyperbolen, welke binnen de scherpe hoeken hunner asymptoten liggen; onbestaanbaar, als de hyperbool binnen de stompe asymptotenhoeken gelegen is; hij ontaardt in een punt voor de rechthoekige hyperbool ($A+B=0$) en voor het stelsel van twee rechten ($C=0$). Bij de parabool wordt hij vertegenwoordigd door de richtlijn.

Daar de orthoptische cirkel concentrisch is met de kegelsnede, waartoe hij behoort, liggen de middelpunten der orthoptische cirkels

ω van een kegelsnedenbundel in de kegelsnede γ, welke de middelpunten van den bundel bevat.

Wanneer men nu, op het voetspoor van FIEDLER, elken cirkel vertegenwoordigt door de toppen der beide rechthoekige omwentelingskegels, waarvan hij de grondcirkel is, dan wordt het stelsel (ω) afgebeeld door een ruimtekromme van den vierden graad Ω_4.

Immers elk vlak loodrecht op het vlak V der orthoptische cirkels, snijdt de kegelsnede γ in twee punten, draagt dus vier beeldpunten.

Daar Ω_4 door een vlak, dat met V evenwijdig loopt, in vier punten wordt gesneden, zijn er in (ω) vier cirkels met vooraf gegeven straal.

Het stelsel (ω) bevat dus vier puntcirkels; blijkbaar vindt men die in de dubbelpunten der drie ontaarde kegelsneden en in het middelpunt der tot den bundel behoorende orthogonale hyperbool.

2. Het stelsel (ω) bevat twee orthoptische rechten, n.l. de richtlijnen der beide in den bundel voorkomende parabolen. Elk dier rechten wordt afgebeeld door twee vlakken, welke het vlak V onder hoeken van 45° snijden, dus evenwijdig loopen met vier beschrijvende rechten van elk rechthoekig kegelvlak Π_2, dat zijn top heeft in een punt P van V en t. o. v. dit vlak symmetrisch is geplaatst.

Daar Π_2 de beeldpunten van alle door P getrokken cirkels draagt, en de bovengenoemde vier oneindig ver gelegen punten twee rechten afbeelden, die niet door P gaan, zullen de overige vier snijpunten van Π_2 met Ω_4 twee elkaar in P snijdende cirkels (ω) vertegenwoordigen.

De orthoptische cirkels van een kegelsnedenbundel vormen dus een stelsel met index twee.

Men kan dit ook op de volgende wijze aantoonen. De raaklijnen uit P naar de kegelsneden van den bundel zijn in een (2,2) verwantschap gerangschikt, omdat elke straal uit P door twee krommen wordt geraakt. Dit stelsel heeft twee stralenparen gemeen met de involutie der rechten, welke elkaar in P loodrecht snijden; door P gaan dus twee cirkels ω.

Twee vlakken, welke het vlak V in de rechte l en onder hoeken van 45° snijden, hebben met de beeldkromme Ω_4 vier paren van beeldpunten gemeen. Hieruit blijkt, dat l door vier orthoptische cirkels wordt aangeraakt. Hun raakpunten zijn de coincidenties der (2,2) verwantschap, welke het stelsel (ω) op l bepaalt.

3. Wanneer men den vorm

$$x^2 + y^2 + ax + by + c$$

door C voorstelt, wordt het stelsel (ω) vertegenwoordigd door een vergelijking van den vorm

$$C_1 + 2\lambda C_2 + \lambda^2 C_3 = 0.$$

De macht van het punt (x, y) met betrekking tot den door een bepaalde waarde van λ aangewezen cirkel wordt dan voorgesteld door

$$\frac{C_1 + 2\lambda C_2 + \lambda^2 C_3}{1 + 2\lambda + \lambda^2}.$$

Deze uitdrukking wordt onafhankelijk van λ als men voor (x, y) het machtpunt van C_1, C_2, C_3 neemt. Alle cirkels ω hebben dus een gemeenschappelijk machtpunt, of, anders gezegd, alle orthoptische cirkels worden door een vasten cirkel A loodrecht gesneden.

Omdat A de puntcirkels van (ω) moet dragen, volgt hieruit deze eigenschap:

De cirkel door de diagonaalpunten van een volledigen vierhoek bevat het middelpunt van de orthogonale hyperbool, welke door de hoekpunten van dien vierhoek bepaald wordt.

Door zijn middelpunt gaan de richtlijnen der beide parabolen, welke men door die hoekpunten kan trekken.

Beschouwt men de gevonden uitkomst als een eigenschap der rechthoekige hyperbool, dan kan ze aldus onder woorden gebracht worden:

De diagonaalpunten van elken in een rechthoekige hyperbool beschreven volledigen vierhoek worden met het middelpunt dier kromme door een cirkel verbonden.

4. Daar alle cirkels ω loodrecht zijn op den vasten cirkel A, liggen hun beeldpunten op de eenvlakkige orthogonale omwentelingshyperboloide, die V volgens A rechthoekig snijdt.

De beeldkromme Ω_4 is dus de doorsnede van deze hyperboloide met den cylinder, die door V in de kegelsnede γ loodrecht wordt gesneden.

Wanneer de grondpunten van den bundel een orthocentrische groep [1]) vormen, dan zijn alle kegelsneden rechthoekige hyperbolen, zoodat het stelsel (ω) geheel uit puntcirkels bestaat. De orthogonaalcirkel A, die hen draagt, gaat door de diagonaalpunten van den volledigen orthogonalen vierhoek, valt dus samen met den cirkel van

---

[1]) D. w. z. vier punten, waarvan ieder het hoogtepunt is van den driehoek, die de anderen tot hoekpunten heeft.

Feuerbach (negenpuntscirkel), die, zooals bekend is, de middelpunten bevat van alle door de hoekpunten en het hoogtepunt van een driehoek getrokken orthogonale hyperbolen.

5. De orthoptische cirkels van een kegelsnedennet zullen, volgens de methode van Fiedler, door een oppervlak afgebeeld worden, dat het vlak V van het net in de meetkundige plaats der orthoptische puntcirkels snijdt.

Nu bepaalt elk punt P een tot het net behoorenden bundel, waarvan P een der grondpunten is; door P gaat dus één orthogonale hyperbool. Hieruit volgt, dat de orthogonale hyperbolen een in het net gelegen bundel vormen. Zooals boven werd opgemerkt, liggen de orthoptische puntcirkels van dezen bundel op den cirkel Λ, die door de diagonaalpunten en de middens der zes zijden van den vierhoek der grondpunten gaat.

De overige puntcirkels ω zijn middelpunten van lijnenparen, vormen dus de bekende kubische kromme, welke de *Hessiana* van het net wordt genoemd.

Drie lijnenparen van het net behooren tot den bundel van orthogonale hyperbolen, bestaan dus uit onderling loodrechte rechten; daar hun dubbelpunten op de *Hessiana* en tevens op den cirkel Λ moeten liggen, zullen deze beide krommen elkaar in drie punten aanraken.

Daar de beide meetkundige plaatsen van puntcirkels samen een kromme van den vijfden graad vormen, is het beeldoppervlak der orthoptische cirkels een oppervlak van den vijfden graad, O_5.

Elke rechte van V wordt in ieder van haar punten door *een* kegelsnede van het net geraakt; zij geeft dus de asrichting aan van een tot het net behoorende parabool. Hieruit volgt dan verder, dat het oneindig ver gelegen punt van elke rechte, die V onder een hoek van 45° snijdt, als beeld is te beschouwen van een orthoptische rechte.

Tot de tien punten, welke O_5 gemeen heeft met de rechthoekige hyperbool, die alle door twee punten getrokken cirkels afbeeldt, behooren dus de raakpunten van de asymptoten dier hyperbool. Daar de overige acht snijpunten vier cirkels afbeelden, blijkt hieruit, *dat men door twee willekeurige punten vier orthoptische cirkels van het stelsel kan trekken.*

6. Stellen U_x en U_y de afgeleiden naar x en y van de tweedemachtsfunctie U voor, dan worden de middelpunten der kegelsneden van het net

$$U + \lambda V + \mu W = 0$$

aangewezen door de betrekkingen

$$U_x + \lambda V_x + \mu W_x = 0,$$

$$U_y + \lambda V_y + \mu W_y = 0.$$

In het algemeen is dus elk punt (x, y) het centrum van *een* kegelsnede. Daarentegen is elk der vier door

$$U_x : U_y = V_x : V_y = W_x : W_y$$

bepaalde punten het gemeenschappelijk middelpunt van oneindig vele kegelsneden. Immers voor elk dier punten worden de bovenstaande lineaire vergelijkingen van elkaar afhankelijk, zoodat dan λ en μ door een lineaire betrekking verbonden zijn; daardoor wordt dus een bundel van kegelsneden uit het net gelicht.

Het beeldoppervlak O_5 bevat bijgevolg vier loodrecht op V geplaatste rechten.

7. We zullen nu de orthoptische cirkels beschouwen, die bij de kegelsneden met vier gemeenschappelijke raaklijnen behooren.

Daar elke rechte door het punt P *een* kegelsnede der schaar bepaalt, zullen de uit P getrokken raaklijnen een straleninvolutie vormen. Deze bevat in den regel slechts *een* paar onderling loodrechte rechten, dus *ligt P op één orthoptischen cirkel.*

Dat de orthoptische cirkels eener schaar een bundel vormen, blijkt trouwens ook uit de bekende eigenschap, volgens welke de middelpunten der schaar in een rechte liggen.

Naar gelang de cirkels van dien bundel door twee vaste punten gaan, een vasten cirkel loodrecht snijden of elkaar in een vast punt aanraken, zal het stelsel (ω) afgebeeld worden door een orthogonale hyperbool, waarvan de bestaanbare as loodrecht op V staat, of in V ligt, of wel door twee rechten, die V onder hoeken van 45° snijden.

Het stelsel (ω) bevat dus niet meer dan twee puntcirkels, m. a. w. in de schaar kunnen slechts twee orthogonale hyperbolen voorkomen.

Als een kegelsnede der schaar in twee punten ontaardt, heeft ω de verbindingslijn dier punten tot middellijn. In verband met het bovenstaande volgt hieruit de bekende eigenschap:

De cirkels, die op de diagonalen van een volledige vierzijde als middellijnen worden beschreven, behooren tot een bundel.

8. Ten slotte beschouwen we een weefsel van kegelsneden. Twee elkaar in P loodrecht snijdende rechten worden door *een* kegelsnede van het weefsel aangeraakt. Laat men den door hen ingesloten rechten hoek om P wentelen, dan doorloopen de raaklijnenparen, welke

de veranderlijke kegelsnede met een punt Q gemeen heeft, een stralen-involutie. Immers elke uit Q getrokken straal s bepaalt een in het weefsel begrepen schaar, die met het punt P de paren eener stralen-involutie (r, r') gemeen heeft. De kegelsnede, welke door het orthogonale paar (r, r') wordt aangeraakt, zendt naar Q een tweede raaklijn s', die met s een paar der bovenbedoelde involutie vormt. Daar nu het hierin voorkomende orthogonale paar (s, s') een kegelsnede aanwijst, waarvoor tevens r en r' loodrecht op elkaar staan, *kan men door de punten P en Q slechts een orthoptischen cirkel trekken.*

Naar gelang de cirkels (ω) een orthogonaalcirkel hebben, of een vasten cirkel in twee tegenpunten snijden, of door een vast punt gaan, wordt het gevonden cirkelnet afgebeeld door een eenvlakkige of een tweevlakkige orthogonale omwentelingshyperboloide of door een rechthoekigen omwentelingskegel.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM spreekt over: „*Oplosbaarheid en smeltpunt als kriteria voor de onderscheiding van racemische verbindingen, pseudoracemische mengkristallen en inaktieve konglomeraten*".

Hoewel de aandacht reeds meermalen gevestigd is geweest op de verschijnselen van oplosbaarheid en smelting om te onderscheiden tusschen genoemde typen, is hieromtrent tot nog toe geene zekerheid verkregen.

I. *Oplosbaarheid.* Het rechte inzicht in den gang der oplosbaarheidsverschijnselen wordt eerst verkregen door de aandacht te vestigen op het aantal oplossingskrommen, dat bij gegeven temperatuur mogelijk is.

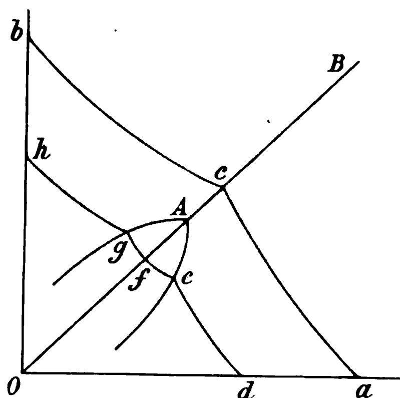


Fig. 1.

Is Oa het gehalte der verzadigde oplossing van de rechtsdraaiende stof D, Ob eveneens voor de linksdraaiende L, dan zijn deze beide vooreerst even groot bij dezelfde temperatuur.

Door toevoeging van L aan de D-oplossing en omgekeerd, krijgt men nu voor het geval bij de gebezigde temperatuur geen racemische verbinding optreedt, niets anders dan twee oplossingskrommen, uitgaande van de punten a en b, en samenkomende te c. Hunne juiste richting hangt samen met de velerlei werkingen die in de oplossing kunnen gebeuren. Uit de volkomene gelijkwaardigheid van L en D volgt echter noodzakelijk dat c steeds gelegen moet zijn op de lijn OB die den hoek der

assen middendoor deelt, zoodat de oplossing die zoowel verzadigd is aan L als aan D inaktief is, onverschillig hoe groot de overmaat van L of D waarmede zij in aanraking is.

Is bij eene andere temperatuur wèl racemische verbinding mogelijk, dan bekomt men drie oplossingskrommen *de*, *efg*, en *gh*. De middelste betreft dan de oplossingen van de verbinding; daarbij stelt *f* hare zuivere oplossing voor, *e* en *g* diegenen welke verkregen worden nevens overmaat van D of L.

Bij de overgangstemperatuur verdwijnt de middelste kromme (punt A). De oplossing is hier ook steeds inaktief. Is dus een inaktieve stof een konglomeraat (waardoor ik versta een vast mengsel waarin de bestanddeelen gescheiden naast elkander liggen) van $L + D$, zoo krijgt men als verzadigde oplossing nooit anders dan het punt *c*; is de stof eene verbinding zoo kan men drie oplossingen verkrijgen naar gelang men ze alleen oplost of met overmaat van L of D.

Verschijnselen bij de verdamping. Hierover zijn onlangs proeven genomen door KIPPING en POPE. Uit de figuur der oplossingskrommen is op de grafische wijze, het eerst door SCHREINEMAKERS toegepast, gemakkelijk af te leiden, dat bij de verdamping eener oplossing die een overmaat aan D of L bevat, de oplossing ten slotte in het punt *c* komt — dus inaktief wordt — wanneer geene racemische verbinding bestaat bij de aangewende temperatuur. Daarentegen wanneer deze verbinding wel bestaat — komt men bij overmaat aan D als eindpunt in *e*, bij overmaat aan L in *g*.

Ook op deze wijze zou uit te maken zijn wat zich afzet: konglomeraat of verbinding — indien bij die verdampingsproeven steeds gezorgd werd dat de noodige kristallisatiekernen aanwezig zijn — eene omstandigheid, waarop K. en P. niet gelet hebben.

Partieel-racemische verbindingen. Deze zijn onlangs door LADENBURG ontdekt en ten aanzien der oplosbaarheid bestudeerd aan D- en L-strychninetartraat.

De symmetrie van fig. 1 verdwijnt in dat geval wegens de ongelijke oplosbaarheid van de beide komponenten, derhalve zal punt A in het algemeen niet meer op OB gelegen zijn. Hieruit vloeit voort dat de verbinding, ook voor dat hare overgangstemperatuur bereikt is, reeds een temperatuur-interval van gedeeltelijke ontleding bezit. De heer LADENBURG meent dus ten onrechte dat deze verbinding bij hare overgangstemperatuur een oplossing leveren moet, die evenveel D- als L-tartraat bevat.

Bij temperaturen in het ontledingsinterval gelegen, verkrijgt men nu slechts tweeërlei oplossingen wanneer de verbinding alleen en met overmaat van D of L opgelost wordt.

Pseudoracemische mengkristallen. Mengkristallen moeten, gelijk ik vroeger aantoonde, als ééne vaste phase beschouwd worden. Mengkristallen uit optische antipoden gevormd, zullen wellicht, indien zij bestaan, in alle verhoudingen kunnen optreden. In zoodanig geval zou men in fig. 1 slechts ééne oplossingskromme bekomen, die de punten *a* en *b* verbindt en weder symmetrisch is.

Indien bij lagere temperaturen racemische verbinding optreedt, dan zou daardoor de kontinue mengingsreeks worden onderbroken. Het schema der oplossingslijnen zou daardoor o. a. aldus zich wijzigen, dat de lijnen *EA* en *CA* overgaan in ééne doorloopende kromme. Ook de verdampingsverschijnselen zullen zich wijzigen.

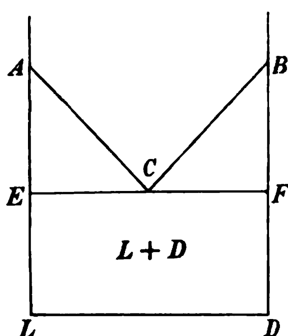


Fig. 2.

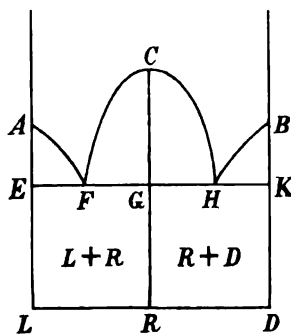


Fig. 3.

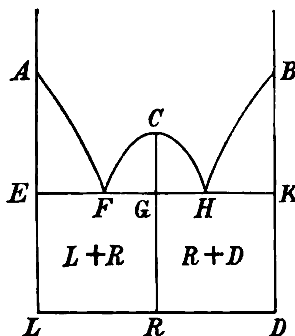


Fig. 4.

II. *Smeltpunten.* De meening bestaat dat een hooger gelegen smeltpunt bewijs is voor eene racemische verbinding indien men vergelijkt met het smeltpunt der antipoden. Onzekerheid bestaat wanneer het smeltpunt der inaktieve stof even hoog of lager ligt.

Ook hier geeft alleen de studie der smelt- of stollijnen over hunne geheele uitgestrektheid voldoende zekerheid.

Indien er geene verbinding noch mengkristallen bestaan, moet fig. 2 het schema der stolling geven. Op de horizontale as zijn de mengverhoudingen van *L* en *D* aangegeven, op de vertikale de temperatuur. *A* en *B* zijn dan de smeltpunten van *L* en *D*. *AC* is de stollingslijn voor vloeistoffen die *L* afzetten, *BC* voor de zoodanigen die *D* afzetten. Ieder mengsel stolt ten slotte in *C* tot een inaktief konglomeraat van *L* en *D*.

Is er daarentegen eene racemische verbinding, dan zijn twee typen mogelijk, door fig. 3 en 4 voorgesteld. Hierin is *C* het smeltpunt der verbinding, hetwelk hooger of lager ligt dan de smeltpunten *A* en *B*. Onverschillig hiervan voert de stolling thans tot *drie* krommen, waarvan de middelste geldt wanneer de verbinding zich afzet. Zij bezit twee takken.

Is er eindelijk eene kontinue mengingsreeks dan zal er slechts ééne stolkromme zijn. Deze behoeft echter niet — gelijk KIPPING en POPE meenen, bij eene voorstelling als de hier ge-

bruikte, eene horizontale lijn te zijn die A en B verbindt, maar kan evenzeer een maximum of een minimum vertoonen, dat echter dan bij 50 pCt. gelegen is. Zoodanig geval vermoed ik zelfs dat aanwezig is bij camfersulfonzuurchlorid en bij carvontribomid.

Ingevolge deze beschouwingen levert dus hooger noch lager smeltpunt eene beslissing over den aard van eene inaktieve stof, wèl echter de studie der geheele smeltlijn.

Eene enkele kromme geldt voor het geval van mengkristallen, twee krommen voor het geval van een inaktief konglomeraat, drie voor het geval eener verbinding.

Nog andere merkwaardige verschijnselen kunnen zich voordoen, wanneer na de stolling zich omzettingen vertoonen van verbinding mengsel of konglomeraat in elkander.

Wiskunde. — De Heer Schoute spreekt over: „*Een meetkundige beteekenis van den invariant* $\underset{n+1}{\Pi}(ab)^2$ *van een binairen vorm* a^{2n} *van even graad*".

Met betrekking tot de schepping van de schoone theorie der invarianten komt naast Aronhold, Boole, Brioschi, Cayley, Clebsch, Gordan, Hermite en anderen ongetwijfeld aan Sylvester bijzonder groote verdienste toe. Reeds in 1851 toch ontwikkelde hij in zijn verhandeling: „*On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants*" (*Phil. Mag.*, deel 2 van reeks 4, p. 391—410) den grondslag, waarop de leer der kanonische vormen rust. De hoofdinhoud hiervan bestaat in het bewijs van twee stellingen. Volgens de eerste is de algemeene binaire vorm van den oneven graad $2n-1$ steeds op een enkele wijze als de som van de $2n-1^{ste}$ machten van n binaire lineaire vormen te schrijven; volgens de tweede kan de binaire vorm van den even graad $2n$ alleen dan — en dan ook op een enkele wijze — als de som der $2n^{de}$ machten van n binaire lineaire vormen geschreven worden, indien een zekere invariant verdwijnt. Omtrent dezen invariant, die ons hier zal bezig houden, vergelijke men o. m. Gundelfinger's studie in het *Journ. f. Math.*, deel 100, p. 413—424, 1883, en Salmon's *Modern higher algebra*, vierde druk, p. 156, 1885.

Zoo wordt dan nu de theorie der invarianten van zekeren vorm van welken aard dan ook beheerscht door de vraag naar het minimum aantal gelijknamige machten van lineaire vormen, waardoor ze kan worden voorgesteld (vergelijk o. a. Reye in het *Journ. f. Math.*, deel 73, p. 114—122). Hiermee staan beschouwingen omtrent involuties van hoogeren rang en graad in innig verband. Ook worden

er stellingen uit afgeleid, die op de meetkunde met n afmetingen betrekking hebben. Omtrent dit alles verwijzen we naar twee belangrijke geschriften van W. Fr. Meyer. Het eerste, dat in 1883 te Tübingen verscheen, draagt den titel: „*Apolarität und Rationale Curven*"; het tweede, als: „*Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie*" opgenomen in het in 1892 verschenen eerste deel van het „*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*", is een onschatbaar referaat over dit onderdeel der wiskunde. Op blz. 365 van het eerste werk komt onder γ_4 een stelling voor, die met ons onderwerp in het nauwste verband staat.

Natuurlijk moet het nu ook mogelijk zijn langs omgekeerden weg van de theorie der polydimensionale ruimte uit de boven aangehaalde stellingen van Sylvester en de daarmee verband houdende hoogere involuties te bereiken. Werkelijk heeft dan ook Clifford in zijn belangrijke verhandeling „*On the classification of loci*" (*Phil. Trans.*, deel 169, stuk 2, p. 663—681) reeds in 1878 beweerd, dat in deze richting een meetkundige beteekenis van elken invariant van een binairen vorm is te vinden. En zoo ben ik bij de bepaling eener meetkundige plaats in de ruimten met een even aantal afmetingen op een meetkundige beteekenis van den invariant van Sylvester teruggevallen; bij het naslaan der boven aangehaalde litteratuur bleek echter spoedig, dat deze beteekenis reeds gevonden was.

Toch wensch ik mijn beschouwing te publiceeren. Eerstens, wijl er uit blijken kan, dat de meetkundige weg minstens even eenvoudig is als de stelkundige. Ten tweede, omdat zij een eliminatiemethode bevat, die ik in dezen vorm nog nergens aantrof. Ten derde, wijl de mogelijkheid niet is uitgesloten, dat geheel overeenkomstige beschouwingen tot een meetkundige beteekenis van andere algemeene invarianten kunnen voeren [1]).

1. Een kromme laat een tweevoudig oneindig aantal koorden toe, die gezamenlijk een drievoudig oneindig aantal punten bevatten. Ligt deze kromme in de ruimte R^3 met drie afmetingen, dan vullen deze punten de geheele ruimte op en gaan er dus een of meer dier koorden door een willekeurig gegeven punt. Ligt de kromme in de ruimte R^4 met vier afmetingen, dan is de meetkundige plaats der punten, waardoor koorden gaan, d.i. de meetkundige plaats dier

---

[1]) Ik denk bijv. aan den invariant $(ab)^{2n}(cd)^{2n}(ac)(bd)$ van een algemeenen binairen vorm $a_x^{2\nu+1}$ van oneven graad (vergelijk Salmon, t. a. p., p. 129, vraagstuk 2), die een uitbreiding vormt van den discriminant van a_x^3 en waarvan nog geen algemeene stelkundige beteekenis bekend schijnt te zijn.

koorden zelf, een gebogen ruimte van drie afmetingen. Uitgangspunt van deze beschouwingen vormt de opsporing dezer gebogen ruimte voor het eenvoudigst denkbare geval, nl. dat van de „normaalkromme" der ruimte R^4, d. i. van de rationale C_4 van den vierden graad, voorgesteld door de vergelijkingen

$$\frac{x_0}{1} = \frac{x_1}{\lambda} = \frac{x_2}{\lambda^2} = \frac{x_2}{\lambda^3} = \frac{x_4}{\lambda^4},$$

waarin x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 de homogene coördinaten zijn van het bij de parameterwaarde λ behoorende punt L der kromme.

2. Zijn λ_1 en λ_2 de parameterwaarden van twee willekeurig op C_4 aangenomen punten L_1 en L_2, dan zijn de coördinaten van een willekeurig punt A der verbindingslijn $L_1 L_2$ gegeven door de betrekkingen

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = p_1 + p_2 \\ x_1 = p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 \\ x_2 = p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 \\ x_3 = p_1 \lambda_1^3 + p_2 \lambda_2^3 \\ x_4 = p_1 \lambda_1^4 + p_2 \lambda_2^4 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en nu doet eliminatie van de vier grootheden λ_1, λ_2, p_1, p_2 de vergelijking der verlangde meetkundige plaats vinden.

Het resultaat dezer eliminatie is de kubische gebogen ruimte

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Want als men

$$\begin{vmatrix} p_1 + p_2 & p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 & p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 \\ p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 & p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 & p_1 \lambda_1^3 + p_2 \lambda_2^3 \\ p_1 \lambda_1^2 + p_2 \lambda_2^2 & p_1 \lambda_1^3 + p_2 \lambda_2^3 & p_1 \lambda_1^4 + p_2 \lambda_2^4 \end{vmatrix}$$

opschrijft, blijkt onmiddellijk, dat elke combinatie van partieele ko-

lommen na voor de hand liggende vereenvoudiging verdwijnt, wijl twee der drie kolommen gelijk zijn [1]).

3. De bij het punt L van C_4 behoorende osculatieruimte heeft tot vergelijking

$$x_0 \lambda^4 - 4 x_1 \lambda^3 + 6 x_2 \lambda^2 - 4 x_3 \lambda + x_4 = 0 \quad . \; . \; . \; (3)$$

Dus zijn de coördinaten x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 de coëfficiënten van den vorm

$$x_0 (-\lambda)^4 + 4 x_1 (-\lambda)^3 + 6 x_2 (-\lambda)^2 + 4 x_3 (-\lambda) + x_4$$

van den vierden graad in $(-\lambda)$, van de binomiaalfactoren ontdaan. Derhalve is de uitkomst (2) in de gedaante $j = 0$ te schrijven en symbolisch voor te stellen door $(bc)^2 (ca)^2 (ab)^2 = 0$ (zie o. a. CLEBSCH-LINDEMANN, „*Vorlesungen über Geometrie*", I, p. 229). Hieruit volgt dan tevens, dat elk punt der gevonden meetkundige plaats zich bovendien hierdoor van een willekeurig gekozen punt der ruimte R^4 onderscheidt, dat de vier er door gaande osculatieruimten van C_4 bij vier harmonische punten der kromme behooren. We wijzen dit nog even rechtstreeks aan. Denken we in de formules (1) de grootheden λ_1, λ_2, p_1, p_2 gegeven en voegen we de hieruit voor x_k volgende waarden in (3) in, dan vinden we

$$p_1 (\lambda - \lambda_1)^4 + p_2 (\lambda - \lambda_2)^4 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

als de vergelijking, die de parameterwaarden doet kennen van de vier punten L van C_4, wier osculatieruimten elkaar in het door (1) gegeven punt A van de lijn $L_1 L_2$ snijden. Neemt men nu gemakshalve de punten L_1 en L_2 tot grondpunten met de parameterwaarden 0 en ∞ aan, dan kan deze vergelijking zich tot $\lambda^4 - 1 = 0$ herleiden en doen de wortels 1, -1, $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ onmiddellijk zien, dat de puntenparen behoorende bij $(1, -1)$ en $(\sqrt{-1}, -\sqrt{-1})$

---

[1]) Zooals ik boven reeds opmerkte, heb ik deze eenvoudige afleiding van den invariant van SYLVESTER, die zich door alle ruimten R^{2n} heen vervolgen laat, nergens aangetroffen. In het oorspronkelijke (*Phil. Mag.*, t. a. p.) is eerst sprake van een binairen vorm van oneven graad en wordt de bij vormen van even graad behoorende invariant aan het slot langs een omweg bereikt. Bij SALMON (t. a. p.) en elders wordt de determinant beschouwd als een uitbreiding van den uit tweede differentiaalquotienten opgebouwden covariant van HESSE op hoogere, hier vierde differentiaalquotienten, enz.

elkaar harmonisch scheiden, terwijl elk dier paren dit het paar grondpunten L_1, L_2 behoorende bij $(0, \infty)$ doet. Is hiermee de harmonische ligging der vier punten (4) aangetoond, bovendien is er de volgende stelling door bewezen:

„Twee willekeurig op C_4 aangenomen punten L_1, L_2 bepalen op „deze kromme een kwadratische involutie I_2, waarvan zij de dubbel- „punten zijn. Voegt men van deze I_2 telkens twee elkaar harmonisch „scheidende paren bijeen, dan verkrijgt men de bikwadratische in- „volutie I_4, die door de vergelijking (4) is voorgesteld en dus „gekenmerkt is door de bijzonderheid, dat elk der beide punten „L_1, L_2 viermaal geteld een kwadrupel ervan vertegenwoordigt. „De osculatieruimten, die bij de punten van een willekeurig kwadrupel „behooren, snijden elkaar in een punt A van $L_1 L_2$. En als dit „kwadrupel de geheele I_4 doorloopt, dan beschrijft A op $L_1 L_2$ een „puntenreeks projectief verwant met I_4."

Verder vindt men nog gemakkelijk [1]):

„Zijn A en A' twee door L_1 en L_2 harmonisch gescheiden punten „van de lijn $L_1 L_2$, dan heeft het bij A behoorende kwadrupel van „I_4 de vereeniging van L_1 en L_2 met het bij A' behoorende kwadrupel „van I_4 tot covariant T van den zesden graad. En vereeniging „van de bij A en A' behoorende kwadrupels doet een involutie van „den achtsten graad ontstaan."

De bedoelde I_8 wordt door de vergelijking

$$p_1^2 (\lambda - \lambda_1)^8 - p_2^2 (\lambda - \lambda_2)^8 = 0$$

weergegeven en is dus gekenmerkt door de bijzonderheid, dat elk der beide punten L_1 en L_2 achtmaal geteld een oktupel ervan vertegenwoordigt.

4. We gaan thans over tot de ruimte R^6 en zoeken daar de meetkundige plaats der vlakken, die met de normaalkromme C_6

$$\frac{x_0}{1} = \frac{x_1}{\lambda} = \ldots = \frac{x_5}{\lambda^5} = \frac{x_6}{\lambda^6}$$

dier ruimte drie punten L_1, L_2, L_3 gemeen hebben. Deze wordt verkregen door de zes grootheden λ_1, λ_2, λ_3, p_1, p_2, p_3 te elimineeren uit de zeven betrekkingen

---

1) Immers, de vorm T van $x_1^4 \pm x_2^4$ is $x_1 x_2 (x_1^4 \mp x_2^4)$.

$$x_k = p_1 \lambda_1^k + p_2 \lambda_2^k + p_3 \lambda_3^k \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5)$$

waarin k de waarden 0, 1, . . . 5, 6 aannemen moet. Op geheel dezelfde wijze als boven vindt men hier de gebogen ruimte R_4^5 met vijf afmetingen van den vierden graad, voorgesteld door

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Het eerste lid dezer vergelijking is weer een invariant van den zesdemachtsvorm

$$x_0 (-\lambda)^6 + 6\, x_1 (-\lambda)^5 + 15\, x_2 (-\lambda)^4 + \ . \ . \ . + 6\, x_5 (-\lambda) + x_6,$$

die nul gesteld de bij het punt L behoorende osculatieruimte aanwijst. En nu blijkt op de gewone wijze door tot symbolische coëfficiënten over te gaan en op de onderlinge gelijkwaardigheid van deze te letten, dat bedoelde invariant door $(ab)^2 (ac)^2 (ad^2)(bc)^2 (bd)^2 (cd)^2$ kan worden voorgesteld.

Natuurlijk legt het verdwijnen van dezen invariant [1]) weer verband tusschen de zes punten van C_6, wier osculatieruimten door het door de formules (5) bepaalde punt A van het vlak $L_1 L_2 L_3$ gaan. Want invoeging der uit (5) voor de zeven coördinaten x_k volgende waarden in de vergelijking der osculatieruimte van het punt L geeft

$$p_1 (\lambda - \lambda_1)^6 + p_2 (\lambda - \lambda_2)^6 + p_3 (\lambda - \lambda_3)^6 = 0 \quad . \ . \ . \quad (6)$$

---

[1]) Is volgens de gewone notatie $f \equiv a_x^6$ en $k \equiv (f, f)^4 = (ab)^4 a_x^2 b_x^2$ de vierde overschuiving van f over zich zelf, dan is de bedoelde invariant de vierde overschuiving $(k, k)^4$ van k over zich zelf (zie G. Kirschensteiner's bewerking van Gordan's „*Vorlesungen über Invariantentheorie*", deel 2, p. 286).

Voor het volgende geval $f \equiv a_x^8$ heeft men met een invariant van den vijfden graad in de coëfficiënten te doen. Wijl er nu (zie o. a. von Gall's beide verhandelingen in de *Math. Ann.* deel 17, p. 31—51 en 139—152, 1890 over „*Das vollständige Formensystem einer binären Form achter Ordnung*") slechts een invariant van dezen aard is, moet onze invariant in dit geval met de door het teeken $f_{k,k}$ aangeduide overeenkomen.

Dus geldt de stelling:

„Drie willekeurig op C_6 aangenomen punten L_1, L_2, L_3 bepalen „op deze kromme een involutie I_6^2 van den tweeden rang en den „zesden graad, waarvan elk dier drie punten zesmaal geteld een „sextupel vertegenwoordigt. De osculatieruimten, die bij de punten „van een willekeurig sextupel behooren, snijden elkaar in een punt „A van het vlak $L_1\ L_2\ L_3$; doorloopt dit sextupel de geheele I_6^2, „dan beschrijft A in het vlak $L_1\ L_2\ L_3$ een vlak stelsel projectief „verwant met I_6^2."

De beschouwde invariant van a_x^6 wordt door SYLVESTER met den naam „catalecticant" aangeduid, wijl het verdwijnen ervan de voorwaarde is, waaronder a_x^6 zich als de som van drie zesdemachten laat voorstellen; in verband hiermee heet dan een a_x^6, die deze herleiding toelaat, een „meio-catalectic sextic" (*Phil. Mag.*, t. a. p., p. 408).

5. Ten slotte zoeken we in de ruimte R^{2n} de meetkundige plaats der lineaire ruimten R_1^{n-1}, die n punten $L_1, L_2, \ldots L_n$ gemeen hebben met de normaalkromme C_{2n} voorgesteld door

$$\frac{x_0}{1}=\frac{x_1}{\lambda}=\ldots\ldots=\frac{x_{2n-1}}{\lambda^{2n-1}}=\frac{x_{2n}}{\lambda^{2n}}.$$

Daartoe moeten de $2n$ grootheden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ geëlimineerd worden uit de $2n+1$ vergelijkingen

$$x_k=\sum_{l=1}^{l=n} p_l\,\lambda_l^k\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

waarin voor k achtereenvolgens $0, 1, \ldots 2n-1, 2n$ te stellen is. Langs den aangewezen weg verkrijgt men tot uitkomst

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \ldots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_n & x_{n+1} \\ x_2 & x_3 & x_4 \ldots & x_{n+1} & x_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n-1} & x_n & x_{n+1} \ldots & x_{2n-2} & x_{2n-1} \\ x_n & x_{n+1} & x_{n+2} \ldots & x_{2n-1} & x_{2n} \end{vmatrix} = 0\ .\ (8)$$

Ook in dit algemeene geval stelt het eerste lid dezer vergelijking een invariant van den $2n^{de}$-machtsvorm in $(-\lambda)$ voor, die nul gesteld de bij het punt L van λ behoorende osculatieruimte aanwijst. Symbolisch wordt deze invariant door $\underset{n+1}{\Pi}(ab)^2$ aangeduid, waarbij Π het algemeene teeken der vermenigvuldiging is en de index $n+1$ aangeeft, dat deze vermenigvuldiging moet worden uitgestrekt over de $\frac{1}{2}n(n+1)$ factoren $(ab)^2$, die er uit $n+1$ stel coëfficiënten $a, b, c, \ldots$ gevormd kunnen worden [1]).

Door invoeging der waarden (7) in de vergelijking der osculatieruimte vinden we

$$\sum_{l=1}^{l=n} p_l (\lambda - \lambda_l)^{2n} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

d. w. z.:

„Door op de normaalkromme C_{2n} de n punten $L_1, L_2, \ldots L_n$ willekeurig aan te nemen bepaalt men op deze een involutie I_{2n}^{n-1} van „den rang $n-1$ en den graad $2n$, waarvan elk dier n punten $2n$ „maal genomen een groep vormt. De osculatieruimten behoorende bij „de $2n$ punten van een willekeurige groep dier involutie snijden „elkaar in een punt A van de lineaire ruimte R_1^{n-1}, die de n „gegeven punten bevat; doorloopt deze groep de geheele involutie „I_{2n}^{n-1}, dan beschrijft A in R_1^{n-1} een met I_{2n}^{n-1} projectief verwant „lineair stelsel."

Voor zoover mij bekend is, is tot nu toe van drie algemeene invarianten een voor alle waarden van n geldende polydimensionale beteekenis bekend, nl. van den discriminant D, van den invariant $(ab)^{2n}$ en van den hier behandelden invariant van SYLVESTER. Is $x_{-\lambda}^{n}$ weer de vergelijking van de met de parameterwaarde λ overeenstemmende osculatieruimte der normaalkromme $x_k = \lambda^k$, $(k = 0, 1, \ldots n)$ in de ruimte met n afmetingen, dan stelt $D = 0$, zooals men weet, de gebogen ruimte $R_{2(n-1)}^{n-1}$ met $n-1$ afmetingen van den graad $2(n-1)$ voor, die bij verandering van λ door de osculatieruimte wordt omhuld; met voorbijgang van de zinledige onderstelling $n=2$

[1]) Waarschijnlijk komt de algemeene notatie $\underset{n+1}{\Pi}(ab)^2$ hier voor het eerst voor. Althans ik vond naast de overal voorkomende determinantenschrijfwijs nergens een symbolische voorstelling of een terugbrenging tot overschuivingen.

geeft $n = 3$ in de gewone ruimte aldus het ontwikkelbaar oppervlak, dat de kubische normaalkromme dier ruimte tot keerlijn heeft. Volgens CLIFFORD (t. a. p.) is $(ab)^{2n} = 0$ in de ruimte R_1^{2n} de kwadratische gebogen ruimte R_2^{2n-1} met $2n-1$ afmetingen, die de meetkundige plaats voorstelt van het punt, dat met de raakpunten der $2n$ door dit punt gaande osculatieruimten van de normaalkromme dier ruimte R_1^{2n} in een ruimte R_1^{2n-1} ligt; terwijl de overeenkomstige invariant $(ab)^{2n-1}$ van de normaalkromme der ruimte R_1^{2n-1} identisch verdwijnt en de bedoelde bijzonderheid zich daar, vergelijk het geval der kubische ruimtekromme in onze ruimte, voor elk willekeurig gekozen punt voordoet.

Voor het geval $n = 4$ is $(ab)^4 = 0$ identisch met $i = 0$ (CLEBSCH-LINDEMANN, t. a. p.) en dus tevens de voorwaarde, dat de vier raakpunten der osculatieruimten door een willekeurig punt der meetkundige plaats een equianharmonisch kwadrupel vormen. Bovendien is D een lineaire combinatie van i^3 en j^2. Hieruit volgt dan ten slotte, dat een willekeurig vlak de ruimte $D = 0$ volgens een kromme van den zesden graad snijdt, die de zes snijpunten van het vlak met het snijoppervlak der beide ruimten $i = 0$, $j = 0$ tot keerpunten heeft; in elk dezer punten vormt de doorsnee van het vlak met de osculatieruimte van $j = 0$ dan de keerraaklijn. Zooals men weet, verdeelt de ruimte $D = 0$ met haar dubbeloppervlak $i = 0$, $j = 0$ de ruimte R^4 in drie deelen, die de punten bevatten, waarvoor het aantal der bestaanbare osculatieruimten, die er door gaan, achtereenvolgens vier, twee en nul is, enz.

Natuurkunde. — De Heer HAGA doet, ook namens Dr. C. H. WIND, eene mededeeling over: *„de buiging van X-stralen"*.

Buiging der X-stralen werd aangetoond bij de volgende inrichting der proef:

De RÖNTGEN-buis werd geplaatst achter een 1 c.m. hooge en 14 micron wijde spleet; 75 c.m. van deze verwijderd was de buigingsspleet, die gelijkmatig nauwer werd van 14 tot ongeveer 2 micron. De photografische plaat stond 75 c.m. van de diffractie spleet. Expositie tijd 100 à 200 uren. Het spleetbeeld werd eerst nauwer om daarna eene onmiskenbare verwijding te vertoonen. Uit de wijdte van het met deze verbreeding overeenkomende deel der diffractiespleet en het karakter der verbreeding kon eene schatting gemaakt worden van de golflengte. Het bleek dat X-stralen bestaan van

ongeveer 0,1 tot $2^1/_2$ Angströmsche eenheden, 4 octaven omvattende.

De uitvoerige mededeeling verschijnt in het Verslag der volgende Vergadering.

Een paar vragen van de Heeren LORENTZ en W. H. JULIUS worden door den Spreker beantwoord.

Physiologie. — De Heer STOKVIS biedt voor de boekerij aan de dissertatie van Dr. G. BELLAAR SPRUYT, getiteld: *„Over de physiologische werking van het methylnitramine in verband met zijn samenstelling".*

In meer dan één onzer bijeenkomsten heeft ons medelid FRANCHIMONT ons de hangende vraagstukken omtrent de scheikundige structuur-formule van de nitraminen en in het bijzonder van het methylnitramine onder de oogen gebracht, en daar er nog altijd strijd bestaat over de wijze, waarop in het nitramine de N gebonden is, met name of zij daarin voorkomt in den vorm eener binding aan hydroxyl, in den vorm dus van een nitriet H—O—N = O, dan wel in een cyclisch gebonden vorm b.v. in dien van $H-N\langle{}^{O}_{O}$ (met O—O verbonden) of $H-N\langle\!\langle{}^{O}_{O}$, zoo achte hij het niet van belang ontbloot de physiologische werking van het methylnitramine aan een nauwkeurig onderzoek te onderwerpen. Het bekende verband tusschen chemische structuur en physiologische werking moet toch zoo worden opgevat, dat homoloog gebouwde lichamen ook homologe werking vertoonen. Indien dus nitraminen in hun bouw met nitrieten homoloog zijn, dan moeten zij zich ook door eene physiologische werking homoloog met die der nitrieten onderscheiden. Dr. SPRUYT heeft nu in het Path. Laborat. de physiologische werking van het methylnitramine onderzocht en met die van nitrieten vergeleken. Hij heeft daarbij allereerst de aan alle nitrieten (zoowel die van alkaliën als van alkoholradicalen) toekomende physiologische werking vastgesteld, die daarin bleek te bestaan:

1°. dat door alle nitrieten het haemoglobine tot methaemoglobine veranderd wordt, zoowel in het aan het lichaam ontnomen als in het levende bloed,

2°. dat door alle nitrieten bij zoogdieren de bloedvaten verwijd worden en de bloedsdrukking daalt,

3°. dat door alle nitrieten de intensiteit der werking van het geïsoleerde kikvorschhart belangrijk wordt benadeeld,

4°. dat door alle nitrieten bij kikvorschen paralyse, bij zoogdieren daarentegen krampen worden opgewekt.

Het methylnitramine, als methylnitramine-natrium aangewend en voor zoover noodig in physiologische keukenzoutpolutie opgelost, vertoonde nu deze werkingen niet, en bleek over het algemeen voor het dierlijk organisme en zijn vochten een vrij indifferente stof.

Houdt men nu verder in het oog, dat amylnitriet $C_5H_{11}-O-N=O$ de karakteristieke eigenschappen der nitrieten op de meest ondubbelzinnige wijze bezit, terwijl het isomere nitropentaan, waarin de stikstof waarschijnlijk cyclisch gebonden is, volgens de onderzoekingen van SCHADOW, vrij is van alle nitrietwerking, en over het algemeen evenzeer tot de voor het dierlijk lichaam indifferente stoffen behoort, dan is door de onderzoekingen van Dr. SPRUYT een nieuw argument gebracht voor de groote waarschijnlijkheid der opvatting van FRANCHIMONT, en voor de onjuistheid der hypothese van HANSCH, die in het methylnitramine het bestaan van een hydroxylgroep aanneemt en het dus als een soort nitriet beschouwt.

Natuurkunde — De heer H. A. LORENTZ biedt eene mededeeling aan, getiteld: *Vereenvoudigde theorie der electrische en optische verschijnselen in lichamen die zich bewegen.*

Natuurkunde. — De heer LORENTZ biedt voor het verslag een opstel aan, getiteld: „*De aberratietheorie van* STOKES *in de onderstelling van een aether die niet overal dezelfde dichtheid heeft.*"

(Deze beide mededeelingen zullen in het Verslag der volgende Vergadering verschijnen.)

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 47 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden, Dr. J. VERSCHAFFELT: „*Metingen over het verloop der isothermen in de nabijheid van het plooipunt, en in het bijzonder over het verloop der retrograde condensatie bij een mengsel van koolzuur en waterstof*". (*Vervolg.*)

§ 5. *Het verloop van de plooipuntslijn.*

Op dezelfde wijze als in § 2 werd beschreven, werden twee andere mengsels onderzocht met mengverhoudingen $x = 0,0995$ en $x = 0,1990$. Bij deze twee mengsels kon het onderzoek niet zoo volledig worden gemaakt als bij het eerste. Voor $x = 0,0494$ konden de isothermen nog tamelijk ver boven den plooipuntsdruk worden vervolgd; voor $x = 0,0995$ daarentegen lag het plooipunt op de grens van het waarnemingsgebied, en voor $x = 0,1990$ konden de waarnemingen slechts worden uitgestrekt tot in de nabijheid van het kritisch raakpunt. Met behulp van deze waarnemingen, waarvan de uitkomsten in de tabellen

III en IV worden medegedeeld, kunnen we echter reeds iets afleiden omtrent het verloop der plooipuntslijn bij mengsels van waterstof en koolzuur, in de buurt van zuiver koolzuur.

TABEL III.

Mengsel $x = 0{,}0995$. Isothermen.

Temp.	Volume. 0.0	Druk.	Temp.	Volume. 0.0	Druk.	Temp.	Volume. 0.0	Druk.
16°.90	2774	32.24	22°.80	07185	81.60	25°.00	03974	110.8
	2490	35.25	(vervolg)	06495	85.05	25°.45	06685	86.85
	2199	38.90		05955	87.80	(kr. r. t.)	06070	90.50
	2066	40.80		05325	91.95		04918	99.45
	1874	43.91		05260	92.45		04580	102.9
	1683	47.51		04171	104.1		04196	108.2
	1490	51.65		03612	114.6		03776	115.3
	1296	56.60	24°.20	09145	73.45	26°.05	2069	42.82
	1106	62.25	(pl. p. temp.)	07245	82.50		1873	46.27
	1067	63.50		06700	85.40		1685	50.20
	1029	64.85		06470	86.65		1486	54.90
	09940	66.00		06120	88.60		1300	60.25
	09565	67.30		05685	91.60		1107	66.85
	09145	68.30		05270	94.30		09185	74.50
	08800	69.10		04902	97.45		07240	84.20
	08360	70.25		04566	101.1		05300	96.90
	07990	71.35		04171	106.3		04566	103.9
	07165	74.00		03904	110.8		03806	115.8
	05240	84.20		03821	112.2	32°.30	2052	44.58
	03551	106.9	(pl. p.)	03738	114.2		1870	47.93
	03284	113.6	25°.00	07260	83.25		1675	52.20
22°.80	2061	42.20		06685	86.40		1479	57.15
	1877	45.40		06090	89.95		1297	62.85
	1683	49.26		05700	92.60		1109	96.95
	1480	53.90		05330	95.30		09145	78.60
	1293	59.10		04948	98.45		07220	89.70
	1110	65.15		04551	102.5		05255	105.4
	09145	72.55		04376	104.7		04249	118.1

TABEL IV.

Mengsel $x = 0{,}1990$. Isothermen.

Temp.	Volume 0,0.	Druk.	Temp.	Volume 0,0.	Druk.	Temp.	Volume 0,0.	Druk.
15°.35	2960	31.34	15°.35 (vervolg).	05180	105.9	22°.80 (vervolg).	1316	63.20
	2700	33.84		04552	117.4		1082	72.85
	2423	37.27	20°.90	07810	89.15		09025	82.45
	2142	41.26		07465	91.75		07115	96.05
	2031	43.03		07105	94.55		05255	116.0
	1844	46.58		06735	97.70		05140	117.6
	1653	50.75		06335	101.5		05070	118.8
	1461	55.70		05965	105.1		04965	120.6
	1276	61.55		05575	109.6	31°.80	2018	47.00
	1090	68.90		05210	114.2		1838	50.90
	1051	70.55	22°.20	06715	99.05		1651	55.50
	1016	72.10		06340	102.5		1465	61.15
	09745	73.95		05965	106.4		1275	68.20
	09385	75.80		05585	110.9		1090	77.00
	09020	77.75		05240	115.4		09020	88.10
	08605	79.75	22°.80	2030	44.79		07105	104.1
	08275	81.40		1833	48.78		05965	117.1
	07860	83.60		1651	53.00			
	07125	88.20		1461	58.35			

Op de p–v–t diagrammen, die met de gegevens der tabellen I, III en IV werden geconstrueerd, en waarvan slechts een in de vorige mededeeling werd overgenomen, werden voor de drie mengsels de volumina en drukkingen bij begin en einde der condensatie afgelezen; zij worden in tabel V medegedeeld. Slechts voor $x = 0{,}0494$ werd voor temperaturen, die vrij ver van het kritisch raakpunt verwijderd waren, het einde der condensatie waargenomen; voor $x = 0{,}0995$ was het stijgen van den druk bij het condenseeren reeds zoo sterk, dat bij temperaturen, een weinig beneden de plooipuntstemperatuur gelegen, waarnemingen van het einde der condensatie niet meer mogelijk waren. Bij het mengsel $x = 0{,}1990$ konden geen waarnemingen op den vloeistoftak van de grenslijn worden verricht.

TABEL V.

Grenslijnen.

Temp.	Begin condensatie.		Einde condensatie.	
	Volume.	Druk.	Volume.	Druk.
$x = 0{,}0494$ [1]				
15°.30	0.01111	57.20	0.002543	102.9
21°.50	0.008545	67.90	2892	100.0
26°.80	5850	81.75	3833	93.20
27°.10 (pl. p. t.)	5625	83.00	4063	91.85
27°.30	540	84.6	427	90.5
27°.50 (kr. r. t.)	48	87.4	48	87.4
$x = 0{,}0995$				
16°.90	0.009440	67.80		
22°.80	6890	83.20		
24°.20 (pl. p. t.)	6255	87.90	0.003737	114.3
25°.00	565	92.9	412	108.4
25°.45 (kr. r. t.)	47	101	47	101
$x = 0{,}1990$				
15°.35	0.008795	79.10		
20°.90	6335	101.5		
22°.20	560	110.9		
± 22°.8 (kr. r. t.)	± 50	± 120		

Fig. 4 (zie de Plaat) geeft een graphische voorstelling van tabel V, in een diagram met t als abscis, p in atmosferen als ordinaat, en x als parameter. Zooals men weet bestaat dit diagram uit de dampspanningslijnen der beide zuivere stoffen, verbonden door de plooipunts-

[1]) De hier gebruikte waarden zijn de gecorrigeerde, medegedeeld in de Engelsche vertaling. (Proceedings, Jan. 28th 1899.)

lijn; daartusschen loopen de grenslijnen der mengsels, in den vorm van lussen, die de plooipuntslijn in het plooipunt raken. In het kritisch raakpunt is de raaklijn evenwijdig aan de p-as.

In deze figuur heb ik ook de dampspanningslijn geteekend van zuiver koolzuur, zooals die door AMAGAT[1]) werd bepaald. Door verbinding der plooipunten met het kritisch punt van koolzuur: $t = 31°,35$, $p = 72,9$ atm., krijgt men een stuk der plooipuntslijn. Deze plooipuntslijn loopt steil omhoog. Het is waarschijnlijk, dat zij van het kritisch punt van waterstof: $t = -234°,5$, $p = 20$ atm.[2]) eveneens steil oploopt.

Het gevonden verloop der plooipuntslijn is in overeenstemming met waarnemingen van KUNDT[3]) omtrent den invloed van druk van samengeperste waterstof op de oppervlaktespanning van vloeistoffen, wanneer men ze opvat op de wijze als door VAN ELDIK[4]) in zijne dissertatie is uiteen gezet. VAN ELDIK stelt daarin in het licht dat de druk, bij welken de oppervlaktespanning nul zou worden is de plooipuntsdruk, die met de waarnemingstemperatuur overeenkomt. Hij heeft verder het verloop van de oppervlaktespanning als functie van de stijghoogte onderzocht. Voor waterstof en aether leidt hij af dat de plooipuntsdruk bij de gewone temperatuur niet minder dan 750 atm. zou bedragen, waaruit een steil oploopen van de plooipuntslijn voor aether en waterstof aan de aetherzijde volgt.

De hier medegedeelde proeven zijn niet de eerste welke op de kritische verschijnselen bij mengsels van waterstof en koolzuur betrekking hebben. Reeds door CAILLETET[5]) zijn proeven genomen met een mengsel dat ongeveer 5 mol. CO_2 op 1 mol. H_2 bevatte. Zij hadden ten doel om, met het oog op JAMIN's verklaring der kritische verschijnselen, aan te toonen, dat door toenemenden waterstofdruk het vloeibare koolzuur verdwijnen moet. CAILLETET vond, dat dit werkelijk geschiedde en wel bij des te hoogere drukkingen naarmate de temperatuur lager was; b. v. op 245 atm. bij 15°, en op 153 atm. bij 25°. Voor het vraagstuk dat wij behandelen, nl. het construeeren van de grenslijnen en de plooipuntslijn, hebben deze waarnemingen echter geen waarde, omdat CAILLETET niet door roeren voor evenwicht der phasen heeft gezorgd. Eerst sinds door

---

[1]) Comptes rendus, 114, p. 1093, 1892.

[2]) Zie OLSZEWSKI, Wied. Ann., 56, p. 133, 1895.

[3]) Ber. d. Kön. Acad. v. Wiss. Berlin, 21 Oct. 1880.

[4]) VAN ELDIK, Dissertatie, Leiden 1898. Communic. Leiden N°. 39.

[5]) Comptes rendus, 96, p. 1448, 1883.

KUENEN [1]) op deze wijze de vertragingsverschijnselen zijn opgeheven, heeft het experimenteel onderzoek der kritische verschijnselen bij mengsels tot betrouwbare uitkomsten gevoerd. De belangrijke afwijkingen tot welke vertragingsverschijnselen kunnen voeren, blijken weder hieruit, dat CAILLETET nog condensatie waarnam bij 25°, terwijl uit mijn proeven blijkt dat het kritisch raakpunt van zijn mengsel, wanneer het evenwicht der phasen is verkregen, bij ongeveer 23° moest worden gevonden.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 47 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden (*Vervolg*), Dr. J. VERSCHAFFELT: „*Metingen over drukverandering bij vervanging van het eene bestanddeel door het andere in mengsels van koolzuur en waterstof*".

§ 1. *Drukverandering door vervanging.*

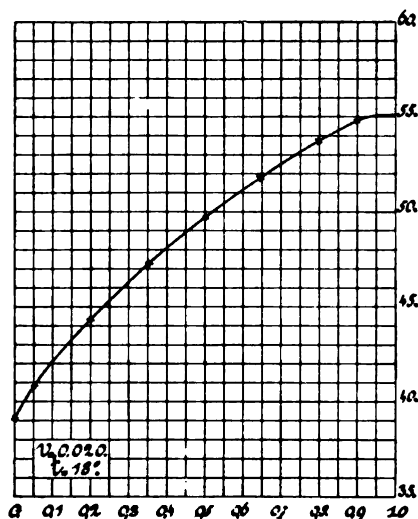
In de tabellen VI—X zijn de uitkomsten neergeschreven van de isothermbepalingen bij mengsels met nog hooger waterstofgehalte, dan in de vorige mededeelingen werden behandeld. Bij deze mengsels traden, in het waargenomen gebied, geen condensatieverschijnselen meer op; omtrent het verder verloop der plooipuntslijn kunnen ze ons dus niets meer leeren, maar, in verband met de vroeger medegedeelde uitkomsten, stellen ze ons in staat na te gaan op welke wijze, bij een bepaalde temperatuur en een bepaald volumen, de spanning van het mengsel van de mengverhouding afhangt.

Met behulp van alle medegedeelde bepalingen werden eerst de spanningscoëfficienten berekend, waarvan de waarden voor verschillende mengverhoudingen en volumina in tabel XI worden medegedeeld. Daarna werden voor eenzelfde temperatuur, 18° C., de isothermen der verschillende mengsels berekend, en in een nieuw diagram, het p–v–x diagram, afgebeeld. Op dit diagram werden nu de drukkingen afgelezen, die voor de verschillende mengsels bij een zelfde volumen behooren; de tabel XII geeft de aldus afgelezen waarden voor eenige volumina.

Gelijk in § 2 zal worden uiteengezet, werden de volumen-eenheden voor de verschillende mengsels zoo gekozen, dat 1 cM³. van ieder mengsel hetzelfde aantal moleculen zal bevatten, wanneer de volumina van deze mengsels in de daarvoor aangenomen eenheden uitgedrukt dezelfde waarde hebben. De tabel XII leert ons dus hoe de druk

[1]) KUENEN, Dissertatie, Leiden 1892. Communic. Leiden N°. 4.

verandert wanneer men, uitgaande van eene der beide stoffen in zuiveren toestand, de moleculen van deze stof geleidelijk vervangt door een gelijk aantal moleculen der andere.



Het karakter dezer „drukverandering door vervanging" wordt in nevensgaande figuur aanschouwelijker gemaakt: als abscissen zijn hier genomen de mengverhoudingen, en als ordinaten de drukkingen voor het volumen 0,020, en bij de temperatuur 18° C. Uit deze figuur blijkt, dat deze drukverandering niet met die der mengverhouding evenredig is, de spanning is steeds grooter dan uit eene lineaire wet volgen zou; wordt slechts een klein breukdeel van het aantal waterstofmoleculen door een gelijk aantal koolzuurmoleculen vervangen, dan wordt daardoor nagenoeg geen verandering in de spanning gebracht.

In tabel XII is duidelijk op te merken, dat ook de spanningscoëfficienten nagenoeg niet worden veranderd, wanneer het aantal der door koolzuur vervangen waterstofmolekulen slechts een klein breukdeel van het geheele aantal waterstofmoleculen is.

§ 2. *De eenheid van volumen.*

Het was wenschelijk voor ieder mengsel het volumen uit te drukken in eene bijzondere volumeneenheid, zoo gekozen, dat één cM³. van elk der mengsels hetzelfde aantal moleculen bevat, wanneer het volumen er van, uitgedrukt in deze eenheid, dezelfde waarde heeft. Dit doel bereiken wij door voor ieder mengsel als eenheid van volumen te nemen: het volumen dat de gebruikte hoeveelheid stof zou innemen bij 0° C. en 1 atm., indien het mengsel zich als een volmaakt gas gedroeg. Dit volumen zullen wij het *theoretisch normale* noemen; om het te verkrijgen moet men het volumen dat men gewoonlijk het *normale* volumen noemt, d. i. het volumen dat werkelijk bij 0° C. en 1 atm. wordt ingenomen, vermenigvuldigen met een factor, die de afwijking uitdrukt van de wet van Avogadro. Voor zuivere stoffen is in verband met de wet van Avogadro deze maat in 1881 door Kamerlingh Onnes [1]) voorgesteld, waarbij hij

---

[1]) Zie Kamerlingh Onnes. Verh. Kon. Akad. v. Wet. 1881. Algemeene theorie der vloeistoffen, p. 5—7. Uittreksel Arch. Néerl. t. XXX.

tevens wees op de wenschelijkheid om voortaan ook de moleculaire grootheden in absolute maat uit te drukken. Om de afwijking van het normaal volumen van waterstof van dat, hetwelk bij de wet van AVOGADRO moet worden gebruikt, te bepalen, maakte hij gebruik van de wet van v. D. WAALS en van de waarde 0,00050, die v. D. WAALS voor $a—b$ had afgeleid (Continuiteit p. 91) uit de waarnemingen van REGNAULT. Hij verkreeg zoo KG. M. S. de vergelijking $\left(p+\frac{A}{v^2}\right)(v-b)=2262000\,(1+\alpha t)$, die hij geschikt achtte ter beoordeeling van de afwijking der gassen van de wet van AVOGADRO [1]).

Bij waterstof zullen wij echter gebruik maken van de waarnemingen van AMAGAT beneden 200 atm., die ons ook gediend hebben bij het bepalen der drukkingen. Zij geven met voldoende benadering voor de isotherme van 0° C.

$$p\,(v-0{,}000690)=0{,}99931\,,$$

wanneer het normale volumen als eenheid wordt gekozen. Hieruit volgt dat, om het theoretisch normale te verkrijgen, men het volumen bij 0° en 1 atm. moet vermenigvuldigen met 0,99931.

Uit het gewicht van 1 L. waterstof: 0,08955 gr. bij 760 mM. kwik, 0° C. en 45° breedte, en het moleculairgewicht van CO_2 : 43,89, leidt men voor koolzuur af een gewicht van 1,9652 gr. p. L. in dezelfde omstandigheden; REGNAULT vond daarvoor 1,9771, dus een afwijking van 0,0060 van de theoretische waarde ten opzichte van waterstof. De dichtheid van koolzuur is dus 0,0053 hooger dan de theoretisch normale, zoodat men om het theoretisch normale volumen van zuiver koolzuur te vinden, het volumen bij 0° en 1 atm. vermenigvuldigen moet met 1,0053.

Omtrent de afwijkingen van de wet van AVOGADRO, vertoond door mengsels van koolzuur en waterstof geeft eene waarneming van BRAUN [2]) ons eenige inlichting. Deze heeft gevonden dat, wanneer men twee gelijke volumina waterstof en koolzuur, onder een druk van circa 71 cM. kwik, met elkander mengt, de druk bij het mengen 0,097 cM., dus 0,0014, hooger wordt. Wij mogen dus aannemen dat, wanneer van waterstof en koolzuur twee gelijke volumina worden genomen bij 0° en 1 atm., door menging een dubbel volumen wordt

---

[1]) Het algemeene vraagstuk is behandeld door v. D. WAALS in zijne mededeelingen „Over de bepaling van het moleculair gewicht uit de dampdichtheid", Verslag der Verg. Nov. '98 en „Volumecontractie en drukcontractie II", Versl. der Verg. Dec. '98.

[2]) Wied. Ann., 34, p. 948, 1888. Dergelijke drukverandering bij menging van samengeperste gassen is door KUENEN door roeren aangetoond.

verkregen onder een druk van 1,0014 atm. Stelt men door n voor het aantal moleculen dat één volumen van een volmaakt gas bevatten zou bij 0° en 1 atm., zoodat 0,99931 n het aantal moleculen waterstof en 1,0053 n het aantal moleculen koolzuur is, dan is het gemakkelijk in te zien dat één volumen van het mengsel bij 0° en 1 atm. 1,0009 moleculen bevatten moet. Om van een mengsel dat ongeveer uit een gelijk aantal moleculen waterstof en koolzuur bestaat het theoretisch normale volumen te vinden moeten we dus het volumen bij 0° en 1 atm. met 1,0009 vermenigvuldigen.

Als wij met v. d. Waals door x voorstellen de verhouding van het aantal waterstofmoleculen in het mengsel tot het geheele aantal moleculen, dan wordt de afwijking van de wet van Avogadro dus voorgesteld door de getallen: 1,0053 voor $x = 0$, 1,0009 voor $x = 0{,}5$ en 0,99931 voor $x = 1$. Voor tusschenliggende mengsels zullen we nu de afwijking wel met voldoende benadering vinden door eene parabolische formule toe te passen van den vorm $y = a + bx + cx^2$; zoodoende vinden we dat de afwijking mag worden voorgesteld door

$$y = 0{,}99931 + 0{,}0060\ (1-x)^2\ .$$

Volgens deze formule hebben kleine bijmengselen van koolzuur bij de waterstof slechts een geringen invloed; eene omstandigheid waarop in het vervolg nog zal gewezen worden.

Bij de reductie tot 0° C. moest van de uitzettingscoëfficienten der mengsels gebruik worden gemaakt. Als eerste benadering had ik die met behulp van eene lineaire formule uit de uitzettingscoëfficienten der zuivere stoffen: 0,00366 voor H_2, 0,00371 voor CO_2, kunnen berekenen. Geleid echter door de vorige uitkomst omtrent de afwijkingen van de wet van Avogadro, heb ik het waarschijnlijk geacht dat de afhankelijkheid van den uitzettingscoëfficient van de mengverhouding x, ook hetzelfde karakter zou dragen; en ik heb die dus moeten stellen

$$\alpha_p = 0{,}00366 + 0{,}00005\ (1-x)^2\ .$$

Het kwam reeds bij de bepaling van het theoretisch normaalvolumen van waterstof ter sprake, dat men door van verschillende experimenteele gegevens uit te gaan tot verschillende afwijkingen van de wet van Avogadro komt. Voor koolzuur is dit in nog meerdere mate het geval. Ontleent men bijv. naast het vroeger door Kamerlingh Onnes aangenomen cijfer 0,99950 voor waterstof ook het cijfer 1,00646 voor koolzuur (afgeleid uit de isothermen van Regnault) aan v. d. Waals' Continuiteit (p. 76) en stelt men dit in de plaats van de dichtheidsbepaling van koolzuur door Regnault, dan

zou men voor het mengsel van $^1/_2$ waterstof—$^1/_2$ koolzuur vinden 1,00158, waaruit zou volgen

$$y = 0.99950 + 0,00136\,(1-x) + 0,00560\,(1-x)^2 \,.$$

Uit het oogpunt van eene consequente toepassing van de wet van v. d. Waals zou eene berekening van het theoretisch normaalvolumen van het koolzuur uit het normale volumen en de samendrukbaarheid de voorkeur verdienen boven de door mij gevolgde wijze van berekenen. Dan echter zou er strijd ontstaan tusschen de verhouding der gewichten van een zelfde volumen koolzuur en waterstof in volmaakten gastoestand en de moleculaire gewichten, welke wij juist als uitgangspunt voor onze keuze der volumen-eenheden wenschen te gebruiken (met het oog op de theorie der mengsels van v. d. Waals). De verschillen, welke de berekeningen met behulp van de verschillende gegevens opleveren, zijn niet van zoo grooten invloed, dat zij het karakter der drukverandering bij vervanging twijfelachtig zouden maken, maar zij vallen toch reeds op de grens van de waarnemingsfouten bij mijne bepalingen. Het blijkt dus weer hoezeer nauwkeurige waarnemingen met volmaakt zuivere stoffen noodig zijn om vorderingen te maken in de kennis van de wetten, die den gastoestand beheerschen.

TABEL VI. $x = 0,3528$.

Volume 0,0	$p_{16^\circ \cdot 00}$	$p_{31^\circ \cdot 60}$
2810	34.44	36.85
2585	37.17	39.80
2442	39.15	41.96
2299	41.38	44.38
2159	43.77	46.95
2014	46.54	49.99
1869	49.70	53.45
1724	53.35	57.40
1587	57.35	61.80
1480	60.90	65.75
1340	66.35	71.75
1207	72.40	78.45
1067	80.30	87.25
09255	89.90	98.30
07940	101.60	112.0
06510	115.3	

TABEL VII. $x = 0,4993$.

Volume 0,0	$p_{18^\circ \cdot 00}$	$p_{32^\circ \cdot 00}$
3168	32.11	33.84
2975	34.09	35.95
2825	35.78	37.78
2667	37.85	39.97
2512	40.08	42.36
2355	42.60	45.07
2206	45.34	47.97
2045	48.71	51.55
1889	52.35	55.50
1736	56.80	60.20
1624	60.45	64.05
1468	66.35	70.40
1323	73.05	77.65
1172	81.85	87.10
1017	93.15	99.50
08694	107.3	114.9

TABEL VIII.

$x = 0{,}6445.$

Volume 0,0	$p_{16°.80}$	$p_{24°.20}$	$p_{31°.90}$
2979	34.85	35.82	36.85
2746	37.76	38.79	39.95
2600	39.90	41.00	42.13
2446	42.35	43.53	44 80
2294	45.10	46.34	47.88
2143	48.21	49.60	51.00
1989	51.90	53.35	54.95
1836	56.05	57.60	59.35
1686	60.90	62.65	64.55
1576	65.20	67.05	69.05
1433	71.45	73.60	75.80
1284	79.50	82.00	84.55
1140	89.25	92.05	94.85
09935	102.2	105.5	108.9
08495	119.2		

TABEL IX.

$x = 0{,}7963.$

Volume 0,0	$p_{18°.30}$
3293	32.61
2990	35.81
2723	39.47
2474	43.49
2253	47.78
2032	53.00
1840	58.60
1630	66.20
1484	72.95
1335	81.35
1212	89.65
1090	100.1
09650	113.2

TABEL X.

$x = 0{,}8972.$

Volume 0,0	$p_{17°.10}$
3234	33.46
2989	36.29
2840	38.15
2692	40.31
2532	42.94
2384	45.72
2217	49.22
2076	52.65
1904	57.50
1764	62.25
1635	67.40
1485	74.55
1336	83.15
1173	95.20
1028	109.5

TABEL XI. Spanningscoëfficienten. (15°—30° C.)

Volume 0,0	Mengverhoudingen $x =$									
	0.0000	0.0491	0.0995	0.1990	0.3528	0.4993	0.6445	0.7963	0.8972	1.0000
30	0.162	0.159	0.156	0.150	0.142	0.134	0.130	0.127	0.126	0.126
28	175	172	168	163	155	146	141	138	136	135
26	190	186	183	177	168	159	154	150	148	146
24	209	204	199	193	183	174	168	163	161	159
22	229	223	218	211	201	191	185	179	176	173
20	257	249	242	234	223	212	204	197	194	192
18	295	285	276	265	250	237	227	221	216	214
16	346	333	321	306	286	270	256	249	244	242
14	412	395	381	360	331	312	296	286	281	278
12	503	481	461	431	395	373	353	339	331	327
10	620	590	566	433	495	464	436	415	405	397

TABEL XII. Drukkingen bij 18°.

Volume 0,0	Mengverhoudingen $x =$									
	0.0000	0.0494	0.0995	0.1990	0.3528	0.4993	0 6445	0.7963	0.8972	1.0000
30	28.90[1])	29.68	30 37	31.33	32.70	33.81	34.77	35.80	36.19	36.31
29	29.73	30.43	31.33	32.25	33.75	34.92	35 95	37.09	37.46	37.59
28	30.58	31.35	32.25	33.24	34.85	36.12	37.19	38.43	38.83	38.97
27	31.45	32.32	33.23	34.34	36.04	37.39	38.56	39.81	40.29	40.45
26	32.40	33.33	34.28	35.53	37.32	38.80	40.05	41.33	41.87	42.04
25	33.36	34.40	35.37	36.77	38.64	40.23	41 64	42.98	43.62	43.77
	34.38	35.53	36.54	38.04	40.12	41.80	43.33	44.80	45.48	45.65
23	35.47	36 73	37.78	39.43	41.72	43.57	45.17	46.73	47.48	47 70
22	36.55	38.00	39.11	40.91	43.40	45.46	47.18	48.90	49.67	49.94
21	37.75	39.40	40.55	42.50	45.26	47.50	49 39	51.20	52 15	52.40
20	39.08	40.85	42.10	44.26	47.30	49.65	51.80	53 75	54.80	55.10
19	40.40	42.40	43.76	46.15	49.49	52.10	54.45	56.65	57.80	58.10
18	41.90	44.02	45.56	48.22	51.90	54.05	57.45	59.85	61.15	61.50
17	43.43	45.70	47.47	50.40	54.60	58.00	60.75	63 45	64.90	65.25
16	45.00	47.52	49.55	52.80	57.50	61.30	64.55	67.45	69.10	69 50
15	46.64	49.45	51.85	55.45	60 80	65.00	68.75	72.10	73.85	74.35
14	48.35	51.65	54.30	58.40	64.60	69.30	73.35	77.50	79.25	79.95
13	50.05	54.00	56.00	61.75	68.80	74.30	78.80	83 55	85.65	86.45
12	51.85	56.40	59.85	65.60	73.60	80.00	85.30	90.85	93.10	94.10
11	53.65	59.00	63.05	69.75	79.10	86.75	93.00	99.25	102.0	103.1
10	55.50	61.65	66.55	74.25	85.40	94.40	102 1	109.6	112.9	114.3

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM biedt namens Dr. ERNST COHEN een opstel aan: „*Over electrische reactiesnelheid.*"

1. Schakelt men twee elementen, die als volgt zijn samengesteld:

Electrode, omkeerbaar met betrekking tot het anion.	Verzadigde oplossing van een zout Z in tegenwoordigheid van de *stabiele* vaste phase van dit zout.	Electrode, omkeerbaar met betrekking tot het kation.

[1]) Deze kolom is ontleend aan nog niet gepubliceerde isothermenbepalingen van zuiver koolzuur.

Dr. J. VERSCHAFFELT, Metingen over het verloop der isothermen in de nabijheid van het plooipunt en in het bijzonder over het verloop der retrograde condensatie bij een mengsel van koolzuur en waterstof.

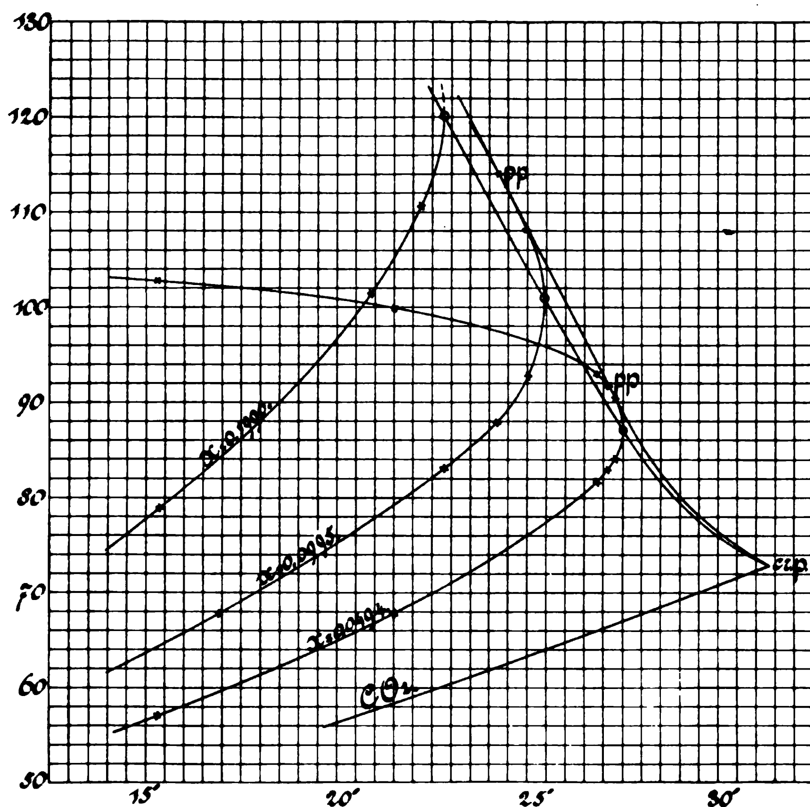


Fig. 4.

en

Electrode, omkeerbaar met betrekking tot het anion.	Verzadigde oplossing van het zout Z in tegenwoordigheid van de *metastabiele* vaste phase van dit zout.	Electrode, omkeerbaar met betrekking tot het kation.

tegen elkaar, dan ontstaat er een Overgangselement (van de derde soort [1]).

Is het zout Z zinksulfaat, dan kan men de bedoelde combinatie samenstellen uit twee CLARK-elementen; in het eene ligt $ZnSO_4 . 7 H_2O$, in het tweede $ZnSO_4 . 6 H_2O$ op den bodem, wanneer men zich bevindt in het temperatuurinterval begrepen tusschen de kryohydratische temperatuur van het $ZnSO_4 . 6 H_2O$ en het overgangspunt (39°).

2. De electromotorische kracht E van dit overgangselement bij gegeven temperatuur T is de maat voor den maximalen arbeid, dien de omzetting in het element bij de temperatuur T kan verrichten.

Binnenkort zal ik mededeelen, hoe E langs thermodynamischen weg kan berekend worden.

Experimenteel kan men E direct bepalen of afleiden uit de metingen van JAEGER [2]), die bij verschillende temperaturen de *E. K.* van CLARK-elementen heeft gemeten, waarin (tusschen 0° en 39°) $ZnSO_4 . 7 H_2O$ (stabiele phase) resp. $ZnSO_4 . 6 H_2O$ (metastabiele phase) als vaste phase aanwezig was.

Men vindt dan:

Temperatuur.	*E. K.* van het Overgangselement.
— 5°,0	16.2 Millivolts.
0°,0	14.9 „
5°,0	13.5 „
9°,0	12.3 „
15°,0	10.3 „
25°,0	6.4 „
30°,0	4.2 „
35°,0	1.9 „
39°,0	0 „

[1]) Zie COHEN, Zeitschrift für phys. Chemie, Bd. 25 (1898). S. 300.

[2]) WIEDEMANN's Annalen, Bd. 63 (1897), 354.

3. De snelheid waarmede de reactie, die in het overgangselement verloopt, bij de temperatuur T plaats heeft, wordt nu gegeven door:

$$K = \frac{E}{\Sigma(W)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hierin is $\Sigma(W)$ de som der binnenweerstanden (bij T^0) van de elementen, die samen het overgangselement vormen, E de electromotorische kracht van het overgangselement bij T^0.

Ik heb aangetoond [1]), dat de binnenweerstand van een CLARK-element bij T^0 evenredig is met den weerstand van de bij T^0 verzadigde zinksulfaat-oplossing, die zich in dat element bevindt.

Is nu bij T^0 de gemeten weerst. eener opl. verz. aan $ZnSO_4 . 7H_2O = W_1$
„ „ „ T^0 „ „ „ „ „ „ „ $ZnSO_4 . 6H_2O = W_2$
dan is:

$$\Sigma(W)_{T^0} = (p_1 W_1)_{T^0} + (p_2 W_2)_{T^0} ,$$

waarin p_1 en p_2 konstanten zijn, afhangende van de capaciteit van de gebruikte CLARK-elementen en 't weerstandsvat, waarin de weerstanden der verzadigde oplossingen bepaald zijn.

Worden alle metingen met hetzelfde vat uitgevoerd, dan is:

$$\Sigma(W)_{T_0} = p(W_1 + W_2) .$$

Noemen wij Ω_1 en Ω_2 de specifieke weerstanden der verzadigde oplossingen van $ZnSO_4 . 7 H_2O$ en $ZnSO_4 . 6 H_2O$ (bij T°) en is $\varkappa$ de weerstandscapaciteit van het weerstandsvat, waarin de meting van W_1 en W_2 plaats heeft, dan is:

$$\Omega_1 = \varkappa W_1$$

$$\Omega_2 = \varkappa W_2$$

$$K = \frac{E}{\frac{p}{\varkappa}(\Omega_1 + \Omega_2)} .$$

$$K_1 = \frac{E}{\Omega_1 + \Omega_2} ,$$

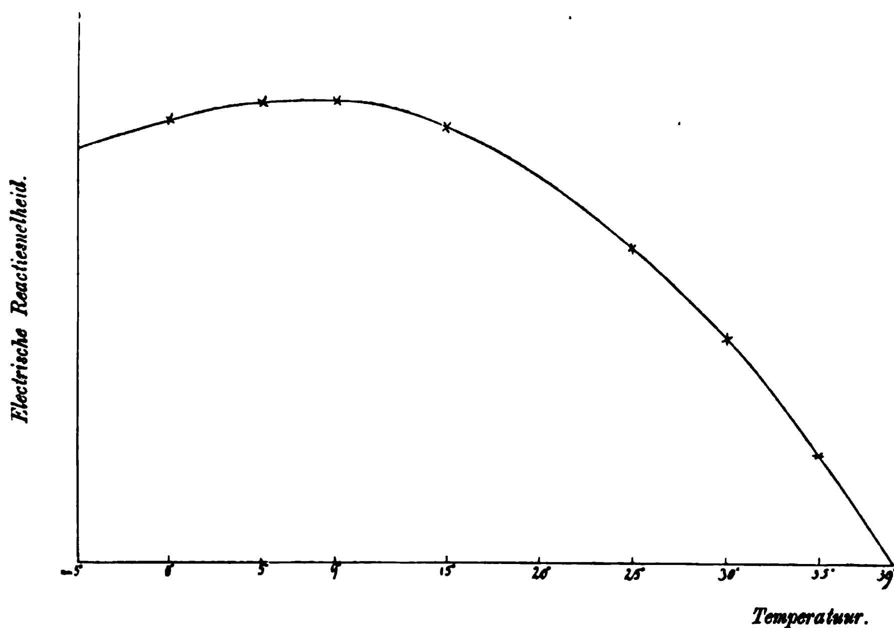
[1]) De verhandeling, daarop betrekking hebbende, verschijnt binnenkort in de Zeitschrift für physikalische Chemie.

K_1, de konstante der *electrische reactiesnelheid* vindt men in de laatste kolom der volgende tabel, die de waarnemingen bevat.[1])

T	E (Millivolts)	W_1	W_2	$K_1 = \frac{E}{\Omega_1 + \Omega_2}$
— 5°	16.2	445.9	524.1	0,0167
0°,0	14.9	384.2	452.2	0,0178
5°,0	13.5	337.0	396.3	0,0184
9°,0	12.3	305.75	360.35	0,0185
15°,0	10.3	271.60	315.50	0,0175
25°,0	6.4	236.40	274.25	0,0125
30°,0	4.2	225.10	248.85	0,0088
35°,0	1.9	218.50	228.35	0,0042
39°,0	0	215.0	215,0	0

Beneden — 5° kunnen de waarnemingen niet worden voortgezet, daar 't kryohydratisch punt van $ZnSO_4 . 7H_2O$ bij ongeveer — 6° ligt.

Brengt men de waarden voor K_1 in teekening als functie van de temperatuur, dan ontstaat de onderstaande kurve.

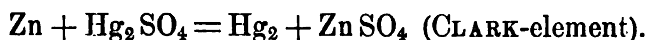


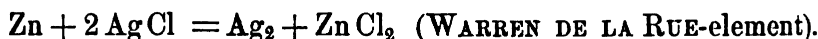
[1]) Voorloopig is K_1 in de tabel met een konstanten factor vermenigvuldigd.

Men ziet daarin duidelijk, dat de *electrische reactiesnelheid* van 39° af vrij snel stijgt, bij ± 9° een maximum bereikt, om daarna weder te dalen.

Opmerking verdient het feit, dat de kromme, die hier de *electrische reactiesnelheid* bij verschillende temperaturen voorstelt, hetzelfde verloop heeft als die, welke de kristallisatiesnelheid van vele lichamen bij verschillende temperaturen beneden het stolpunt weergeeft [1]). Ik zal hierop later uitvoerig terugkomen, eveneens op de studie van de snelheid der volgende reacties:


$Zn + CuSO_4 = Cu + ZnSO_4$ (DANIELL-element).


$Zn + Hg_2SO_4 = Hg_2 + ZnSO_4$ (CLARK-element).


$Zn + 2\,AgCl = Ag_2 + ZnCl_2$ (WARREN DE LA RUE-element).


$Zn + 2\,HgCl = Hg_2 + ZnCl_2$ (HELMHOLTZ-element).

Amsterdam, Februari 1899.

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT biedt voor de boekerij der Akademie aan de dissertatie van den Heer L T. C. SCHEIJ getiteld: „*Over synthetisch bereide neutrale glycerine-esters — triacylinen — van verzadigde éénbasische zuren met even aantal C-atomen*, en licht die met eenige woorden toe.

Sedert de onderzoekingen van CHEVREUL in 't eerste vierde dezer eeuw houdt men de vetten, althans de dierlijke, voor mengsels van glycerine-esters, op grond van de producten die er bij behandeling met oplossingen van basen uit ontstaan, maar hoogst zelden is er een glycerine-ester zuiver uit afgezonderd. De moeilijkheden aan zulke scheidingen verbonden zijn nog altijd niet voldoende overwonnen.

Omstreeks de helft dezer eeuw werden door BERTHELOT en anderen een paar dezer glycerine-esters synthetisch gemaakt, maar meestal niet in zuiveren toestand verkregen. De Heer SCHEIJ heeft nu, met 't oog op de zuren, die men beweert uit boter te hebben verkregen, acht glyceriden, door hem, ter voorkoming van verwarring met polyglycerinederivaten, *triacylinen* genoemd, synthetisch gemaakt en hun densiteit, refractievermogen en smeltpunt bepaald. Van deze acht waren

---

[1]) Zie GERNEZ, Journal de physique (2) 4, (1885) p. 349. TAMMAN, Zeitschrift für phys. Chemie, o. a. 23, 326 (1888). v. 'T HOFF, Vorlesungen über theor. und phys. Chemie (1898). S. 226.

er drie geheel onbekend nl. caproïne, caprylinе en caprine; drie butyrine, palmitine en stearine, waren reeds vroeger synthetisch bereid, maar de twee eersten stellig niet zuiver; twee: laurine en myristine, waren alleen uit natuurproducten afgezonderd, maar evenmin geheel zuiver.

De door den Heer SCHEIJ gevolgde bereidingsmethode bestaat eenvoudig in het verhitten van glycerine met een overmaat van het zuur tot eene temperatuur waarbij nóch het glycerine, nóch het zuur, nóch de ester ontleding ondergaan en in omstandigheden dat 't gevormde water dadelijk zoo volkomen mogelijk wordt weggevoerd, b. v. door een zwakken luchtstroom bij sterke luchtverdunning in den toestel, waarop dan gefractionneerde distillatie in vacuo of kristallisatie uit verschillende oplosmiddelen volgde totdat eene der genoemde eigenschappen door die behandeling geene waarneembare verandering meer onderging. Hieruit werd dan tot de zuiverheid van het product besloten; aan elementairanalysen werd door den Heer SCHEIJ in deze gevallen weinig waarde gehecht en zij zijn dus niet uitgevoerd.

De bepaling der specifieke gewichten had steeds plaats door weging van een zeker volumen der stof en van een gelijk volumen water bij dezelfde temperatuur; de aldus verkregen nauwkeurigheid is tot op een paar eenheden der 4de decimaal.

De refractie-index werd bepaald voor natriumlicht met een refractometer van PULFRICH, waarbij in de meeste gevallen de 4de decimaal zeker is. De smeltpuntsbepaling is niet met zóó groote nauwkeurigheid verricht of verschillen van een paar tiende graden kunnen voorkomen.

De Heer SCHEIJ heeft niet alleen van zijne producten de drie eigenschappen bepaald maar ook van het uitgangsmateriaal, dat zoo zorgvuldig mogelijk gezuiverd werd, behalve de twee hoogste zuren, die hem in hoogen staat van zuiverheid bereidwillig verschaft waren door Dr. L. E. O. DE VISSER te Schiedam. Van de acht bereide triacylinen is het tricaprine dat, hetwelk den grootsten waarborg voor zuiverheid oplevert, omdat het 't best van allen kristalliseert en in groote, heldere, goed gevormde kristallen werd verkregen; de lagere termen zijn bij de gewone temperatuur vloeistoffen waarvan alleen het tributyrine intens bitter smaakt.

Ten slotte behandelt de Heer SCHEIJ de methoden, waardoor men bij benadering althans, densiteit en refractievermogen van deze stoffen zou kunnen berekenen. De berekening met de door anderen bepaalde waarden voor de atoomvolumina (zelfs die van TRAUBE met 't covolumen) en voor de atoomrefracties geeft waarden die van de gevondenen vrij sterk afwijken. Hij wijst daarbij op de geringe zekerheid die de

voor de atoomvolumina en de atoomrefracties aangenomen waarden hebben.

Eene andere methode van berekening, door BERTHELOT in 1856 reeds aangegeven, nl. uit de molecuulvolumina en uit de molecuulrefracties der op elkaar werkende stoffen bij gelijke temperatuur, gaf betere resultaten. Reeds is door anderen opgemerkt, dat de esters der vetzuren in 't algemeen zich dikwijls zonder groote volumenverandering schijnen te vormen en dit schijnt bij de triacylinen ook zoo te zijn. Voor 't caprine stemde het resultaat dier berekening van het molecuulvolumen zelfs geheel met 't gevondene overeen; hieruit volgt niet dat dit ook voor de andere termen 't geval zou moeten zijn en in de bijgevoegde tabel ziet men de afwijkingen, die deze vertoonen.

Eene derde methode van berekening gaat uit van hetgeen voor een der termen gevonden is en brengt, daar allen met een gelijk verschil in samenstelling, opklimmen of afdalen, de gemiddelde waarde van dit verschil in rekening. Van 't caprine als 't zuiverste product uitgaande is de overeenstemming tusschen de aldus berekende en de gevonden waarden voor molecuulvolumen en molecuulrefractie eene vrij goede, zooals uit ingevoegde tabelletjes blijkt.

Voor de smeltpunten werd gevonden dat die van caprinezuur en van tricaprine gelijk of nagenoeg gelijk zijn, terwijl bij de lagere termen der triacylinen het smeltpunt lager ligt dan dat van het zuur bij de hoogere daarentegen hooger, hetgeen niet overeenstemt met hetgeen BERTHELOT vroeger meende gevonden te hebben.

Deze arbeid zal in 't Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas et de la Belgique gepubliceerd worden.

Voor de Boekerij worden aangeboden, door den Heer STOKVIS Deel II Stuk 1 van zijne „*Voordrachten over Geneesmiddelleer*"; door den Heer VAN DE SANDE BAKHUIJZEN, namens den Correspondent R. D. M. VERBEEK „*Kort verslag over de aardbeving te Ambon op 6 Januari* 1898; door den Heer ROSENBERG „*Ueber eine primitive Form der Wirbelsäule des Menschen*"; door den Heer VAN DER WAALS Deel I van den 2den druk van „*Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes*".

Na resumtie van het behandelde wordt de vergadering gesloten.

(8 Maart 1899.)

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 25 Maart 1899.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

De Heeren JAN DE VRIES en KAMERLINGH ONNES hebben bericht gezonden, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

Ingekomen zijn:

1°. een schrijven van den Heer E. G. C. DE GROOT VAN EMBDEN, Burgemeester van Boskoop, ter begeleiding van een verzameling kaarten en teekeningen, afkomstig uit de nalatenschap van zijnen vader, den Heer CORN. DE GROOT, in leven Inspecteur van het Mijnwezen in Nederlandsch-Indië. Aan den schenker zal de dank der Akademie betuigd worden.

2°. een mededeeling van den Heer L. BOLTZMANN te Weenen, Buitenlandsch Lid der Akademie, getiteld: „*Ueber die Zustandsgleichung* VAN DER WAALS'." Daar eenigen tijd geleden door de Afdeeling het besluit genomen was alleen in het Nederlandsch gestelde stukken in het Verslag op te nemen, vraagt de Secretaris verlof om voor mededeelingen van de Buitenlandsche Leden, van die bepaling te mogen afwijken.

De Voorzitter meent, onder blijken van instemming der Vergadering, dat het genomen besluit niet toepasselijk geacht moet worden op mededeelingen, die wij van onze Buitenlandsche Leden ontvangen, en dat de Afdeeling gaarne de mededeeling van Prof. BOLTZMANN in het Verslag zal opgenomen zien.

3°. een schrijven van den Correspondent der Afdeeling, Dr. R. D. M. VERBEEK, ter begeleiding van een verhandeling: „*Over de geologie van Ambon*", welke in de Werken der Akademie zal opgenomen worden.

De Heer ZAAIJER brengt ook namens den Heer FOCKEMA ANDREAE, Lid der Letterkundige Afdeeling, het volgende verslag uit, dat als antwoord zal kunnen dienen op de vraag van den Belgischen Gezant, nopens hier te lande uitgeschreven prijsvragen.

M. d. V.

Ter voldoening aan de opdracht van den Voorzitter dezer Afdeeling in de vergadering van 28 Januari ll. heb ik de eer hierbij het volgende Rapport uit te brengen aangaande de door den Belgischen gezant tot onze Regeering gerichte vraag nopens hier te lande geregeld uitgeschreven prijsvragen.

Door den Voorzitter der Letterkundige Afdeeling is eene dergelijke opdracht verstrekt aan den Heer Mr. S. J. FOCKEMA ANDREAE en deze zal in de eerstvolgende vergadering zijner Afdeeling hieromtrent mededeeling doen.

Ons Verslag is gesteld in den vorm van een brief als antwoord op de vraag van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken:

iinklijke Akademie
n Wetenschappen
te Amsterdam.

No.

nderwerp:
RIJSVRAGEN.

Amsterdam, den 1899.

In antwoord op het schrijven van Uwe Excellentie, dd. 24 Januari 1899, No. 264 K. W., heeft de Akademie de eer het volgende te berichten.

Het onderzoek, vereischt voor de beantwoording der daarin vervatte vraag betreffende prijsvragen, die in Nederland periodiek worden uitgeschreven en waarnaar ook Buitenlanders kunnen mededingen, is door den Voorzitter der Natuurkundige Afdeeling opgedragen aan Dr. T. ZAAIJER en door den Voorzitter der Letterkundige Afdeeling aan Mr. S. J. FOCKEMA ANDREAE.

Naar aanleiding der vraag van den Belgischen gezant zij in de eerste plaats vermeld dat, vanwege den Staat, hier te lande geene prijsvragen als de bedoelde worden uitgeschreven.

Dit geldt ook voor onze Akademie, hoewel zij (Art. 3, *d*, Algemeen Reglement, § 11 der Reglementen voor de Afdeelingen) bevoegd is om prijsvragen uit te schrijven en de goedgekeurde antwoorden te bekronen en uit te geven, voor zooveel bij de ontwikkeling der wetenschap daaraan behoefte blijkt te bestaan.

Van deze bevoegdheid is althans in de laatste 25 jaren stellig geen gebruik gemaakt.

Tot de taak der Akademie behoort evenwel ook het toekennen van medailles aan de vervaardigers der best gekeurde Latijnsche gedichten en aan hen, die geoordeeld worden zich gedurende een zeker tijdperk in een bepaald vak van wetenschap het meest verdienstelijk te hebben gemaakt.

Daar het uitreiken dezer medailles, naar onze meening, binnen de door de Belgische Regeering gestelde vraag ligt, volgen thans de daarvoor geldende bepalingen allereerst die omtrent:

I. Het *Legatum Hoeufftianum.*

Door Mr. JACOB HENDRIK HOEUFFT te Breda, overleden den 14e Februari 1843, werd bij testamentaire beschikking aan het Konink-

Aan
e Excellentie den Minister
Binnenlandsche Zaken, te
's Gravenhage.

lijk Nederlandsch Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten (d. i. de voorgangster der tegenwoordige Letterkundige Afdeeling onzer Akademie) o. a. „vermaakt een kapitaal.... .... onder deze uitdrukkelijke voorwaarde dat dit geheel afzonderlijk van de overige fondsen des Instituuts zal worden geadministreerd en dat de Intressen...... geheel en uitsluitend zullen geaffecteerd moeten zijn en blijven tot het jaarlijks uitreiken van eenen gouden Eerepenning ter waarde van ten minste twintig gouden dukaten aan den maker van het best verre boven het middelmatige gekeurd Latijnsch gedicht van ten minste vijftig regels, mits geen vertaling zijnde, noch een privaat gelegenheidsvers, noch een stuk, welk bevorens òf in druk òf in handschrift in omloop is geweest, waarvan de uitschrijving op de bij het Instituut gebruikelijke wijze en voorwaarden zal geschieden."

Het eerste bekroonde prijsvers verscheen in 1845. [1])

Daarop volgen geene bekroningen vóór het jaar 1856.

Het „*Programma Certaminis poëtici ab academia regia disciplinarum Nederlandica ex Legato Hoeufftiano in annum.... indicti*" wordt jaarlijks in de maand April verzonden aan verschillende Bibliotheken, Instellingen, personen en redactiën van Tijdschriften.

De eereprijs bestaat in een gouden medaille ter waarde van 400 gulden.

II. Het *Fonds voor de* LEEUWENHOEK-*medaille.*

Op initiatief van de Nederlandsche Dierkundige Vereeniging werden in de maand Februari van 1875 plannen ontworpen om de medio September 1675 door ANTONI VAN LEEUWENHOEK gedane ontdekking der mikroskopische wezens na 200 jaren waardiglijk te herdenken. [2])

Een van de gevolgen dezer bemoeiingen was dat door „de Commissie voor de herdenking van LEEUWENHOEK's ontdekking der mikroskopische wezens gelden werden bijeengebracht om uit de renten

---

[1]) *Xiphias.* Carmen, cujus auctori, DIDACO VITRIOLI, ex urbe Rhegio Neapolitano certaminis praemium e legato JACOBI HENRICI HOEUFFT adjudicatum est in consessu publico Classis tertiae Instituti regii Belgici. Amstelodami, apud JOANNEM MÜLLER MDCCCXLV.

[2]) De feestrede werd op den 8e September 1875 te Delft uitgesproken door Prof. P. HARTING. Zie zijne: *Redevoering, bij gelegenheid van het* 200-*jarig feest ter herdenking van* ANTONI VAN LEEUWENHOEK'*s ontdekking der mikroskopische wezens* (*Album der Natuur*, 1875. Afl. 12) en verder: P. J. HAAXMAN. *Het leven van een groot natuuronderzoeker* ANTONY VAN LEEUWENHOEK, *geschetst uit zijne Brieven en andere bescheiden.* (*Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde.* 1871. II, bl. 1).

daarvan te bestrijden de kosten voor het slaan van gouden medailles, van welke, elke tien jaren, één zal worden uitgereikt aan hem, die zich in dien tijd het verdienstelijkst heeft gemaakt op het gebied van de studie der mikroskopische wezens".

De administratie van dit Fonds wordt gevoerd door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

De beoordeeling aan wien de medaille zal worden toegewezen, zal zijn overgelaten aan eene Commissie van drie leden uit de Wis- en Natuurkundige afdeeling der Akademie, door den Voorzitter dier Afdeeling te benoemen.

De medaille is uitgereikt:

in 1875 aan Prof. C. G. EHRENBERG te Berlijn, [1])
in 1885 aan Prof. FERD. COHN te Breslau,
in 1895 aan Prof. LOUÏS PASTEUR te Parijs.

III. Het *Fonds voor de* BUIJS-BALLOT *medaille*, gesticht den 10den Maart 1888.

De Commissie voor de viering van het 40 jarig jubilaeum van Prof. Dr. C. H. D. BUIJS-BALLOT heeft gelden verzameld teneinde uit de renten daarvan eene gouden BUIJS-BALLOT-medaille te bekostigen, die voor het eerst na 5 jaren, dus in 1893, en vervolgens telkens na verloop van tien jaren zal worden uitgereikt „aan dien geleerde, die het meest tot de ontwikkeling der meteorologie zal hebben bijgedragen met dien verstande, dat de medaille nooit ten tweede male aan denzelfden geleerde zal worden toegekend."

Het fonds is gesteld onder beheer der Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

Aan eene Commissie uit de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Akademie is opgedragen te beoordeelen aan wien de medaille zal worden uitgereikt.

Deze Commissie zal het recht hebben één of meer leden, al of niet leden der Akademie, te assumeeren.

Mocht ooit de Koninklijke Akademie van Wetenschappen worden opgeheven dan zullen de administratie van de gelden en de toewij-

[1]) Op de feestvergadering (8 September 1875) werd door den Voorzitter der Natuurkundige Afdeeling, Prof. F. C. DONDERS, medegedeeld dat de Akademie met acclamatie besloten had de gouden LEEUWENHOEK-medaille voor de eerste maal toe te kennen aan Prof. C. G. EHRENBERG te Berlijn.

'zing der medaille geschieden door de Senaten der Nederlandsche Universiteiten.

De gouden BUIJS-BALLOT medaille is in 1895 toegekend aan Prof. Dr. JULIUS HANN te Weenen.

IV. Het DE JONG VAN BEEK EN DONK-*fonds* opgericht den 11den Mei 1891.

Door Mevrouw de douairière Jhr. Mr. JAN, JOHAN, FRANCISCUS DE JONG VAN BEEK EN DONK, geboren ANNA, CÉCILE, WILHELMINE, JEANNE, JAQUELINE NAHUYS werd, ter voldoening aan den wensch van wijlen haren echtgenoot, onder beheer der Akademie gesteld een kapitaal, uit de renten waarvan, na verloop van 20 jaren, en daarna om de 20 jaren, een prijs van ten minste 500 gulden zal worden toegewezen „aan den Schrijver of de Schrijfster van het in die periode best geschreven werk over WILLEM DEN ZWIJGER, over HUGO DE GROOT, over SPINOZA, over TROMP of over REMBRANDT; bij ontstentenis van zoodanig geschreven werk zal eenig voortbrengsel van de beeldende kunsten ter mededeeling worden toegelaten, eerst dan evenwel, wanneer die Kunsten in de Akademie zullen zijn vertegenwoordigd."

De beoordeelaars zullen niet alleen hunne aandacht vestigen op geschriften, die uitsluitend over een der bovengenoemde personen handelen, maar ook op dezulken, die over het tijdvak, waarin zij hebben geleefd, nieuw licht verspreiden.

Buitenlandsche Schrijvers zullen eerst dan in aanmerking komen, wanneer geen Nederlander aanspraak op de belooning blijkt te hebben.

Tot het bovenstaande bepaalt zich in deze de taak van de Akademie.

Door de volgende Genootschappen en Stichtingen worden periodiek prijsvragen uitgeschreven, waarbij mededinging van Buitenlanders is toegelaten.

Zij worden hier in chronologische volgorde, d. i. naar het tijdstip harer stichting vermeld. Dit verdient, om verschillende redenen, de voorkeur boven eene behandeling naar de vakken, waarover de prijsvragen loopen.

Het oudste Genootschap, dat thans in aanmerking komt, is:

A. De *Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem*, onder de zinspreuk: „Deo et Patriae", opgericht in 1752 [1]).

De prijsvragen, meestal over onderwerpen van physisch-mathematischen, chemischen of natuurhistorischen aard, worden vastgesteld op de Algemeene Vergadering der Maatschappij, welke jaarlijks op den 3den Zaterdag van de maand Mei gehouden wordt.

Op deze vergadering wordt ook beslist omtrent de al of niet bekroning der ingekomen antwoorden op prijsvragen.

De antwoorden moeten geschreven zijn in het Nederlandsch, Fransch, Latijn, Engelsch of Hoogduitsch (doch niet met Hoogduitsche letter).

De belooning, van wege de Maatschappij uit te loven, bestaat in eene gouden medaille, op den gewonen stempel der Maatschappij geslagen of 150 gulden, ter keuze van den schrijver, en nog daarenboven, indien het antwoord zulks waardig geoordeeld wordt, een premie van 150 gulden.

Eene zilveren medaille wordt toegewezen aan den voorsteller van elke vraag, waarvan het antwoord met de gouden medaille wordt bekroond.

Bij de wijziging der Wet in 1891 is het uitschrijven der prijsvragen facultatief gesteld ter beslissing van HH. Directeuren der Maatschappij.

Het Programma wordt spoedig na de Algemeene Vergadering in de Nederlandsche en in de Fransche taal gedrukt. Het eerste wordt geplaatst in de 4° Verhandelingen, door de Maatschappij uitgegeven; deze zijn evenwel sedert jaren niet verschenen. Het tweede wordt opgenomen in de *Archives Neêrlandaises des Sciences exactes et naturelles*, waarvan sedert 1866 jaarlijks een Deel door de Maatschappij wordt gepubliceerd. Hiervan worden behalve de ongeveer 110 Exemplaren voor de binnen- en buitenlandsche Leden bestemd, omstreeks 300 Exemplaren aan Akademiën, Genootschappen, Instellingen en Bibliotheken verzonden. Somwijlen wordt het Programma in een of ander Tijdschrift overgenomen.

---

[1]) Zie: *Société Hollandaise des Sciences à Harlem.* Notice historique. Liste des protecteurs, présidents, secrétaires, directeurs et membres résidants et étrangers et liste des publications de la Société depuis sa fondation en 1752. Harlem, DE ERVEN LOOSJES, 1876, en verder de Voorrede van het *Eerste Deel der Verhandelingen*, uitgegeven door de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, 1754.

B. Het *Legatum Stolpianum* [1]).

In 1753 ontving de Universiteit te Leiden een legaat van JAN STOLP, op den 13 October van het genoemde jaar aldaar overleden.

Als Curatoren van dit „Legatum Stolpianum" zijn aangewezen vijf Leidsche Hoogleeraren van verschillende faculteiten.

Door dezen wordt om de 2 jaren eene prijsvraag uitgeschreven, beurtelings op het gebied der Wijsbegeerte en op dat der Zedekunde.

Curatoren zijn tevens met de beoordeeling der ingezonden antwoorden belast.

De prijs voor eene goedgekeurde Verhandeling bestaat in eene gouden medaille ter waarde van 250 gulden en 100 gulden in geld of wel, naar verkiezing, de geheele som in geld.

De Verhandelingen moeten in de Nederduitsche of in de Latijnsche taal geschreven zijn.

De nieuw uitgeschreven prijsvraag en het oordeel van HH. Curatoren van het Legaat over de ingezonden antwoorden, worden in de Leidsche Courant en in de Nederlandsche Staatscourant bekend gemaakt.

C. Het *Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam*, onder de zinspreuk: „Certos feret experientia fructus", gesticht in het jaar 1769 door STEVEN HOOGENDIJK [2]).

Om de 2 jaren houdt het Genootschap in de maand September eene Algemeene Vergadering, waarin nieuwe wetenschappelijke prijsvragen worden vastgesteld en waarin het oordeel over ingezonden antwoorden wordt bepaald.

De prijsvragen behooren in den regel tot het gebied der proefondervindelijke wijsbegeerte of van hare toepassingen in zeer ruimen zin.

Aan den schrijver van een, volgens het oordeel der Algemeene Vergadering voldoend antwoord op eene der voorgestelde wetenschappelijke vragen wordt de Gouden Gedenkpenning des Genoot-

---

1) In 1766 verscheen: *Dissertationes latinae et belgicae ad theologiam naturalem spectantes, pro praemio Legati Stolpiani conscriptae.* Tom. I. Lugduni Batavorum. Apud SAM. et JOH. LUCHTMANS, 1766.

2) Zie: *De oprigting en handelingen van het Bataafsch Genootschap*, in: Verhandelingen van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam. Eerste Deel, 1774, bl. I—LXI.

schaps, ter zwaarte van 30 dukaten, of de waarde, ter keuze van den schrijver, aangeboden.

De antwoorden moeten in het Nederlandsch, Fransch, Hoogduitsch, Engelsch of Latijn met eene Italiaansche letter geschreven zijn.

Het Programma wordt na de Algemeene Vergadering gezonden aan de Leden van het Genootschap en aan de verschillende Universiteits-bibliotheken binnens- en buitenslands. Het wordt ook opgenomen in WIEDEMANN's *Annalen*.

D. Het *Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen*, onder de zinspreuk: „Besteedt den tijd met kunst en vlijt", opgericht in 1773 [1]).

Het Genootschap telde aanvankelijk slechts 20 leden en de Prijsvragen waren van zeer algemeenen aard; de eerste twee b. v., in 1777 uitgeschreven, luidden: 1e. Over de Fabrieken en Trafieken in ons land. 2e. Over het voor- en nadeel der boomen in en om de steden.

Bij het toenemen van het aantal der leden werden deze in 3 Sectiën verdeeld: een van Natuur- en Geneeskundige Wetenschappen, een tweede van Letterkunde, Wijsbegeerte en Geschiedenis, een derde van Rechtsgeleerdheid en Staatswetenschappen.

In overeenstemming daarmede werden de uitgeschreven Prijsvragen later verdeeld in groepen, beantwoordende aan de splitsing der Leden van het Genootschap in Sectiën.

Op de jaarlijksche Algemeene Vergadering in de maand Juni wordt ook het oordeel omtrent de ingekomen prijsantwoorden vastgesteld. Deze kunnen, naar goedvinden van den schrijver, in de Nederduitsche, Hoogduitsche, Engelsche, Fransche of Latijnsche taal zijn opgesteld, maar moeten duidelijk met Italiaansche letters geschreven zijn.

De prijs bestaat in een Eerediploma en 300 gulden.

Ten gevolge van de wetsveranderingen, in de Algemeene Vergadering van Juni 1898 vastgesteld, zal het aantal der uit te schrijven prijsvragen voortaan vermoedelijk zeer gering zijn.

De programma's, in de Nederlandsche en Fransche taal gesteld, worden aan de voornaamste binnen- en buitenlandsche Tijdschriften gezonden.

---

[1]) Zie: *Verhandelingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen*. Eerste Deel, Utrecht 1781, bl. I—XIV.

E. TEYLER's *Stichting*, tot stand gekomen in 1778.

PIETER TEYLER VAN DER HULST, „een voornaam en zeer vermogend burger van Haarlem", aldaar geboren den 25 Maart 1702 en overleden den 8 April 1778, heeft bij testament een gedeelte van zijn aanzienlijk vermogen bestemd tot de oprichting van twee Collegiën, die sedert als TEYLER's Godgeleerd Genootschap en als TEYLER's Tweede Genootschap bekend zijn [1]).

I. TEYLER's Godgeleerd Genootschap.

De prijsvragen door dit Genootschap uitgeschreven moeten zijn „raakende den natuurlijken en geopenbaarden godsdienst".

In de jaarlijksche vergadering van Directeuren van TEYLER's Stichting en Leden van het Godgeleerd Genootschap in de maand October wordt de beoordeeling van ingekomen antwoorden vastgesteld en wordt een nieuwe of ook wel een oude prijsvraag uitgeschreven.

De prijs bestaat uit eene gouden medaille ter innerlijke waarde van 400 gulden.

Bij de beantwoording kan men zich van de Hollandsche, Latijnsche Fransche, Engelsche of Duitsche taal bedienen, van de laatste evenwel met eene Latijnsche letter.

Zoo spoedig mogelijk na de jaarlijksche Vergadering wordt het Programma in het Nederlandsch gedrukt en in zijn geheel opgenomen in de Oprechte Haarlemsche Courant, zijnde het aangewezen officiëel orgaan, waarin het oordeel over de ingekomen antwoorden wordt openbaar gemaakt.

Een exemplaar van het Programma wordt gezonden aan de Hoogleeraren in de Godgeleerdheid aan de verschillende Universiteiten in Nederland en aan vele theologische Tijdschriften met verzoek om opname; hieraan wordt door de meesten voldaan, in veel beknopteren vorm. Eene Duitsche vertaling wordt geplaatst in HILGENFELD's *Zeitschrift für wissenschaftliche Theologie* en verder gezonden aan de meest bekende theologische Tijdschriften in Duitschland en aan eenige in Frankrijk en Zwitserland.

---

[1]) Zie: *Verhandelingen raakende den natuurlijken en geopenbaarden Godsdienst*, uitgegeven door TEYLER's Godgeleerd Genootschap, 1e Deel, Haarlem 1781. Voorrede en Berigt en

Verhandelingen, uitgegeven door TEYLER's tweede Genootschap. Eerste stuk. Haarlem, 1781. Voorrede.

II. TEYLER's Tweede Genootschap.

De prijsvragen worden in Januari uitgeschreven, en betreffen, volgens een rooster, bij beurte een onderwerp uit de Natuurkunde, de Nederlandsche Letterkunde, de Geschiedenis, de Schilderkunst en de Penningkunde.

Omtrent de beoordeeling der antwoorden, de waarde van den eereprijs en de talen (met uitzondering van het Latijn), waarin de antwoorden mogen geschreven zijn, gelden in hoofdzaak dezelfde bepalingen als bij het Godgeleerd Genootschap.

Het Programma wordt opgenomen in de Oprechte Haarlemsche Courant en gezonden aan alle groote en provinciale Nieuwsbladen, aan de Java-Bode, de Gids, de Nederlandsche Spectator en de Indépendance Belge.

De vragen zijn in den regel gesteld in de Nederlandsche taal; alleen dan, wanneer het een onderwerp van artistieken aard betreft, ook in het Fransch. In dat geval wordt het Programma mede gezonden aan de buitenlandsche Tijdschriften op dit gebied.

F. Het *Wiskunstig Genootschap* onder de zinspreuk: „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" gevestigd te Amsterdam, opgericht in het jaar 1779 [1]).

Het Genootschap heeft ten doel de beoefening der wiskundige wetenschappen aan te moedigen en te bevorderen.

In een der eerste maanden van het Genootschapsjaar wordt eene Algemeene Vergadering gehouden.

De uitschrijving der vragen en de beoordeeling der ingekomen antwoorden, die liefst in de Nederlandsche taal moeten gesteld zijn, geschieden door eene afzonderlijke Commissie; deze dient haar Rapport in bij het Bestuur, dat over de voorgestelde bekroningen beslist en van deze beslissing aan de Algemeene Vergadering kennis geeft.

De bekroonde oplossingen kunnen in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* worden opgenomen.

Ieder lid, dat tien prijsvragen in hetzelfde jaar, of in verschillende

---

[1]) Zie o. a. *Wiskunstige Verlustiging*, in eene aaneenschakeling van uitgeleezene voorstellen met derzelver ontbindingen door het Genootschap der Mathematische Wetenschappen, onder de spreuk: „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Eerste Deel, Amsterdam, 1793, en

Wiskundige Verhandelingen van het Genootschap te Amsterdam, onder de spreuk: „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven", 1e Deel, 1e Stuk, Amsterdam 1817.

jaren voldoende beantwoordt, verwerft daardoor den rang van Lid van verdienste.

Buitenlanders kunnen, op voordracht van het Bestuur, door de Algemeene Vergadering tot Honorair Lid benoemd worden.

Het programma wordt aan de Leden toegezonden; in de beide laatste jaren is het ook geplaatst in het *Maandblad voor Natuurwetenschappen.*

G. Het *Haagsche Genootschap tot verdediging van den Christelijken Godsdienst*, opgericht den 19e October 1785. [1])

In den lateren tijd tracht het Genootschap door zijne prijsvragen werken uit te lokken, die licht verspreiden over den Bijbel en de onderscheidene vakken der Godgeleerde Wetenschap.

De najaarsvergadering van het Genootschap wordt jaarlijks gehouden in het begin van de maand September; alsdan doen de Bestuurders uitspraak over de ingekomen Verhandelingen en schrijven nieuwe Prijsvragen uit.

Op de voldoende beantwoording van elke prijsvraag wordt de som van 400 gulden uitgeloofd, welke som de schrijvers geheel in geld ontvangen, tenzij ze de gouden medaille van het Genootschap, ter waarde van 250 gulden, met 150 gulden in geld of de zilveren medaille met 385 gulden in geld verkiezen mochten.

De antwoorden moeten in de Nederlandsche, de Latijnsche, de Fransche, de Engelsche of de Duitsche taal, doch met een Romeinsche letter, geschreven zijn.

Het Programma wordt spoedig na de Najaarsvergadering, ook in het Fransch, Duitsch en Engelsch verspreid. Het wordt jaarlijks opgenomen in de volgende Tijdschriften en Bladen:

de Kerkelijke Courant. Weekblad voor de Nederduitsch Hervormde Kerk,

de Hervorming,

Stemmen voor Waarheid en Vrede,

---

[1]) De oorspronkelijke naam was: „Het Genootschap tot verdediging van den Christelijken godsdienst tegen deszelfs hedendaagsche bestrijders in 's Gravenhage". Na het 50 jarig bestaan werden de laatste woorden weggelaten.

Zie: H. J. Royaards. *Het Genootschap tot verdediging van de Christelijke godsdienst geschiedkundig geschetst.* Feestrede ter viering van het vijftigjarig bestaan des Genootschaps uitgesproken in 's Hage, den 23e October 1835. Met Aanteekeningen en Bijlagen. Utrecht, 1836, en

A. Kuenen. *Het Haagsche Genootschap tot verdediging van de Christelijke Godsdienst.* Gedenkschrift van zijn honderdjarig bestaan, 1785—1885. Leiden, 1885.

Geloof en Vrijheid,
Theologisch Tijdschrift,
Theologische Studiën,
de Oprechte Haarlemsche Courant,
Het Nieuws van den Dag.

Zeitschrift für Wissenschaftliche Theologie,
Studien und Kritiken,
Protestantische Kirchenzeitung,
Schweizerische Reformblätter,
Kirchlicher Anzeiger für Württemberg.

Revue de Théologie et de Philosophie,
en *in extracto* Le Protestant,
Le Témoignage,
L' Eglise libre,
La vie nouvelle,
Evangile et liberté,
Revue de l' histoire des Religions,
Revue Chrétienne.

Het zal voortaan ook ter plaatsing gezonden worden aan de Redactiën van nog te kiezen Engelsche en Amerikaansche Tijdschriften.

H. *Het Genootschap ter bevordering der Natuur-, Genees- en Heelkunde te Amsterdam.* [1])

Het Genootschap, in 1790 opgericht ter bevordering der Heelkunde, werd in 1840 uitgebreid tot bevordering der Genees- en Heelkunde en heeft, sedert 1870, tot doel de bevordering der Natuur- en Geneeskundige Wetenschappen.

In de Algemeene Vergadering van het Genootschap, die in den regel jaarlijks in de maand October gehouden wordt, geschiedt de beoordeeling van Verhandelingen, die naar eenigen prijs dingen en worden nieuw uit te schrijven Prijsvragen vastgesteld. In de laatste 2 jaar werd slechts één geschiedkundige prijsvraag opgegeven.

---

[1]) Zie: *Verhandelingen van het Genootschap ter Bevordering der Heelkunde te Amsterdam.* Amsterdam 1791. Voorrede.

De gewone prijs voor een bekroonde Verhandeling is eene gouden medaille, op den stempel van het Genootschap geschroefd, of de waarde in geld en een bronzen medaille.

Omtrent de taal, waarin de antwoorden moeten gesteld zijn, bevat de Wet van het Genootschap geenerlei bepalingen, evenmin omtrent de mededinging van Buitenlanders; deze zijn dus hierbij niet uitgesloten.

De prijsvragen worden alleen in het Nederlandsch gepubliceerd in het Verslag van de Algemeene Vergadering; zij worden dan in den regel door de Nieuwsbladen overgenomen.

SWAMMERDAM-*medaille.*

Ter herdenking van den 200-jarigen sterfdag van JOHANNES SWAMMERDAM werden op den 17 Februari 1880 in eene Buitengewone Vergadering van het Genootschap de volgende besluiten genomen:

> „1°. Door het Genootschap zal alle 10 jaren eene gouden medaille worden uitgeloofd, naar SWAMMERDAM te noemen en op den stempel van het Genootschap te slaan. Zij zal worden toegekend aan hem of haar, die op het gebied der door SWAMMERDAM beoefende vakken van wetenschap in die jaren belangrijke onderzoekingen heeft verricht;
>
> „2°. Die medaille zal het eerst worden toegekend in 1880, bij gelegenheid van het 90 jarig bestaan van het Genootschap."

Alstoen werd de SWAMMERDAM-medaille toegewezen aan Prof. CARL THEODOR VON SIEBOLD te München en in 1890 aan Prof. ERNST HAECKEL te Jena.

De lijst der Genootschappen en Stichtingen, zooals zij door den Belgischen Gezant werd gewenscht, is hiermede ten einde. Het onderzoek verder omtrent een aanzienlijk aantal andere Genootschappen en Vereenigingen heeft, wat de Prijsvragen betreft, slechts negatieve resultaten opgeleverd.

Ten slotte zij vermeld dat op het gebied van kunst (schilderen, beeldhouwen) hier te lande geene Prijsvragen worden uitgeschreven of „Concours" gehouden, waarbij ook Buitenlanders ter mededinging zijn toegelaten.

De Akademie meent hiermede aan den wensch van Uwe Excellentie te hebben voldaan.

Het Bestuur der Koninklijke Akademie
van Wetenschappen.

De ondergeteekenden hopen hiermede de hun opgedragen taak in den geest der Akademie te hebben volbracht.

Amsterdam, Maart en April 1899.

T. ZAAIJER.
FOCKEMA ANDREAE

Dit verslag zal, na goedkeuring ook in de Letterkundige Afdeeling, in afschrift aan den Minister van Binnenlandsche Zaken worden toegezonden.

Anatomie. — De Heer PEKELHARING brengt, ook namens den Heer WINKLER, het volgende verslag uit over de verhandeling van Dr. VAN WALSEM, getiteld: *„Proeve eener systematische methodiek van het normaal, het pathologisch mikroskopisch-anatomisch en anthropologisch onderzoek van het centrale zenuwstelsel”*.

Deze verhandeling, vergezeld van een groot aantal teekeningen en photographieën aan de Kon. Akademie van Wetenschappen ter opneming in hare verhandelingen aangeboden, beoogt een doel, dat voor de Neurologie, de Psychiatrie en de Anthropologie, zeer belangrijk is.

Van alle zijden is erkend, dat *stelselmatige* bewerking van het *menschelijk* centrale zenuwstelsel in de laboratoria onzer ziekenhuizen en krankzinnigengestichten, groot wetenschappelijk nut zou kunnen afwerpen, maar, hoewel de vorderingen der techniek heden ten dage de stelselmatige bewerking der uit het lijk genomen menschen-hersenen zouden toelaten, geschiedt zij bijna nergens.

De reden daarvan is voor een deel te zoeken in het feit, dat de operatie-techniek, volgens welke de makroskopische beschouwing van het menschelijk centrale orgaan gewoonlijk plaats vindt, onvoldoende voeling heeft gehouden met de eischen, welke moeten gesteld worden door hen, die een mikroskopisch-anatomisch of histologisch onderzoek er van beoogen.

Dientengevolge worden de hersenen, wanneer zij makroskopisch

zullen worden onderzocht, gewoonlijk voor een later onderzoek met den mikroskoop bedorven, terwijl zij, wanneer zij voor mikroskopische bewerking zijn bestemd, òf niet òf slecht makroskopisch worden beschreven.

Slechts een *ab ovo* met beide richtingen van onderzoek rekening houdende methode van prepareeren kan in deze, door ieder onbevooroordeelden onderzoeker toegegeven, leemte verbetering brengen.

Het scherp omlijnde doel, dat Dr. VAN WALSEM zich in de bovengenoemde verhandeling heeft gesteld, beoogt, door een zooal niet geheel nieuwe, dan toch van de gangbare vér afwijkende, volgens een vast schema opgebouwde, operatie-techniek, zoowel de *makrotomie* als de *mikrotomie* der hersenen, gelijkelijk tot hun recht te doen komen; de langs dien weg verkregen resultaten, wier fixatie langs photographischen weg hem zeer ter harte gaat, vereenigt hij vervolgens tot een geheel, zoodat hij kan voorslaan om van elk centraal-orgaan een standaard-beschrijving met onderling vergelijkbare gegevens te verzamelen, die in ieder voorkomend geval, op volmaakt dezelfde, stelselmatige wijze kan worden vastgesteld.

Had de schrijver zijn doel volmaakt bereikt, hij zou een nauwelijks hoog genoeg te schatten en diep doordringende hervorming in den arbeid der laboratoria voor hersen-anatomie en pathologie in het leven roepen.

Hij zelf is de eerste om in te zien, dat dit heden niet mogelijk is. Desniettemin heeft hij — rekening houdend met het standpunt, waarop heden ten dage, sectie-techniek, methodiek der conservatie, photographie, anatomie, makrotomie en mikrotomie der hersenen zich bevinden — een methode bedacht en haar sedert jaren met succes in Meerenberg toegepast, die mag gezegd worden aan zeer hooge eischen, zoowel door makrotomie als door mikrotomie der hersenen gesteld, te voldoen.

De groote verdienste van zijn methode is gelegen in de scherpzinnigheid, waarmeê de beteekenis van allerlei kleine kunstgrepen in den aanvang wordt in het licht gesteld. Zij voeren hem aan het einde tot resultaten, die, naar het oordeel uwer commissie, met geen andere methode van hersensectie bereikt worden.

Bij het aanleggen der zaagsnede reeds blijkt het bijv. hoe noodig het was, zich bij het begin rekenschap te geven, van hetgeen men doet.

Omdat hij *onderling vergelijkbare* photographieën van schedelbasis en schedeldak, in zijn standaard-beschrijving wenscht op te nemen, moet hij ten opzichte van vaste anatomische uitgangspunten alle schedels op vergelijkbare wijze doorzagen. Hij lost dit vraagstuk eenvoudig en bevredigend op.

Bij het insnijden der hersenvliezen, leert de schrijver ons rekening houden met een steeds verwaarloosden eisch der hersen-mikrotomie. Te haren behoeve, moet elke deformatie der hersenen in de conservatie-vloeistof vermeden. Er bestaat geen beter moule, waarin men de hersenen harden kan, dan de eigen vliezen, mits men er bij den aanvang op rekent; en de deformatie door uitzakking, verkeerde steunpunten enz. veroorzaakt, zijn door schrijver geheel vermeden kunnen worden.

Zijn methode brengt met zich, dat de scheiding van ruggemerg en hersenen op geheel andere wijze wordt uitgevoerd, als thans gebruikelijk is, een eisch, dien de mikrotomie reeds zeer dikwijls had doen hooren. De opening der hersenen zelf is eveneens een geheel andere geworden, en voldoet aan den eisch, dat men makroskopisch alles goed kan beschrijven en dat geen insnijdingen geschieden, die de hersenen voor de latere mikroskopische bewerking onbruikbaar maken.

VIRCHOW's wijze van opening is door den schrijver geheel verlaten, en hoewel hij MEYNERT's methode op den voet volgt, heeft hij een aantal minder doelmatige of onjuiste bijzonderheden, die haar werden verweten, gecorrigeerd op een wijze, die zijn methode het recht geeft, als een zelfstandige te gelden.

Het voordeel dezer methode is, dat zij nauwkeurige beschrijving van buiten- en binnenvlakte der hersenen toelaat, zonder het orgaan uit elkaar te nemen, terwijl het toch genoegzaam geopend wordt, om in toto gehard te worden, zonder dat injectie der bloedvaten met conservatie-vloeistof noodig is.

De harding, die dan in de moule der vliezen, zonder eenige deformatie mogelijk is, geeft hem dan ook resultaten, die bijv. die van RETZIUS in zijn beroemd werk beschreven, evenaren of overtreffen.

Daarna worden de hersenen in de 4 deelen gesplitst, waarin ook MEYNERT ze doet uiteenvallen: cerebellum, stam, linker- en rechter-hemispheer. Op scherpzinnige wijze worden deze vier tot een *stelselmatig tableau* gerangschikt en in deze stelselmatige rangschikking, na overwinning van alle practische bezwaren die dit meebracht, gephotografeerd.

De twee op deze wijze verkregen tableaux, vormen een nieuwe afdeeling van zijn standaard-beschrijving. Daarna volgt de stelselmatige makrotomie van elk dezer deelen, door middel van een door den schrijver uitgedacht makrotoom, dat met behulp van vaste anatomische uitgangspunten, een aantal evenwijdige doorsneden door elk der vier genoemde deelen maakt.

Deze doorsneden worden voor elk der vier stukken, *stelselmatig*

30

naast elkander in een tableau gerangschikt en aldus gephotografeerd. Aldus ontstaan van ieder centraal-orgaan vier tableaux van stelselmatig gerangschikte doorsneden.

Met dit alles heeft de schrijver den grondslag geleverd voor een standaard der makroskopische hersenbeschrijving, die wij tot nu toe missen. Wat de meer omvangrijke mikrotomie betreft, de schrijver heeft getracht (en de sedert jaren door hem met dit doel voor oogen in 't werk gestelde pogingen deden dit verwachten) er uitsluitend paraffine-mikrotomie van te maken.

Talrijke zwarigheden heeft hij te overwinnen gehad eer MINOT-ZIMMERMAN's mikrotoom geschikt was, om onafgebroken reeksen van doorsneden op elke dikte lintsgewijze te snijden. Talloos schier zijn de wijzigingen, die hij aanbracht;wij noemen slechts de meest belangrijke, de eenvoudige wijze, waarop hij met op constante temperatuur verwarmd mes snijdt, de wijze waarop hij de dunne, maar reusachtige doorsneden in volgorde op papier brengt, de strekking der gekronkelde paraffine, om van andere niet te spreken.

Uwe Commissie is van oordeel, dat de verhandeling van Dr. VAN WALSEM inderdaad een leemte aanvult. Zijn methode kan de grondslag worden die een stelselmatige bewerking van het centrale zenuwstelsel in ziekenhuizen en gestichten, die dringend noodzakelijk is, mogelijk maakt.

Hier en daar is de schrijver wellicht wat al te uitvoerig. Overleg met hem zou aanleiding kunnen geven tot eenige bekortingen. De verdienste van zijn arbeid bestaat echter juist in de overgroote nauwkeurigheid. Omdat hij geen enkele handelwijze aan het toeval overlaat, omdat elke zaagstreek, elke insnijding, elke doorsnede, elke stand van photografisch apparaat of van makrotoom wel overwogen is, is hij o. i. tot het belangrijk resultaat gekomen, dat wij noemden, maar is hij ook genoodzaakt geweest ook bij schijnbare kleinigheden uitvoerig stil te staan.

Uwe Commissie aarzelt dan ook niet, der Akademie in overweging te geven de verhandeling van Dr. VAN WALSEM met de bijlagen, zoozeer vereenvoudigd en bekort als bij wederzijdsch overleg mogelijk zal blijken, op te nemen in de verhandelingen der Akademie.

C. A. PEKELHARING.
C. WINKLER.

De conclusie van het verslag om de verhandeling na zoo mogelijke bekorting op te nemen in de Werken der Akademie wordt goedgekeurd.

Wiskunde. — De Heer KLUYVER doet eene mededeeling: „*Over herleidbare hyperelliptische integralen.*"

In sommige gevallen kan eene ABEL'sche integraal van de eerste soort en van het geslacht p tot eene elliptische integraal worden herleid. Volgens eene stelling van WEIERSTRASS [1]) brengt de aanwezigheid van eene dergelijke herleidbare integraal mede, dat men door eene substitutie van de orde r de ϑ-functie van de eerste orde kan doen overgaan in eene andere van de orde r, van dien aard, dat de $p-1$ elementen τ'_{12}, $\tau'_{13}, \ldots . \tau'_{1p}$ in de eerste rij der perioden-matrix elk voor zich de waarde nul aannemen. Is het omgekeerd mogelijk door eene substitutie van de orde r eene ϑ-functie te vinden, wier perioden-matrix deze bijzonderheid vertoont, dan is steeds minstens één der integralen van de eerste soort herleidbaar, en kan men op het RIEMANN'sche oppervlak T rationale functies construeeren, die dubbelperiodieke functies zijn van deze integraal.

Onderstel, dat men in de ϑ-functie met p veranderlijken $\vartheta(u; \tau)$, waarin u de p normaalintegralen en τ de gegeven perioden-matrix beteekent, eene substitutie uitvoert van de orde r, overeenkomende met de ABEL'sche matrix [2])

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}$$

van $2p$ rijen en $2p$ kolommen geheele getallen, zoodanig dat de afzonderlijke matrices α, β, α', β' voldoen aan de vergelijkingen

$$\alpha' = 0 \ , \ \overline{\alpha}\beta' = \overline{\beta}'\alpha = \alpha\overline{\beta}' = \beta'\overline{\alpha} = r \ , \ \overline{\beta}\beta' - \overline{\beta}'\beta = 0.$$

Volgens deze substitutie komen in de plaats der integralen u andere integralen w, bepaald door de vergelijking

$$u = \alpha w,$$

en $\vartheta(u; \tau)$ van de eerste orde wordt eene functie $\vartheta_r(w; \tau')$ van de orde r met eene perioden-matrix τ', die men kan vinden uit de vergelijking

$$\alpha\tau' = \beta + \tau\beta'.$$

---

[1]) KOWALEVSKI, *Acta Math.* IV, p. 395.

[2]) Voor de notatie vergelijke men: BAKER, *Abel's theorem and the allied theory.* Cambridge 1897.

Uit bovenstaande betrekkingen kan men onmiddellijk berekenen, welke aangroeiingen Ω de integralen w ondergaan, wanneer de normaalintegralen u door het beschrijven van eene willekeurige, gesloten kromme lijn op T aangroeien met

$$\omega = k + \tau k',$$

waarin k en k' twee kolomletters beteekenen.

Vooreerst heeft men

$$\alpha \Omega = \omega = k + \tau k',$$

en ook door vermenigvuldiging met de matrix $\overline{\beta}'$

$$\overline{\beta}' \alpha \Omega = r \Omega = \overline{\beta}' k + \overline{\beta}' \tau k'.$$

Uit

$$\alpha \tau' = \beta + \tau \beta'$$

volgt evenwel

$$\overline{\beta}' \tau = \tau' \overline{\alpha} - \overline{\beta},$$

zoodat voor het stelsel der aangroeiingen Ω van de integralen w verkregen wordt

$$r \Omega = \overline{\beta}' k - \overline{\beta} k' + \tau' \overline{\alpha} k'.$$

Neemt men nu aan, dat in de eerste rij der matrix τ' de elementen $\tau'_{12}, \tau'_{13} \ldots . \tau'_{1p}$ alle nul zijn, dan vindt men iedere aangroeiing Ω_1 van de integraal w_1 uitgedrukt door

$$r \Omega_1 = \beta'_1 k - \beta_1 k' + \tau'_{11} \alpha_1 k',$$

indien men door β'_1, β_1, α_1, de eerste kolommen der matrices β', β en α aangeeft.

Welke gesloten weg door de veranderlijke op T ook moge worden doorloopen, de periodiciteitsmoduli der integraal $r w_1$ zijn steeds veelvouden van 1 en τ'_{11}, en deze integraal is noodzakelijk eene elliptische integraal.

Men kan opmerken, dat in het geval $p = 2$ dezelfde gevolgtrekking gemaakt kan worden voor de integraal $r w_2$, zoodat voor $p = 2$ er of geen, of twee herleidbare integralen bestaan.

Aannemende, dat inderdaad $r w_1$ is eene elliptische integraal, kan men gemakkelijk van de functie $\theta(r w_1 ; \tau'_{11})$ met de enkele veranderlijke $r w_1$ en de periode τ'_{11} aangeven, hoeveel nulpunten zij op het oppervlak T bezit. Men heeft daartoe te berekenen de integraal

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{T}} d \log \theta (rw_1 ; \tau'_{11}),$$

genomen langs den rand van het enkelvoudig samenhangend oppervlak T', waarin T overgaat, wanneer men de gebruikelijke p paren van doorsneden A_h en B_h aanbrengt. Aan tegenovergestelde randen van eene doorsnede A_h heeft rw_1 waarden, waarvan het verschil β'_{h1} bedraagt, zoodat aan beide randen $d \log \theta (rw_1 ; \tau_{11})$ dezelfde waarde heeft en de integralen langs deze randen, in tegengestelde richtingen genomen, elkander opheffen. Anders is het met eene doorsnede B_h; de integraal rw_1 krijgt door het overschrijden dezer doorsnede eene aangroeiing

$$-\beta_{h1} + \tau'_{11}\,\alpha_{h1},$$

en daar

$$d \log \theta (rw_1 - \beta_{h1} + \tau'_{11}\,\alpha_{h1} ; \tau'_{11}) = d \log \theta (rw_1 ; \tau'_{11}) - 2\pi i\,\alpha_{h1}\, d\, rw_1,$$

komt er ten slotte

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{T}} d \log \theta (rw_1 ; \tau'_{11}) = -\sum_h \alpha_{h1}\int_{\widehat{B_h}} d\, rw_1 = \sum_h \alpha_{h1}\,\beta'_{h1} = r.$$

De functie $\theta (rw_1 ; \tau'_{11})$ bezit derhalve r nulpunten op T', zoodat elk quotient van twee thetakwadraten eene op het onversneden oppervlak T éénwaardige rationale functie met r dubbele nulpunten en r dubbele polen moet zijn. Zoodra derhalve een der integralen W van de eerste soort herleidbaar is, bestaan er vier tot een bundel behoorende geadjungeerde krommen R_1, R_2, R_3 en R_4, welke, afgezien van mogelijke gemeenschappelijke snijpunten met de fundamentaalkromme f, elk afzonderlijk deze laatste r malen raken, of althans in twee samenvallende punten snijden. De drie quotienten $R_1 : R_4$, $R_2 : R_4$, $R_3 : R_4$ zijn dan als quotienten van thetakwadraten, na voorzien te zijn van passende constante factoren, gelijk te stellen aan $\bar{p}W - \varepsilon_1$, $\bar{p}W - \varepsilon_2$, $\bar{p}W - \varepsilon_3$, waaruit volgt

$$\bar{p}'W = \frac{2}{R_4^2}\sqrt{R_1 R_2 R_3 R_4}.$$

Daar echter $\bar{p}'W$ eveneens éénwaardig is op T, zal het product der vier functies R door het kwadraat van eene rationale functie F kunnen worden vervangen, anders gezegd: door de $4r$ raakpunten van de krommen R gaat eene geadjungeerde kromme F, wier graad

het dubbel is van den graad der krommen R, die de fundamentaalkromme f raakt in de gemeenschappelijke snijpunten met de krommen R, en die overigens f alleen in de dubbelpunten snijdt. De elliptische integraal zelve is nu gegeven door de vergelijking

$$dW = \frac{R_4 \frac{dR_1}{dx} - R_1 \frac{dR_4}{dx}}{\sqrt{4 R_1 R_2 R_3 R_4}} dx,$$

of bij invoering van homogene veranderlijken x, y, z, door

$$\varrho\, dw = \frac{J(x, y, z)}{F} \cdot \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

waarin $J(x, y, z)$ de functionaaldeterminant van f en van den bundel der krommen R beteekent.

Intusschen is het duidelijk, dat bij aanwezigheid van eene herleidbare integraal W de krommen R nog geenszins zijn bepaald. De onderste grens van de integraal W is nog willekeurig, en wat geldt van de thetakwadraten met het argument W, geldt eveneens van de thetakwadraten met het argument $W + \alpha$. In de plaats van de functie R kunnen dus treden

$$\frac{S_1}{S_4} = \bar{p}(W + \alpha) - \varepsilon_1 \;,\; \frac{S_2}{S_4} = \bar{p}(W + \alpha) - \varepsilon_2 \;,\; \frac{S_3}{S_4} = \bar{p}(W + \alpha) - \varepsilon_3 \;,$$

welke functies in R_1, R_2, R_3, R_4 en F rationaal kunnen worden uitgedrukt. Blijkbaar is het mogelijk de constante α zoodanig te regelen, dat een der krommen S, bijv. S_1, in een gegeven punt x', y' aan f raakt, waardoor dan de $r-1$ overige raakpunten van S_1 volkomen algebraïsch bepaald zijn. Op deze wijze is het in te zien, dat het bestaan van eene elliptische integraal W altijd gepaard gaat met eene involutorische groepeering van de punten van de kromme f, van dien aard, dat de r punten van eene willekeurige groep als raakpunten van de eene of andere kromme S kunnen worden beschouwd.

Inzonderheid is de hierboven bedoelde onbepaaldheid der krommen R van belang voor de beschouwing van hyperelliptische krommen. Dan toch komt in de vergelijking der kromme f één der coördinaten, zeg y, slechts voor in de tweede macht, en alle rationale functies bevatten hoogstens de eerste macht van y. Het is dus steeds mogelijk de constante α zoo te kiezen, dat in de verhouding $S_1 : S_4$, en dan ook in de beide andere $S_2 : S_4$ en $S_3 : S_4$, de term met y ontbreekt.

Met andere woorden, bij eene hyperelliptische kromme met herleidbare integraal kan men van te voren aannemen, dat elk der krommen R, met behulp waarvan de herleiding tot stand komt, is uiteengevallen in eene groep van r rechte lijnen, door het veelvoudige punt der kromme getrokken.

Bleek in het voorafgaande het bestaan der functies R een noodzakelijk gevolg van de herleidbaarheid van een der integralen van de eerste soort, indien omgekeerd het bestaan der functies R mag worden ondersteld, is minstens één der integralen herleidbaar.

Want in deze onderstelling is de elliptische integraal

$$\int \frac{d\,\frac{R_1}{R_4}}{\sqrt{\frac{R_1}{R_4}\cdot\frac{R_2}{R_4}\cdot\frac{R_3}{R_4}}}$$

eene tot de kromme behoorende integraal van de eerste soort, omdat zij de gedaante

$$\int \frac{J(x, y, z)}{F}\cdot\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

kan aannemen.

Wat betreft de herleidbare niet hyperelliptische integralen, is het geval $p = 3$, $r = 2$ door Sophie Kowalevski behandeld. De kromme f is hier de algemeene kromme van den vierden graad, waarop, omdat $r = 2$ is, eene involutorische overeenkomst één aan één bestaat. Men bewijst, dat in dit geval de kromme in zich zelf moet kunnen overgaan door eene bepaalde perspectivische transformatie van het vlak met de dubbelverhouding -1. Dit heeft ten gevolge, dat door het centrum der transformatie vier dubbelraaklijnen der kromme gaan, zoodat hare vergelijking altijd gebracht kan worden in den vorm

$$f = xy\,(ax + by)\,(cx + dy) - K^2 = 0.$$

Het is in te zien, dat de vier door den oorsprong gaande dubbelraaklijnen als de krommen R kunnen worden beschouwd. Immers zij raken ieder f in twee punten aan, behooren tot een bundel, en de acht raakpunten worden door de kegelsnede K uitgesneden.

Voor de elliptische integraal W heeft men derhalve

$$\frac{\bar{p}W-\varepsilon_1}{\dfrac{x}{d}}=\frac{\bar{p}W-\varepsilon_2}{-\dfrac{y}{c}}=\frac{\bar{p}W-\varepsilon_3}{\dfrac{ax+by}{cx+dy}}=\frac{1}{cx+dy},$$

en de integraal zelve is

$$W=\int\frac{\dfrac{\partial K}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\,dx\ .$$

Het eenvoudigste geval van de herleidbare hyperelliptische integraal, $p=2$, $a=2$, was reeds aan LEGENDRE bekend. De kromme f is weder van den vierden graad, maar heeft thans een dubbelpunt waaruit zes raaklijnen naar de kromme getrokken kunnen worden. Is er eene herleidbare integraal, dan worden de eerste drie functies R telkens gevormd door een paar dezer raaklijnen; als vierde functie R_4 moet worden genomen een der beide dubbelelementen, tweemaal geteld, van de involutie, die nu noodzakelijk door de drie paar raaklijnen wordt gevormd.

Bij de kromme

$$f=xy^2-(x-1)(x-kl)(x-k)(x-l)$$

heeft men

$$R_1=x,\ R_2=(x-1)(x-kl),\ R_3=(x-k)(x-l),\ R_4=(x\pm\sqrt{kl})^2$$

en de herleidbare integraal is

$$W=\int\frac{(x\mp\sqrt{kl})\,dx}{xy}\ .$$

In overeenstemming met hetgeen uit de stelling van WEIERSTRASS bleek voor het geval $p=2$ worden hier twee onafhankelijke herleidbare integralen verkregen.

Van verschillende zijden is ook het geval $p=2$, $r=3$ beschouwd. Het geldt hier weder de kromme f van den vierden graad met een dubbelpunt, wier vergelijking wij nemen in den vorm

$$(x-a_1)(x-c_1)\,y^2=(x-a_2)(x-a_3)(x-c_2)(x-c_3)\,.$$

Door BURKHARDT [1]) is aangegeven de invariante betrekking, die zoo een der integralen herleidbaar is, tusschen de binaire cubische vormen $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$ en $(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)$ bestaat. Reeds eerder had GOURSAT [2]) een min of meer bijzonder geval van de herleidbaarheid behandeld en eindelijk heeft BURNSIDE [3]) na onderzoekingen van algemeenen aard nog terloops melding gemaakt van eene merkwaardige gedaante, die de herleidbare integraal altijd kan aannemen. Na de afleiding van eenige hunner uitkomsten, wordt hier nog een en ander aan deze uitkomsten toegevoegd.

Van de krommen R, die elk in drie rechte lijnen uiteenvallen, moet worden verlangd, dat zij de kromme f drie malen raken of in twee samenvallende punten snijden. Uit het dubbelpunt gaan, de buigraaklijnen aldaar medegeteld, zes raaklijnen aan de kromme. Drie daarvan $(x - a_1)$, $(x - a_2)$, $(x - a_3)$ leveren te zamen de kromme R_4, voegt men aan elk der overige raaklijnen $(x-c_1)$, $(x-c_2)$, $(x-c_3)$ eene dubbelgetelde lijn $(x - b_1)$, $(x - b_2)$, $(x - b_3)$ door het dubbelpunt toe, dan voldoen inderdaad de vier functies

$$R_1 = (x - c_1)(x - b_1)^2, \quad R_2 = (x - c_2)(x - b_2)^2,$$

$$R_3 = (x - c_3)(x - b_3)^2, \quad R_4 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$$

aan alle te stellen eischen, mits men zorgt de nog niet nader bepaalde grootheden b zoo te kiezen, dat de vier functies in involutie zijn. Met behulp van deze voorwaarde kan men de b's elimineeren, waarna nog één betrekking overblijft tusschen de wortelpunten a en c. Van eene herleidbare integraal zijn derhalve vijf wortelpunten naar willekeur te kiezen.

Herleidbare integralen van de hier bedoelde soort kan men gemakkelijk construeeren, indien men de vier tot eene involutie behoorende cubische binaire vormen opvat als eerste poolvormen van een bikwadratischen vorm α_x^4. Onder deze poolvormen zijn er vier van de gedaante $(x - c)(x - b)^2$ met een dubbelpunt; behalve R_1, R_2, R_3 behoort tot de involutie dus ook nog $(x - c_4)(x - b_4)^2$, en de vier grootheden b zijn reeds dadelijk bepaald als de wortels van den covariant van HESSE Δ_x^4. Ook c_1, c_2, c_3, c_4 zijn de wortels van een covariant, die door de volgende overweging wordt gevonden. De vier punten y, wier eerste poolvormen $\alpha_y\, \alpha_x^3$ een dubbelpunt b bevatten,

[1]) *Math. Annal.*, Bd. 36, 1890, p. 410

[2]) *Compt. Rendus*, 100, 1885, p. 622.

[3]) *Proc. Lond. Math. Soc.*, 23, 1892, p. 173.

zijn de wortels van den covariant[1]) $3\,i\,\Delta_x^4 - 2\,j\,\alpha_x^4$, waarin i en j de beide invarianten van α_x^4 beteekenen. Het resultaat van de eliminatie van y tusschen dezen covariant en $\alpha_x\,\alpha_y^3$, welk resultaat van den 12^{den} graad in x en van den 8sten graad in de coëfficiënten α is, moet een covariant zijn, die de grootheden b tot dubbele en de grootheden c tot enkele wortels heeft. Na deeling door de tweede macht van Δ_x^4 zal er een covariant van den 4^{den} graad in de coëfficiënten α overblijven, noodzakelijk van den vorm $\lambda\,i\,\Delta_x^4 + \mu\,j\,\alpha_x^4$, waarvan de wortels zijn c_1, c_2, c_3, c_4. Om de getallen-coëfficiënten λ en μ te bepalen dient het bijzondere geval

$$\alpha_x^4 = \frac{2\,i}{3\,j}\,x^2\,(x^2 - 1)\,, \quad \Delta_x^4 = -\frac{2}{3}\,(2\,x^4 + 1).$$

In dit geval heeft α_x^4 een dubbelpunt, de vier waarden van c zijn blijkbaar 0 en ∞, elk twee keer, en daar

$$i\,\Delta_x^4 + 2\,j\,\alpha_x^4 = -\,2\,i\,x^2\,,$$

moet men nemen $\lambda = 1$ en $\mu = 2$. Algemeen zijn dus de grootheden k bepaald door de vergelijking

$$i\,\Delta_x^4 + 2\,j\,\alpha_x^4 = 0\,.$$

Zoodra men nu van deze vergelijking één wortel c_4 als bekend onderstelt, kan men eene herleidbare integraal construeeren. Immers men kan dan aannemen

$$\alpha_z\,\alpha_x^3 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)\,,$$

$$\frac{1}{x - c_4}\,(i\,\Delta_x^4 + 2\,j\,\alpha_x^4) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\,,$$

waaruit volgt

$$R_4\,\frac{dR_1}{dx} - R_1\,\frac{dR_4}{dx} = \varrho\,\Delta_x^4\,,$$

$$\sqrt{R_1\,R_2\,R_3\,R_4} = \frac{\Delta_x^4}{x - b_4}\sqrt{\alpha_z\,\alpha_x^3\,.\,\frac{1}{x - c_4}\,(i\,\Delta_x^4 + 2\,j\,\alpha_x^4)}\,,$$

---

[1]) Clebsch-Lindemann. *Vorlesungen*, I, p. 231.

zoodat

$$W = \int \frac{(x - b_4)\, dx}{\sqrt{\alpha_z\, \alpha_x^3 \,.\, \frac{1}{x - c_4} (i\, \Delta_x^4 + 2\, j\, \alpha_x^4)}}$$

eene bij de gegeven vergelijking behoorende integraal van de eerste soort is, welke door de substitutie

$$\frac{\bar{p}\, W - \varepsilon_1}{\varrho_1\, (x - c_1)(x - b_1)^2} = \frac{\bar{p}\, W - \varepsilon_2}{\varrho_2\, (x - c_2)(x - b_2)^2} =$$

$$= \frac{\bar{p}\, W - \varepsilon_3}{\varrho_3\, (x - c_3)(x - b_3)^2} = \frac{1}{\varrho_4\, (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}$$

in eene elliptische integraal met de veranderlijke $\bar{p}\, W$ verandert.

Het is in te zien, dat het op deze wijze mogelijk is, de integraal uit vijf gegeven wortelpunten te construeeren. Geeft men de vijf wortelpunten a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, dan moet een bikwadratische vorm α_x^4 worden gezocht, die een gegeven derdemachtsvorm A_x^3 met de wortels a_1, a_2. a_3 tot eersten poolvorm heeft. Er is dus eene identieke vergelijking van de gedaante

$$\alpha_z\, \alpha_x^3 = \varrho\, A_x^3\,,$$

waaruit men afleidt

$$\frac{z\, \alpha_0 + \alpha_1}{A_0} = \frac{z\, \alpha_1 + \alpha_2}{A_1} = \frac{z\, \alpha_2 + \alpha_3}{A_2} = \frac{z\, \alpha_3 + \alpha_4}{A_3}.$$

Deze vergelijkingen bepalen vooreerst z, buitendien blijven er voor de coëfficiënten van α_x^4 nog twee betrekkingen over, uitgedrukt door twee van de vier onderstaande vergelijkingen

$$6\, A_2\, \Delta_0 - 12\, A_1\, \Delta_1 + 6\, A_0\, \Delta_2 = A_0\, i,$$

$$2\, A_3\, \Delta_0 - 6\, A_1\, \Delta_2 + 4\, A_0\, \Delta_3 = A_1\, i,$$

$$4\, A_3\, \Delta_1 - 6\, A_2\, \Delta_2 + 2\, A_0\, \Delta_4 = A_2\, i,$$

$$6\, A_3\, \Delta_2 - 12\, A_2\, \Delta_3 + 6\, A_1\, \Delta_4 = A_3\, i.$$

Nog twee voorwaarden bestaan er voor α_x^4, namelijk dat het vierde en het vijfde gegeven wortelpunt, c_1 en c_2, wortels zijn van den covariant $i\, \Delta_x^4 + 2\, j\, \alpha_x^4$ en uit de gezamenlijke vier voorwaarden is de vorm α_x^4 geheel en al te bepalen, waarna ook het zesde wortelpunt c_3 van de integraal als bekend is te beschouwen.

Het door GOURSAT behandelde voorbeeld verkrijgt men door te stellen

$$A_1 = 0\ ,\quad \alpha_1 = 0\ ,\quad \alpha_2 = 0\,.$$

Alsdan is

$$\Delta_0 = 0,\quad \Delta_1 = \alpha_0\,\alpha_3,\quad \Delta_2 = \frac{1}{3}\,\alpha_0\,\alpha_4,\quad \Delta_3 = 0,\quad \Delta_4 = -\,2\,\alpha_3^2,$$

$$i = 2\,\alpha_0\,\alpha_4\ ,\quad j = -\,6\,\alpha_3^2\,\alpha_0\ ,$$

terwijl de coëfficiënten α nog voldoen aan de vergelijking

$$A_3\,\alpha_0\,\alpha_3 - A_2\,\alpha_0\,\alpha_4 - A_0\,\alpha_3^2 = 0.$$

Verder is

$$i\,\Delta_x^4 + 2\,j\,\alpha_x^4 = 4\,\alpha_0\,(3\,\alpha_3\,x + \alpha_4)(-\,\alpha_0\,\alpha_3\,x^3 + \alpha_0\,\alpha_4\,x^2 - 4\,\alpha_3^2),$$

zoodat de drie wortelpunten c_1, c_2, c_3 aangemerkt moeten worden als de wortels van den cubischen vorm

$$C_0\,x^3 + 3\,C_1\,x^2 + C_3 = -\,\alpha_0\,\alpha_3\,x^3 + \alpha_0\,\alpha_4\,x^2 - 4\,\alpha_3^2,$$

en men zich c_4 bepaald moet denken door $3\,\alpha_4\,x + \alpha_4 = 0$, in overeenstemming met den wortel $b_4 = \infty$ van den covariant van HESSE Δ_x^4

Aldus blijkt de integraal

$$W = \int \frac{d\,x}{\sqrt{(A_0\,x^3 + 3\,A_2\,x + A_3)(C_0\,x^3 + 3\,C_1\,x^2 + C_3)}}$$

herleidbaar te zijn onder de voorwaarde, dat de coëfficiënten A en C voldoen aan

$$A_0\,C_3 = 4\,A_3\,C_0 + 12\,A_2\,C_1\,.$$

De substitutie-formules, waardoor de herleiding tot stand komt, zijn

$$\frac{\bar{p}\,W - \varepsilon_1}{\varrho_1\,(x-c_1)\,(x-b_1)^2} = \frac{\bar{p}\,W - \varepsilon_2}{\varrho_2\,(x-c_2)\,(x-b_2)^2} = \frac{\bar{p}\,W - \varepsilon_3}{\varrho_3\,(x-c_3)\,(x-b_3)^2} =$$
$$= \frac{1}{A_0\,x^3 + 3\,A_2\,x + A_3},$$

waaruit men ook kan afleiden

$$\lambda\,\bar{p}\,W + \mu = \frac{C_0\,x - C_1}{A_0\,x^3 + 3\,A_2\,x + A_3}.$$

De tweede herleidbare integraal verkrijgt men door $C_0 x^3 + 3 C_1 x^2 + C_3$ als eersten poolvorm van een bikwadratischen vorm $\alpha_x{}^4$ te beschouwen. De covariant van Hesse Δ_x^4 zal bij deze onderstelling den wortel $b_4 = 0$ hebben, en de poolvorm $(x-c_4)(x-b_4)^2$ zal zijn van de gedaante $x^2(A_2 x - A_3)$. De gezochte integraal is derhalve

$$W = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(A_0 x^3 + 3 A_2 x + A_3)(C_0 x^3 + 3 C_1 x^2 + C_3)}},$$

terwijl men zal hebben te substitueeren

$$\lambda \bar{p} W + \mu = \frac{x^2 (A_2 x - A_3)}{C_0 x^3 + 3 C_1 x^2 + C_3}.$$

Een ander middel ter constructie van herleidbare integralen berust op een eigenaardigen vorm, dien men steeds aan de invariante betrekking tusschen de zes wortelpunten kan geven.

Uit de identieke vergelijking

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) = \lambda_1 (x-c_1)(x-b_1)^2 + \lambda_2 (x-c_2)(x-b_2)^2$$

leidt men af door de achtereenvolgende substituties $x = a_1, a_2, a_3$,

$$\frac{(a_1-c_1)(a_1-b_1)^2}{(a_1-c_2)(a_1-b_2)^2} = \frac{(a_2-c_1)(a_2-b_1)^2}{(a_2-c_2)(a_2-b_2)^2} = \frac{(a_3-c_1)(a_3-b_1)^2}{(a_3-c_2)(a_3-b_2)^2},$$

of ook

$$\frac{(a_1-b_1)\sqrt{\dfrac{a_1-c_1}{a_1-c_2}}}{a_1-b_2} = \frac{(a_2-b_1)\sqrt{\dfrac{a_2-c_1}{a_2-c_2}}}{a_2-b_2} = \frac{(a_3-b_1)\sqrt{\dfrac{a_3-c_1}{a_3-c_2}}}{a_3-b_2}.$$

Door vermenigvuldiging van teller en noemer dezer drie breuken in volgorde met (a_2-a_3), (a_3-a_1) en (a_1-a_2) geeft de optelling

$$0 = (a_2-a_3)(a_1-b_1)\sqrt{\frac{a_1-c_1}{a_1-c_2}} + (a_3-a_1)(a_2-b_1)\sqrt{\frac{a_2-c_1}{a_2-c_2}} +$$
$$+ (a_1-a_2)(a_3-b_1)\sqrt{\frac{a_3-c_1}{a_3-c_2}}.$$

Door verwisseling van c_2 met c_3 komt er

$$0 = (a_2 - a_3)(a_1 - b_1)\sqrt{\frac{a_1 - c_1}{a_1 - c_3}} + (a_3 - a_1)(a_2 - b_1)\sqrt{\frac{a_2 - c_1}{a_2 - c_3}} +$$

$$+ (a_1 - a_2)(a_3 - b_1)\sqrt{\frac{a_3 - c_1}{a_3 - c_3}},$$

en voegt men hieraan toe de identieke vergelijking

$$0 = (a_2 - a_3)(a_1 - b_1) + (a_3 - a_1)(a_2 - b_1) + (a_1 - a_2)(a_3 - b_1),$$

dan kunnen $(a_1 - b_1)$, $(a_2 - b_1)$ on $(a_3 - b_1)$ worden geëlimineerd, en de invariante betrekking tusschen de wortelpunten van eene herleidbare integraal komt te voorschijn in den vorm

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_1 - c_1}} & \frac{1}{\sqrt{a_2 - c_1}} & \frac{1}{\sqrt{a_3 - c_1}} \\ \frac{1}{\sqrt{a_1 - c_2}} & \frac{1}{\sqrt{a_2 - c_2}} & \frac{1}{\sqrt{a_3 - c_2}} \\ \frac{1}{\sqrt{a_1 - c_3}} & \frac{1}{\sqrt{a_2 - c_3}} & \frac{1}{\sqrt{a_3 - c_3}} \end{vmatrix},$$

in welken determinant de argumenten der negen wortelgrootheden slechts op veelvouden van π na zijn bepaald. De symmetrie tusschen de a's en de c's doet zien, dat zoodra de involutie, die tot uitgangspunt diende, bestaat, er door eenvoudige verwisseling van de a's en de c's eene tweede dergelijke involutie kan worden opgespoord, zoodat steeds een tweetal herleidbare integralen wordt verkregen.

Door BURNSIDE is zonder bewijs vermeld, dat bij de kromme

$$xy^2 = (x-1)(x - sn^2 u)\left(x - sn^2\left(u + \frac{2K}{3}\right)\right)\left(x - sn^2\left(u - \frac{2K}{3}\right)\right)$$

herleidbare integralen behooren. De vorm, die hier aan de invariante betrekking tusschen de zes wortelpunten is gegeven, veroorlooft om op eenvoudige wijze de juistheid van deze opmerking aan te toonen.

Namelijk geven de zoo regelmatig voorkomende wortelvormen hier vanzelf aanleiding om in plaats der a's en der c's elliptische functies in te voeren.

Wij stellen

$$\begin{aligned} a_1 &= e_1, & c_1 &= pu_1 = p(u + v_1), \\ a_2 &= e_2, & c_2 &= pu_2 = p(u + v_2), \\ a_3 &= e_3, & c_3 &= pu_3 = p(u + v_3). \end{aligned}$$

Daardoor gaat de invariante betrekking over in

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\sigma u_1}{\sigma_1 u_1} & \frac{\sigma u_2}{\sigma_1 u_2} & \frac{\sigma u_3}{\sigma_1 u_3} \\ \frac{\sigma u_1}{\sigma_2 u_1} & \frac{\sigma u_2}{\sigma_2 u_2} & \frac{\sigma u_3}{\sigma_2 u_3} \\ \frac{\sigma u_1}{\sigma_3 u_1} & \frac{\sigma u_2}{\sigma_3 u_2} & \frac{\sigma u_3}{\sigma_3 u_3} \end{vmatrix} .$$

De determinant is als functie van u beschouwd dubbelperiodiek. De functie heeft stellig verschillende nulpunten, bijv. $u = -v_1$, aan de vergelijking is dus zekerlijk voldaan, als men v_1, v_2, v_3 zoo kiest, dat de functie geen polen heeft. Negen polen zouden er kunnen zijn, daar elk der noemers nul gemaakt kan worden. Men heeft derhalve te onderzoeken of het mogelijk is om de residuen dezer polen op nul te brengen. Neemt men bijv. de pool overeenkomende met $\sigma_\alpha u_1 = 0$, dus $u = -v_1 + \omega_\alpha$, dan is het residu evenredig met

$$\frac{\sigma_\gamma u_2 \, \sigma_\beta u_3 - \sigma_\beta u_2 \, \sigma_\gamma u_3}{\sigma_\gamma u_2 \, \sigma_\beta u_2 \, \sigma_\gamma u_3 \, \sigma_\beta u_3},$$

indien daarin werkelijk $u = -v_1 + \omega_2$ wordt gesubstitueerd.

De uitdrukking voor het residu kan evenwel herleid worden tot

$$\frac{2(e_2 - e_3)\, \sigma \frac{u_2 + u_3}{2} \, \sigma \frac{u_2 - u_3}{2} \, \sigma_\alpha \frac{u_2 + u_3}{2} \, \sigma_\alpha \frac{u_2 - u_3}{2}}{\sigma_\gamma u_2 \, \sigma_\beta u_2 \, \sigma_\gamma u_3 \, \sigma \beta u_3},$$

en dit is nul, zoo slechts voor $u = -v_1 + \omega_\alpha$ tegelijk $\frac{1}{2}(u_2 + u_3) \equiv \omega_\alpha$ is. Dit nu geschiedt, indien men heeft

$$\tfrac{1}{2}(v_2 + v_3 - 2v_1) \equiv 0,$$

en de residuen van alle negen polen verdwijnen, wanneer buitendien nog voldaan is aan

$$\tfrac{1}{2}(v_3 + v_1 - 2v_2) \equiv 0,$$

$$\tfrac{1}{2}(v_1 + v_2 - 2v_3) \equiv 0.$$

Als oplossing dezer vergelijkingen kan genomen worden

$$v_1 = \frac{4\Omega_1}{3}\ ,\ v_2 = \frac{4\Omega_2}{3}\ ,\ v_3 = \frac{4\Omega_3}{3},$$

wanneer $2\Omega_1$, $2\Omega_2$, $2\Omega_3$ perioden zijn, verbonden door de vergelijking

$$\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0.$$

Zoo wordt derhalve als herleidbare integraal gevonden

$$W = \int \frac{(x-b_4)\,dx}{\sqrt{(4x^3-g_2x-g_3)\left(x-p(u+\frac{4\Omega_1}{3})\right)\left(x-p(u+\frac{4\Omega_2}{3})\right)\left(x-p(u+\frac{4\Omega_3}{3})\right)}}.$$

Elke herleidbare integraal, waarvan vijf wortelpunten a_1, a_2, a_3, c_1, c_2 gegeven zijn, is door lineaire substitutie in deze gedaante te brengen. Immers uit de twee vergelijkingen

$$\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3} : \frac{c_1-a_2}{c_1-a_3} = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} : \frac{p\,(u+\frac{4\Omega_1}{3})-e_2}{p\,(u+\frac{4\Omega_1}{3})-e_3},$$

$$\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3} : \frac{c_2-a_2}{c_2-a_3} = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} : \frac{p\,(u+\frac{4\Omega_2}{3})-e_2}{p\,(u+\frac{4\Omega_2}{3})-e_3}$$

kan men de verhouding $e_1 : e_2 : e_3$ en het argument u bepalen.

Eene eenigszins ingewikkelde berekening levert de waarden der grootheden b en de substitutieformules. Stellende

$$p\,(u_2-u_3) = p\,(u_3-u_1) = p\,(u_1-u_2) = pv,$$

zijn de uitkomsten in het kort de volgende:

$$b_1 = -\,2p\,v + p'v\,.\,\frac{pu_2-pu_3}{p'u_2+p'u_3}\ ,\ b_2 = -\,2p\,v + p'v.\,\frac{pu_3-pu_1}{p'u_3+p'u_1},$$

$$b_3 = -\,2p\,v + p'v.\,\frac{pu_1-pu_2}{p'u_1+p'u_2},$$

$$b_4 = \begin{vmatrix} b_1+2pu_1 & b_2+2pu_2 & b_3+2pu_3 \\ b_1pu_1 & b_2pu_2 & b_3pu_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} pu_1 & pu_2 & pu_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Verder zijn de substitutieformules

$$\bar{p}\,W-\varepsilon_1=(pu_2+pu_3+px)\,\frac{(x-pu_1)\,(x-b_1)^2}{4x^3-g_2x-g_3}\,,$$

$$\bar{p}\,W-\varepsilon_2=(pu_3+pu_1+pv)\,\frac{(x-pu_2)\,(x-b_2)^2}{4x^3-g_2x-g_3}\,,$$

$$\bar{p}\,W-\varepsilon_3=(pu_1+pu_2+pv)\,\frac{(x-pu_3)\,(x-b_3)^2}{4\,x^3-g_2\,x-g_3}\,,$$

zoodat de wortels der ingevoerde $\bar{p}$-functie zijn

$$\varepsilon_2-\varepsilon_3=pu_2-pu_3\,,\ \varepsilon_3-\varepsilon_1=pu_3-pu_1\,,\ \varepsilon_1-\varepsilon_2=pu_1-pu_2\,.$$

Door de wortelpunten a met de wortelpunten c te verwisselen, kan de tweede herleidbare integraal worden verkregen.

Gaat men over tot de herleidbare hyperelliptische integralen van het geslacht $p=3$, dan is het in te zien, dat ook deze op grond van de voorafgaande beschouwingen zonder veel moeite kunnen worden geconstrueerd. Denkt men zich de kromme f gegeven door de vergelijking

$$(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)\,y^2=(x-a_4)\,(x-a_5)\ldots.(x-a_8)\,,$$

d.i. denkt men zich f als eene kromme van den vijfden graad met een drievoudig punt, waaruit acht raaklijnen aan de kromme getrokken kunnen worden, dan heeft men in het geval $r=2$ de krommen R_1, R_2, R_3, R_4 elk uit een tweetal dezer raaklijnen samen te stellen. De tweevoudige voorwaarde voor de herleidbaarheid drukt uit, dat deze vier paar raaklijnen eene involutie vormen, en eene korte berekening voert tot het besluit, dat wanneer de vorm Ax^2+Bx+C de dubbelelementen der involutie aangeeft, de herleidbare integraal de gedaante

$$\int\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)y}\,dx$$

zal hebben.

Ook het onderzoek van het geval $p=3$, $r=3$, sluit zich gereedelijk aan dat van het behandelde geval $p=2$, $r=3$.

Laat de vergelijking van de kromme thans zijn

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\,y^2=(x-a'_1)(x-a'_2)(x-a'_3)(x-c_1)(x-c_2).$$

Het drietal raaklijnen $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ beschouwen wij als

de kromme R_1, evenzoo vereenigen wij het tweede drietal $(x-a'_1)$ $(x-a'_2)$ $(x-a'_3)$ tot eene kromme R_2; de derde kromme R_3 zal zijn het produkt van de volgende raaklijn $(x-c_1)$ en van eene tweemaal getelde lijn $(x-b_2)$ door het dubbelpunt, terwijl op dezelfde wijze uit de raaklijn $(x-c_2)$ en de dubbele lijn $(x-b_2)$ de kromme R_4 is samengesteld.

De tweevoudige voorwaarde voor de herleidbaarheid is, dat de vier binaire vormen

$$R_1=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\,, \qquad R_2=(x-a'_1)(x-a'_2)(x-a'_3)\,,$$

$$R_3=(x-c_1)(x-b_1)^2\,, \qquad R_4=(x-c_2)(x-b_2)^2$$

tot eene involutie behooren. Dit nu zal blijkbaar plaats vinden, zoo c_1 en c_2 twee wortels zijn van een covariant $i\,\Delta^4_x+2\,j\,\alpha_x{}^4$, waarbij $\alpha_x{}^4$ de bikwadratische vorm is, welke R_1 en R_2 tot eerste poolvormen heeft. De grootheden b_1 en b_2 zijn twee wortels van Δ^4_x, noemt men b_3 en b_4 de beide andere, dan is

$$W=\int\frac{(x-b_3)\ (x-b_4)\ dx}{\sqrt{\alpha_z\,\alpha_x{}^3\ .\ \alpha_t\,\alpha_x{}^3\ .\ \dfrac{1}{(x-c_1)\ (x-c_2)}(i\,\Delta^4_x+2\,j\,\alpha_x{}^4)}}$$

eene herleidbare integraal.

Als voorbeeld moge gewezen worden op het onderstaande geval

$$\alpha_x{}^4=k_1{}^2\,x^4+4\,k_1\,x^3+6\,x^2+4\,k_2x+k_2{}^2,$$

$$i=2\,(k_1\,k_2-1)\,(k_1\,k_2-3),\ j=-\,6\,(k_1\,k_2-1)^2,$$

$$\Delta^4_x=2\,(k_1\,k_2-1)\,(2\,k_1\,x^3+(k_1\,k_2+3)\,x^2+2\,k_2\,x),$$

$$\alpha_z\,\alpha_x{}^3=k_1{}^2\,x^3+3\,k_1\,x^2+3\,x+k_2,\ \ \alpha_t\,\alpha_x{}^3=k_1\,x^3+3\,x^2+3\,k_2\,x+k_2{}^2,$$

$$i\Delta^4_x+2\,j\,\alpha_x{}^4=\varrho\,(3\,x+k_2)\,(x\,k_1+3)\,(k_1\,x^2+(3-k_1\,k_2)\,x+k_2).$$

De covariant van Hesse Δ^4_x heeft twee bijzondere wortels $b_3=0$, $b_4=\infty$; de overeenkomstige grootheden c_3 en c_4 zijn gegeven door $3\,x+k_2=0$, $x\,k_1+3=0$, terwijl c_1 en c_2 de wortels zijn van $k_1\,x^2+(3-k_1\,k_2)\,x+k_2=0$. Als herleidbare integraal is op deze wijze verkregen

$$W=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(k_1{}^2x^3+3k_1x^2+3x+k_2)(k_1x^3+3x^2+3k_2x+k_2{}^2)(k_1x^2+(3-k_1k_2)x+k_2)}}.$$

waarin men onder het wortelteeken elk der beide derdemachtsfactoren door lineaire combinaties dezer factoren mag vervangen. De herleiding van de integraal zal tot standkomen als men substitueert

$$\frac{A\,\bar{p}\,W + B}{C\,\bar{p}\,W + D} = \xi = \frac{x^3\,k_1 + 3\,x^2}{3\,x + k_2}.$$

Het geval $p = 4$, $r = 3$ laat blijkbaar eene volkomen analoge behandeling toe. Zeven wortelpunten van de integraal zijn naar willekeur aan te nemen, en de drievoudige voorwaarde, welke de drie overige wortelpunten bepaalt, is weder door de beschouwing der cubische involutie onmiddellijk aan te geven.

Physiologie. — De Heer WINKLER spreekt over onderzoekingen door hem en den Heer WIARDI BECKMAN verricht: „*Over den invloed, dien de ademhaling ondergaat, door faradische prikkeling van eenige sensibele- en zintuigszenuwen.*"

In een der vorige vergaderingen der Akademie [1]) heb ik de resultaten medegedeeld, van experimenten op honden, met den Heer WIARDI BECKMAN verricht. Wij beoogden toen, de ademhalingsveranderingen te leeren kennen, na faradische prikkeling der frontale hersenschors dezer dieren. Het resultaat was afdoende. Een bepaald deel der voorhoofdschors beantwoordt faradische prikkels met vermeerderde werkzaamheid der inspiratie-centra, die wij gewoon zijn in de medulla oblongata aan te nemen.

Sterke stroomen roepen inspiratiedwang (resp. met onderdrukking der expiratie) te voorschijn. Zwakke stroomen voeren tot versnelling der respiratie. Beide effecten kunnen naast elkander voorkomen. Met MUNK [2]) en SPENCER [3]) kozen wij dus tegen HITZIG [4]) en FRANÇOIS FRANCK [5]) in dit vraagstuk partij.

Bij deze experimenten was ons gebleken, hoe uiterst zelden

---

[1]) Versl. der Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. 29 Oct. 1898. p. 143.

[2]) HERMAN MUNK. Ueber die Functionen der Groszhirn-Rinde. Elfte Mittheilung. 1890. S. 189. (Gelesen in der Gesammt-Sitzung der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, am 20 Juli 1882).

[3]) W. G. SPENCER. Philosophical Transactions of the Royal Society. London 1895. Vol. 185., p. 609. The effect produced upon Respiration by faradic excitation of the cerebrum in the monkey, dog, cat and rabbit.

[4]) EDUARD HITZIG. Untersuchungen ueber das Gehirn. Berlin 1874 S. 84.

[5]) FRANÇOIS FRANCK. Leçons sur les fonctions du cerveau. Paris 1887. p. 126—162.

regelmatige ademhaling bij de ons ten dienste staande proefdieren voorkomt. Schijnbaar spontaan ziet men nu eens versnellingen in den rythmus der ademhaling ontstaan, dan weer ziet men diepere of zeer diepe inspiraties met oppervlakkige afwisselen. Dit alles kan plaats vinden zonder dat eenige electrische prikkel heeft ingewerkt, en was voor onze experimenten uiterst storend.

Het lag voor de hand om twee omstandigheden voor de weinige regelmaat der ademhaling bij onze dieren aansprakelijk te stellen.

De *narcose*, die wegens de pijnlijkheid der operatie niet kon worden gemist, en de ingrijpende *operatie*, noodzakelijk om de hersenschors voor ons doel bloot te leggen, oefenen inderdaad invloed op de ademhaling uit en wel in dien zin, dat zij de werkzaamheid van alle inspiratoire functies verhoogen.

De invloed der morphine.

Al onze proefdieren (ruim 20 honden) waren in aether-narcose geopereerd, nadat vooraf een geringe hoeveelheid murias morphici (± 0.005—0.010 Gram pro kilo dier) was ingespoten. Het is bekend, dat aether-narcose snel voorbijgaat. Onze experimenten begonnen op zijn vroegst, één uur na het ophouden der aether-narcose. Zij mag dus buiten bespreking blijven. Al was ons ook gebleken, dat aether de onregelmatige ademhaling regelmatig maken kan, toch moesten wij, bij den onberekenbaren invloed, welken aether op de prikkelbaarheid der hersenschors heeft, vermijden van dit vergif gebruik te maken.

Anders was het met de kleine hoeveelheid morphine, die wij ongeveer 4 uur voor 't begin onzer experimenten hadden ingespoten. Wij deden dit deels om de honden langen tijd rustig (weinig gevoelig voor pijn) te houden, deels ook, omdat wij, bij de voor onze experimenten noodige schorsprikkeling, gebruik wilden maken van de eenigszins verhoogde prikkelbaarheid der psycho-motorische centra door morphine in 't leven geroepen.

De invloed der morphine op de ademhaling is bij al onze dieren merkbaar. De ademhaling mag in verband met de zeer matige gift morphine iets langzamer en dieper dan te voren zijn, maar, en dit is kenmerkend, zij wordt, af en toe, soms herhaaldelijk afgewisseld, door een snelle en zeer diepe inspiratie, gevolgd door een langzame en gerekte (onderdrukte) expiratie. Deze op een diepe, langgerekte zucht gelijkende, door ons „morphinezucht" genoemde bizonderheid, komt bij alle gemorphiniseerde honden voor. (Fig. 1).

Geluiden in de omgeving, bijv. klappen in de handen, het snorren

van den hamer van het inductie-apparaat, kunnen haar te voorschijn roepen. Dikwijls, meestal zelfs, schijnt zij, zonder invloed van buiten, te ontstaan.

Naast deze typische onregelmatigheid, komt nog een andere voor. Tijdens de langgerekte expiratie, die de zucht kenmerkt, treft men korte, stootsgewijze, niet zeer diepe, maar snelle inspiraties aan. De zucht krijgt daardoor een ander aanzien. Het heeft den schijn, alsof zich een secundair ademhalingstype met snellen rythmus op het bestaande type superponeert. Deze superpositie komt allereerst in de expiratiephase der morphine-zucht tot uiting, maar snelle inspiraties kunnen ook tijdens de expiratie-phase van meerdere of van elke ademhaling voorkomen (Fig. 2).

Beide veranderingen, het voorkomen van diepe inspiraties met langgerekte expiratie, en de aanvankelijk slechts tijdens de onderdrukte expiratie merkbare snel op elkander volgende inspiraties, wijzen op vermeerderde werkzaamheid der inspiratoire centra.

De door morphine teweeggebrachte veranderingen der respiratie zijn van denzelfden aard als die, welke men bij prikkeling der voorhoofdsschors [1]) waarneemt, en het is bekend, dat morphine de prikkelbaarheid der psycho-motorische schorscentra verhoogt [2]). Het bleek ons verder, dat aether, die de schorscentra minder prikkelbaar maakt, deze onregelmatigheden laat verdwijnen. Het bleek ons, dat geluidsindrukken en gezichtsindrukken dikwijls de merkbare oorzaak van deze zuchten waren. In de menschelijke kliniek is het bekend, dat algemeene schorsprikkeling (meningitis, tumoren van de voorhoofdskwab) aanleiding geeft tot dergelijke zuchten.

De meening ligt dus voor de hand, dat morphine denzelfden invloed, dien zij op de overige psycho-motorische centra heeft, ook op het inspiratie-centrum der schors (ons punt 16) doet gelden, en dat wij hebben gearbeid met honden tijdens verhoogden tonus (van de schors uitgaand) der inspiratie-centra. Wij vinden hier tevens aanduidingen van twee verschillende functies, die in werking gesteld worden :

1e de diepe inspiratie; 2e de versnelde respiratie.

De invloed der operatie.

Van meer belang is de invloed der operatie op het, door morphine, voor inspiratie-bevorderende invloeden iets meer gevoelig geworden, dier.

---

1) Zie Verslagen K. A. v. W. 29 Oct. 1898. p. 158 en fig. XXV, XXVII en XXVIII.
2) Hitzig l. c. S. 38 und 39.

Zenuwen (de N. opticus en twee takken van den N. trigeminus) worden blootgelegd en doorgesneden, dus langs mechanischen weg geprikkeld. Hun prikkeling wijzigt de respiratie.

Invloed van de prikkeling van den N. opticus op de ademhaling.

De ademhalingscurve tijdens de faradische prikkeling van den N. opticus is zeer karakteristiek (Fig. 3. N. Opt.).

Bij prikkeling met zeer zwakken stroom, ontstaat een snelle, maximaal diepe inspiratie, gevolgd door langgerekte, onderdrukte expiratie. Indien niet al te lang geprikkeld wordt, duurt de expiratie even lang als de prikkel, ja, somwijlen duurt zij na het ophouden van den prikkel nog voort.

Na prikkeling met matig sterke stroomen (8 tot 6 cM. rolafstand), ziet men, behalve deze diepe, op een zucht gelijkende ademhalingscurve, een reeks uiterst snelle respiratie-slagen, die weder doen denken aan superpositie van een ademhalingstype met snellen rythmus, op een ademhalingstype, dat door inspiratie-dwang met onderdrukte expiratie gekenmerkt is. Gewoonlijk gaat dit effect der prikkeling met strekking van den nek gepaard.

Het blijkt, voor het goed begrip dezer effecten noodig te zijn, om behalve de thoraxbeweging (met den pneumo-graaf van Marey) ook de drukkingswisseling te registreeren, die in de trachea plaats vindt [1]).

De snelle ademhalingen blijken dan heftige stooten te zijn, die zeer sterke drukveranderingen teweegbrengen, zoowel in inspiratoiren, als in expiratoiren zin.

Na het ophouden van den prikkel duurt het inspiratoir effect nog voort. Was hij sterk, dan volgen nog eenige snelle slagen, en eenige diepe inspiraties, soms nog een of meer zuchten.

Invloed van de prikkeling van den N. trigeminus op de ademhaling.

Anders, maar even karakteristiek is het gevolg van de prikkeling van den eersten tak van den N. trigeminus voor de ademhaling. Onderzocht zijn de N. frontalis en de N. lacrymalis Rami opthalmici

---

[1]) Daartoe wordt een holle T-canule met het verticale been in de trachea gebracht. Door het eene horizontale been kan de lucht vrij toestroomen, het andere horizontale been is door een caoutchoucslang met een schrijftrommel van Marey verbonden. Men registreert dan door luchttransport de drukkingswisselingen. Langzame drukkingsveranderingen registreert men echter niet. Blijvende toestanden, inspiratie- of expiratiestand van den thorax, worden als zij langer duren, daar het eerste been der T-canule open is, als nullijnen geregistreerd.

N. trigemini. (Fig. 3 r. lacr. N. V.). Met opzet wordt hier thans van den N. ethmoidalis of van den N. naso-ciliaris niet gesproken.

De allerzwakste stroomen (12 c.M. rolafstand, terwijl eerst bij 9—7 c.M. rolafstand op den punt der tong iets gevoeld wordt) zijn in staat dit gevolg te voorschijn te roepen.

Onmiddellijk ontstaan de snelle heftige respiratie-stooten, zoowel inspiratoire als expiratoire, die wij reeds kennen, maar in volmaakte tegenstelling met hetgeen bij prikkeling van den N. opticus gebeurt, begint het effect niet met maximalen inspiratie-stand van den thorax. Eerst langzaam neemt zijn inspiratie-stand toe. Na het ophouden van den prikkel, komt de thorax, die geleidelijk meer en meer een inspiratoiren stand aannam, vrij plotseling tot expiratie-stand. De eerste slag der snelle respiraties, kan een expiratie-slag zijn, maar dit is gewoonlijk niet het geval. De snelle slagen duren na het ophouden van den prikkel nog eenigen tijd voort. Daarna volgen gewoonlijk een of meer zuchten en de norma keert terug.

De N. infra-orbitalis rami supra-maxillaris N. trigemini beantwoordt den prikkel met een verandering der ademhaling, die anders is, als die, welke de prikkeling van den N. opticus, maar ook eenigszins verschilt van die, welke de prikkeling van den eersten tak van den N. trigeminus in het leven roept.

Een sterke blijvende inspiratie-stand (fig. 4), evenzeer maximaal als wij bij prikkeling van den N. opticus gezien hebben, maar in tegenstelling van hetgeen daar geschiedt, blijvend, gepaard aan de bekende, snelle, krachtige respiratie-stooten, is het constante gevolg der prikkeling van deze zenuw, ook wanneer zij met zeer zwakke stroomen geschiedt. De lange duur der nawerking is eveneens treffend.

Uit deze feiten blijkt, dat de invloed der prikkeling van den N. opticus en den N. trigeminus op de ademhaling, niet zoo eenvoudig is te formuleeren, als CHRISTIANI [1]) het heeft gedaan, toen hij zeide, dat prikkeling van den N. opticus inspiratoir, die van den N. trigeminus expiratoir werkte.

Faradisatie der drie genoemde zenuwen, versnelt de respiratie, d.w.z. zij heeft bij alle drie denzelfden invloed, op de tweede der straks reeds onderscheiden functies. Maar zij verschilt zeer in den invloed, die zij op de verdieping der ademhaling heeft. Door den N. opticus roept zij maximale inspiratie met langgerekte, onderdrukte

---

[1]) ARTHUR CHRISTIANI. Ueber Athmungscentra und centripetale Athmungsnerven. Monatsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1882. (Sitz. 17 Febr. 1881). S. 213.

expiratie te voorschijn, door den eersten tak van den N. trigeminus heeft zij hierop bijna geen invloed, door den tweeden tak onderhoudt zij inspiratoiren tonus.

De verschillende invloed, die prikkeling dezer zenuwen heeft, maakt het gewenscht om minstens twee inspiratoire prikkelingseffecten: ademhalingsversnelling en ademhalingsverdieping van elkander te onderscheiden. Laatstgenoemde doet zich voor als maximale inspiratie met langdurige onderdrukte expiratie (onze zuchten) of als een blijvende inspiratiestand (SPENCER's over-inspiratory tonus) van den thorax.

Het komt ons dus waarschijnlijk voor, dat de medulla oblongata de impulsen, die daarvoor geschikt zijn, op tweeërlei wijze beantwoordt, nu eens als versnelling, dan weer als verdieping. Het is mogelijk deze twee functies bij prikkeling van perifere zenuwen van elkander te scheiden. De N. opticus zet bij zwakke prikkeling in de eerste plaats de inademingsverdieping tot werkzaamheid aan, de N. trigeminus de versnelling der ademhaling. Bij sterker prikkeling combineeren zich de twee effecten. (SPENCER's over-inspiratory clonus). Bij de allersterksten komt het tot inspiratie-dwang.

De hersenschors (ons punt 16) dwingt als zij met zwakke stroomen wordt geprikkeld, eveneens tot versnelling der ademhaling. Geschiedt dit met stroomen van matige sterkte dan volgt verdieping met versnelling en bij sterkere prikkels volgt stilstand van den thorax in inspiratie.

Als men den invloed nagaat, die de tusschenhersenen op de inspiratie hebben, blijkt het evenzoo te zijn.

Volkomen hebben wij de experimenten van CHRISTIANI in tegenstelling met KNOLL [1]) bevestigd gevonden. Prikkeling van een punt laag in den bodem van den zijwand van den 3den ventrikel, ongeveer in het vlak van de commissura posterior gelegen, oefent inspiratoiren invloed uit. Bij zwakke prikkeling komt het tot respiratieversnelling, bij sterkere tot respiratieversnelling met verdieping der inspiratie, bij de sterkste tot inspiratoiren stilstand van den thorax. De bijgevoegde fig. 5 bewijst het. Het is echter waarschijnlijk, dat wij, gelijk meerdere schrijvers meenen, hier banen raken, die uit het punt 16 ontsprongen zijn.

Door onze operatie wordt zeer dikwijls het versnelde ademhalingstype blijvend te voorschijn geroepen. Vooral is dit het geval, als

---

1) Prof. Ph. KNOLL. Beiträge zur Lehre von der Athmungs-Innervation. 6te Mitth. Zur Lehre vom Einflusz des centralen Nervensystems auf die Athmung. Sitzungsber. d. K. Ak. d. Wissensch. in Wien. Bd. XII. Abth. III. S. 283.

de orbita, om ruimte te krijgen voor het blootleggen der frontale hersenen, van zijn inhoud moet worden ontdaan. De art. en vena ophthalmica moeten dan worden onderbonden, en als men gelijk niet gemakkelijk te vermijden is, een ligatuur aanlegt, die tevens den N. opticus en den ramus ophthalmicus N. trigemini omvat, dan ziet men, dikwijls blijvend, respiratie-versnelling ontstaan. Bizonder leerrijk zijn die gevallen (fig. 6) als de ademhaling met snellen rythmus zich als een afzonderlijke curve op die der oorspronkelijke rustige ademhalingscurve superponeert. Het versnelde respiratie-type kan echter, wanneer het ontstaat, het andere type uitwisschen. Voegen zich daarbij zuchten, dan kan de ademhaling zoo onregelmatig zijn, dat men experimenten naar den invloed der hersenschors op de ademhaling staken moet.

De invloed der prikkeling van de reukhersenen op de ademhaling.

Eerst toen de veranderingen, die de ademhaling kan ondergaan door operatie en narcose, ons bekend waren, konden wij een poging doen, om de zonderlinge gevolgen te bestudeeren, die prikkeling der reukhersenen bij honden op de ademhaling kan uitoefenen.

Reeds door Munk, Danilewsky, [1]) Unverricht [2]) e. a. zijn ook expiratoire effecten waargenomen bij prikkeling der hersenen. Spencer heeft hen zeer nauwkeurig beschreven. De resultaten van onze experimenten wijken in velerlei opzichten van die der genoemde onderzoekers af. In één enkel opzicht bestaat volkomen overeenstemming tusschen de proeven van Spencer en de onze. Inderdaad bestaat er op de hersenschors een plaats, waarvan de prikkeling met matig sterken stroom regelmatig verlangzaming der ademhaling, of stilstand der ademhaling bij expiratie-stand van den thorax in het leven roept.

Deze plaats vindt men op den lobus olfactorius, tegen de fissura rhinica aan gelegen, even achter de plaats waar de fissura praesylvia in de fissura rhinica overgaat.

In ons schema (fig. 9) wordt dit punt met de letters *f* en *g* aangeduid.

Daartegenover staat, dat ditzelfde effect ook van den bulbus en tractus olfactorius te verkrijgen is. De reden, dat Spencer dit niet

---

[1]) Danilewsky. Experimentelle Beiträge zur Physiologie des Gehirns. Pflüger's Arch. f. Phys. Bd. XI. 1875. p. 128.

[2]) Unverricht. Experimentelle Untersuchungen über die Innervation der Athmungsbewegungen. Verhandlungen des Congresses für Innere Medicin. Wiesbaden 1888.

aangeeft, is waarschijnlijk daarin gelegen, dat dit effect bij prikkeling van de ondervlakte van den bulbus olfactorius het duidelijkst voor den dag komt.

Ook bij prikkeling van de ondervlakte van den tractus kan men hetzelfde effect teweegbrengen, het fraaist echter bij prikkeling van *f* en *g*.

In een ander opzicht verschillen de resultaten onzer experimenten belangrijk met die van SPENCER, die bij vrij sterke stroomen (6 cM. Rolafstand bij zijn inrichting), dat, wat hij „arrest" noemt, met het begin van den prikkel ziet ontstaan, en als hij eindigt ziet ophouden.

Niet alzoo bij onze experimenten.

Wanneer een zwakke of matig sterke stroom (10—6 c.M. Rolafstand) op het punt *f* en *g*, of langs de ondervlakte van tractus en bulbus olfactorius wordt aangewend, dan vindt het volgende plaats:

De ademhaling kan langzamer worden zonder meer. (fig. 7).

Gewoonlijk echter komt de thorax, terwijl de ademhaling langzamer wordt, in expiratie-stand, *om eindelijk in dien stand stil te blijven staan.* Dit kan bij den duur, die onze prikkels gewoonlijk hadden (10 secunden) tijdens de prikkeling gebeuren, meestal begint het eerst na het ophouden van den prikkel (fig. 8, 10 en 11). Blijft men doorprikkelen, dan kan men den stilstand 1 minuut en zelfs langer zien voortduren. Ten slotte wordt zij dan door diepe inspiraties onderbroken.

Daarmede is echter de beschrijving van het constant verkregen effect niet afgeloopen. Nadat de stilstand in expiratie eenigen tijd geduurd heeft, komen eenige, aanvankelijk zeer oppervlakkige, respiraties (soms slechts in de trachea-curve duidelijk) tot stand en de thorax neemt den inspiratiestand aan. Soms is dit stadium slechts aangeduid (fig. 9), dan weêr geschiedt het vrij plotseling en bestaat er een langdurige stilstand in inspiratie, die slechts door eenige onregelmatige ademhalingen onderbroken is (fig. 10), eindelijk komt het voor, dat de inspiratie-stand langzaam bereikt wordt, lang duurt, terwijl onregelmatige ademhalingen, meerendeels oppervlakkige maar langzaam dieper wordende inspiraties (fig. 11, bovenste curve) in dien tijd voorkomen.

Ten slotte komen dan één, soms twee diepe zuchten. Uiterst langzame respiraties, diepe inspiraties en langgerekte expiraties volgen hen. Het kan 15 minuten en langer duren, eer de respiratie weder gewoon is geworden.

Men zou geneigd zijn, het merkwaardig mechanisme dat tot uiting komt, aan te zien als een mechanisme tot compensatie, van den ge-

dwongen expiratoiren stilstand, waarbij de inspiratie-verdieping de hoofdrol speelt.

Het verschijnsel is uiterst constant, even zeker als samentrekking van den voorpoot bij prikkeling van zijn schors-centrum plaats vindt, even zeker ziet men na prikkeling van *f* en *g* eerst stilstand in expiratie en daarna het compensatie-verschijnsel volgen. Somwijlen echter ontstaat het laatstgenoemde (zie fig. 11, onderste curve) ook zonder dat *stilstand* in de expiratie heeft plaats gevonden.

Komt dit mechanisme niet te voorschijn en (dat is ons twee malen gebeurd) dan kan de hond dood blijven, omdat de thorax in expiratie stilstaan blijft. In beide gevallen hadden door langdurige voorafgaande proeven over inspiratoire functies, de inspiratie-centra zeer geleden en konden zij vermoedelijk niet meer compenseeren.

Het is klaar, dat wij hier een baan in den tractus en lobus olfactorius, geen eigenlijk centrum hebben geprikkeld. Het zou begrijpelijk zijn, dat de hond, nadat machtige reukprikkels hem getroffen hebben, ter voorkoming van meer, de ademhaling in expiratie doet stilstaan, daarna voorzichtig snuffelend de thorax in inspiratie brengt, en als zich dan geen verdere reukprikkels voordoen, met diepe inademingen het ademhalingstype herstelt. De reukzenuw zou dan een expiratoir effect hebben.

De afwijkingen, welke tusschen deze resultaten en die van SPENCER bestaan, zijn misschien daaraan te wijten, dat deze onderzoeker gaarne tijdens narcose met aether werkte. Overigens zullen voortgezette onderzoekingen, over deze verschillen licht moeten werpen.

VERKLARING DER FIGUREN.

Fig. 1. Morphinezucht bij een hond.
1 = nullijn.
2 = stemvork van twee trillingen pro secunde.
3 = thoraxbeweging met den pneumograaf van MAREY geregistreerd.
4 = ademhalingscurve uit de trachea geregistreerd.

Fig. 2. Morphinezucht met superpositie van snelle respiraties in de expiratie-phase.
1 = nullijn.
2 = stemvork van 5 trillingen pro secunde.
3 = thoraxbeweging met den pneumograaf van MAREY geregistreerd.
4 = pols der arteria femoralis.

Fig. 3. Invloed van de prikkeling van den N. opticus en van die van den eersten tak van den N. trigeminus op de ademhaling.
1 = nullijn door den seingever.
2 = stemvork van 2 trillingen pro secunde.
3 = thoraxbeweging met den pneumograaf van MAREY geregistreerd.
4 = ademhalingscurve uit de trachea geregistreerd. Bij N. opt. wordt de N. opticus gedurende den tijd dat de nullijn omhoog is geprikkeld. (rolafstand 8 cM.) Bij *r.* lacr. N. V de eerste tak van den N. trigeminus. (rolafstand 12 cM.). (De curve is met behulp van photografie tot $^2/_3$ verkleind).

Fig. 4. Invloed van de prikkeling van den tweeden tak van den N. trigeminus op de ademhaling.

De 4 curven als in fig. 3. De stemvorklijn en de nullijn door den seingever geschreven zijn niet onder de beide anderen gesteld, maar beginnen vroeger. Het sein gaat derhalve te vroeg omhoog. (rolafstand 12 cM.)

De schrijver van de thoraxcurve sloeg bij maximalen inspiratiestand tegen het schoteltje van den trommel en registreerde niet de snelle ademhalingen, die blijkens de curve uit de trachea geregistreerd toch aanwezig waren.

Fig. 5. Invloed van de prikkeling van den zijwand van den derden ventrikel op de ademhaling.

De 4 curven gelijk in alle overige figuren als in fig. 3.

Bij I, II, III, IV wordt bij stijgende stroomsterkten (rolafstand 9, 7, 5 en 4 cM.) een punt in den zijwand van den derden ventrikel onder en ongeveer in het vlak van de commissura posterior geprikkeld.

Fig. 6. Invloed der mechanische prikkeling (onderbinding) der zenuwen, die naar de orbita gaan.

Onmiddellijk gaat een langzame respiratie over in een ademhaling, waarbij het langzame type nog te herkennen is, maar tevens de superpositie van een respiratie met sneller type in het oog vallend duidelijk is. In 't midden een zucht.

Fig. 7. Invloed der prikkeling van de zijvlakte van den tractus olfactorius.

Tijdens de prikkeling wordt de ademhaling langzamer. (Rolafstand 6 cM).

Fig. 8, 10 en 11. Invloed der prikkeling van den lobus olfactorius.

In fig. 8 bij *g* (rolafstand 8 cM.). Stilstand in expiratie, daarna onregelmatige snuffelbewegingen met inspiratie-stand van den thorax, daarna diepe inspiraties.

In fig. 10 bij *e* (rolafstand 8 cM.). verlangzaming der respiratie met neiging tot expiratie-dwang, daarna stilstand in geforceerde expiratie. Vervolgens inspiratiestand, zuchten, en eindelijk diepe, langzame inspiraties, die nog niet volkomen plaats maakten voor de gewone respiratie, als de curve ten einde is.

In fig. 11 in de bovenste curve bij *g* (rolafstand 7cM.) verlangzaming, expiratiestilstand, in inspiratie-stand, zuchten en langzame ademhaling als in fig. 10 (bij een anderen hond).

In fig. 11 in de onderste curve bij *g* (rolafstand 10 cM.) komt zonder voorafgaanden stilstand in expiratie hetzelfde compensatie-mechanisme, ongeveer op denzelfden tijd als in de bovenste curve tot stand. (fig. 11 is door photografie tot $\frac{1}{2}$ verkleind).

Fig. 9. Schema der hondenhersenen voor prikkeling van de laterale gedeelten der reukhersenen. Bij prikkeling van *g* worden de meest duidelijke expiratoire effecten teweeggebracht.

Physiologie. — De Heer HAMBURGER spreekt over: „*De invloed van zoutoplossingen op het volumen van dierlijke cellen.*" (2 mededeeling).

In de Mei-vergadering van het vorige jaar bespraken wij den invloed van zoutoplossingen op het volumen van roode bloedlichaampjes, witte bloedlichaampjes en spermatozoa. Wij kunnen thans de resultaten van soortgelijke onderzoekingen mededeelen, verricht bij epitheliumcellen, afkomstig van vier verschillende plaatsen: darm, luchtpijp, urineblaas en slokdarm.

prikkeling van eenige Se

Steeds werd het epithelium verkregen door het bij het pas gedoode dier voorzichtig van het orgaan af te schrapen. Het schraapsel werd verdeeld in een weinig van het versche bloedserum of in een Na Cl-solutie van 0.9 % en daarna door een filtertje van ongepraepareerd gaas gefiltreerd. Van de aldus verkregen vloeistof werden, om de cellen zooveel mogelijk in vrijen toestand of anders in kleine agregaten te hebben, met behulp van een fijn uitgetrokken pipetje, gelijke hoeveelheden (± 1/4 c.c.) afgemeten en gebracht in reageerbuizen, waarin zich gelijke hoeveelheden (10 à 15 c.c.) der zoutoplossingen bevonden, aan wier invloed de epitheliumcellen moesten blootgesteld worden. Na inwerking van 1/2 uur werden gelijke hoeveelheden van de mengsels in de trechtervormige buisjes [1]) gebracht, om aan den invloed der centrifugaalkracht te worden blootgesteld. Wanneer het niveau van het bezinksel een constante plaats had ingenomen, werd het volumen van het epithelium-kolommetje vastgesteld. Indien na kort centrifugeeren reeds het cellenkolommetje er niet volkomen homogeen uitzag, werd de heldere vloeistof voor verreweg het grootste gedeelte afgepipeteerd, het kolommetje met de overgebleven vloeistof door middel van een platinadraad tot een homogeen mengsel dooreengeroerd, en weer opnieuw gecentrifugeerd. Was dit bij een der buisjes noodig, dan werd hetzelfde toch ook gedaan bij de andere drie.

I. DARMEPITHELIUM.

Proef 1.

Epithelium van den dunnen darm van een paard, op ongeveer 1/2 meter afstand van den pylorus.

Het epithelium is verdeeld in een weinig bloedserum van hetzelfde dier.

Gebruikte zoutoplossingen	Volumen van het epithelium
Na Cl.-opl. van 0.7 %	35.5
" " " 0.9 %	34
" " " 1 %	33
" " " 1.5 %	29

[1]) Vergel. Versl. d. Vergad. d. Koninkl. Akad. v. Wetensch. 21 April 1897 en 28 Mei 1898.

Men ziet dat het volumen van het epithelium geregeld afneemt met de stijging van de concentratie der zoutoplossingen.

A priori had men een andere uitkomst mogen verwachten. De darmmucosa toch mag als een resorptie-orgaan bij uitnemendheid worden beschouwd, en, gelijk de ervaring leert, gaan verdunde Na Cl-oplossingen er dan ook uiterst gemakkelijk doorheen. En daarom scheen het voor de hand te liggen, dat wanneer afgeschraapt darmepithelium in ruime hoeveelheden Na Cl-oplossing van verschillende concentratie verdeeld werd, de cellen zich met die oplossingen zouden drenken, zoodat er van een verschil in osmotische drukking tusschen celinhoud en omgeving weldra geen sprake meer zou zijn, m. a. w. het was te voorzien, dat het volumen van het darm-epithelium zich onder den invloed van zoutoplossingen van verschillende concentratie niet zou wijzigen.

De volgende proef, verricht op dezelfde wijze en met dezelfde soort epithelium, zou echter geheel andere uitkomsten geven dan de eerste proef.

Proef II.

Epithelium van den dunnen darm van een paard, op ongeveer $^1/_2$ Meter afstand van den pylorus.

Het epithelium is verdeeld in een weinig bloedserum van hetzelfde dier.

Gebruikte zoutoplossingen.	Volumen van het epithelium.
NaCl-oplossing van 0.5°/₀	106
〃 〃 〃 0.7°/₀	103
〃 〃 〃 0.9°/₀	103
〃 〃 〃 1.5	105

In dit experiment is het volumen van het epithelium zoo goed als onveranderd gebleven.

Een aantal andere experimenten, op dezelfde wijze verricht, brachten slechts bevestiging en uitbreiding van hetgeen de beide eerste hadden geleerd: [1]) een enkele maal bleek, zooals in proef I, het

1) De volledige beschrijving van de hierbij behoorende proeven moet, met het oog op de groote ruimte welke hiervoor zou gevorderd worden, achterwege blijven. Dit geldt ook voor vele andere bijzonderheden. Het een en ander zal een plaats vinden in het Archiv f. Anat. u. Physiol. Physiol. Abth.

volumen van het epithelium in hooge mate onder den invloed van de concentratie der zoutoplossingen te staan; in verreweg de meeste gevallen echter oefende de concentratie geen merkbaren invloed uit. Dit resultaat werd niet alleen verkregen met NaCl-oplossing, maar ook met druivesuiker en met mengsels van serum en water.

Bij deze onstandvastigheid in de uitkomsten, verkregen met dezelfde epitheliumsoort, kon men slechts denken aan twee mogelijkheden, òf de methode van onderzoek was niet betrouwbaar, òf het epithelium, hoewel in de verschillende gevallen van overeenkomstige plaatsen betrokken, verkeert niet altijd in denzelfden toestand.

De eerste mogelijkheid was te verwerpen. 1° Omdat bij een en dezelfde proef, de uitkomsten met zoutoplossingen van verschillende concentratie niet alleen twee aan twee, maar ook onderling overeenstemden, en dàt, onverschillig of het resultaat al dan niet een invloed op het volumen aanwees; 2e omdat de methode bij de roode en witte bloedlichaampjes, de spermatozoa, en ook bij het *door afschrapen verkregen* blaas- en oesophagusepithelium, altijd eensluidende resultaten had gegeven.

Er blijft dus niet anders over dan aan te nemen, dat *het epithelium niet altijd in denzelfden toestand van permeabiliteit verkeert.*

Te dien aanzien kan men zich weer twee voorstellingen maken: men kan zich denken, dat het slechts een quaestie van tijd geldt, m. a. w. dat in die gevallen, waarin het volumen van het epithelium door de concentratie der zoutoplossingen blijkt te worden geinfluenceerd, de cellen na inwerking van ½ uur nog niet of zeer onvolkomen met de oplossing gedrenkt zijn, terwijl het osmotisch evenwicht dan reeds tot stand is gekomen. Onder die omstandigheden zou, na een langere inwerking dan van ½ uur, meer zoutoplossing in de cel kunnen gedrongen zijn, en dus de concentratie der zoutsolutie zich in mindere mate op het volumen der cellen doen gevoelen.

Dit bleek echter niet het geval te zijn.

Wij moeten dus denken aan de tweede mogelijkheid, namelijk deze, dat men hier te doen heeft met een wijziging in den toestand van het epithelium, welke zoolang blijft bestaan, totdat deze door een of ander agens, b.v. een chemisch agens, wordt opgeheven. En inderdaad mocht het ons eenige malen gelukken, om epithelium van den eenen toestand in den anderen over te brengen en wel door middel van $Mg\,SO_4$, waarvan bekend is, dat het een wijziging in het resorbeerend vermogen van den darm kan teweegbrengen, en ook door toevoeging van sporen van een zuur. Ik zeg „eenige malen", want het gelukte ook wel eens niet.

Overigens zijn ons de voorwaarden waaronder het darmepithelium

overgaat van den eenen toestand in den anderen en welke veranderingen de cel hierbij ondergaat, tot dusverre onbekend gebleven. [1])

Onwillekeurig denkt men hier aan hetgeen HEIDENHAIN bij het levende dier waarnam ten aanzien van het vermogen der tusschen het darmepithelium gelegen kitsubstantie, om methyleenblauw door te laten: in hetzelfde veld zag hij te midden van cellen, wier kitsubstantie was blauw gekleurd, andere, wier kitsubstantie absoluut kleurloos was gebleven. [2])

In den allerlaatsten tijd heeft men in het Züricher physiologisch laboratorium te vergeefs getracht de vraag te beantwoorden, of in den darm, behalve de tusschen de epitheliumcellen gelegen kitsubstantie, ook de cellen zelve opgeloste stoffen kunnen doorlaten. [3])

Ik geloof dat op deze vraag de voorgaande onderzoekingen een antwoord hebben gegeven. Behoudens toch in die exceptioneele gevallen, waarin het afgeschraapte epithelium in een bijzonderen toestand schijnt te verkeeren, vertoonen de volumina der cellen, na inwerking van zoutoplossingen van verschillende concentratie gedurende $^1/_2$ uur, onderling geen verschillen.

Nu zou men dit daaraan kunnen toeschrijven, dat de epitheliumcellen tegenover de zoutoplossingen geheel indifferent zijn, d. w. z. noch water noch zout doorlaten; doch tegen de onderstelling dat zij geen water zouden doorlaten, spreekt al dadelijk het feit, dat wanneer men ze onmiddellijk na vermenging met zoutoplossingen gaat centrifugeeren en dus niet $^1/_2$ uur daarmede wacht, zeer duidelijk een verschil in volumen wordt waargenomen, en wel in dien zin, dat bij stijgende concentratie het volumen afneemt.

De cellen moeten dus wel voor water permeabel zijn. Doch niet minder dringt het feit, dat de volumina der epitheliumcellen bij langduriger inwerking der zoutsoluties elkander hoe langer hoe meer gaan

---

[1]) Het zij mij vergund hier op te merken, dat dit resultaat geenszins in tegenspraak is met de vroeger door mij uitgesproken opvatting, dat de bekende resorptie-verschijnselen langs physischen weg kunnen verklaard worden. Indertijd toch heb ik er reeds met nadruk op gewezen, dat „ik er niet aan denk te willen beweren, dat het leven „op het resorptieproces geen invloed kan en zal uitoefenen. Onder physiologische en „pathologische voorwaarden kunnen ongetwijfeld in *levende* membranen fijn genuanceerde veranderingen optreden, die op de daarin plaatshebbende physische processen „een niet geringen invloed uitoefenen, maar waardoor die processen zelve toch niet „ophouden, zuiver physische processen te zijn." (Vergel. „De beteekenis van ademhaling en peristaltiek voor de resorptie in den darm." Zittingsverslag 25 Januari, 1896, noot).

[2]) HEIDENHAIN. Beiträge zur Anatomie und Physiologie der Dünndarmschleimhaut. Pflüger's Archiv, Supplementheft. 1888, S. 49.

[3]) R. HÖBER. Ueber Resorption im Dünndarm. Zweite Mittheilung. Pflüger's Archiv, B 74, S. 269, 1899.

naderen, tot de conclusie, dat *de zoutoplossing als zoodanig in de cel binnendringt.*

Onze proeven kunnen ook nog iets leeren omtrent de permeabiliteit der *celkern.* Zij leeren namelijk met groote waarschijnlijkheid, dat behalve het cellichaam ook de cel*kern* van het darmepithelium zoutoplossingen doorlaat. Immers stel eens, dat de kern van het darmepithelium *uitsluitend* voor water permeabel was, dan zou haar volumen zich moeten wijzigen met de concentratie der omringende zoutsolutie, en de cel in haar geheel zou daarvan den invloed ondervinden. Wat neemt men echter waar? Dat het totaalvolumen der cellen *on*afhankelijk is van de concentratie der omringende zoutsolutie. Daaruit volgt, bij het betrekkelijk groot aandeel dat de kern aan het totaalvolumen der cel bezit, dat *ook de kern de omringende zoutoplossing heeft doorgelaten.*

Intusschen zou de onafhankelijkheid van het totaalvolumen der cel van de concentratie der omringende zoutoplosssing ook nog kunnen bestaan, indien de kern geheel ondoordringbaar was, dus ook voor water. De ondoordringbaarheid voor water echter is, met het oog op al hetgeen wij reeds gezien hebben omtrent den invloed van zoutoplossingen op het volumen van spermatozoa, roode en witte bloedlichaampjes, blaas en oesophagusepithelium, in hooge mate onwaarschijnlijk, en is ook bij het optreden van water bij de levensprocessen in de cellen nauwelijks denkbaar.

II. TRILHAAREPITHELIUM.

De tweede soort van epithelium, dat wij onderzocht hebben, is het trilhaarepithelium uit de trachea. Dit levert het voordeel op, dat men gedurende de gansche proef zekerheid kan erlangen, of het object nog in levenden toestand verkeert. Nadat de cellen 4 uren en zelfs langer met de gebruikte zoutoplossingen in aanraking waren geweest, was het trilhaar nog bewegelijk. Ook na het centrifugeeren konden nog trilhaarbewegingen te voorschijn geroepen worden.

Aangezien de proeven verricht werden op dezelfde wijze als bij het darmepithelium, kunnen wij met de vermelding van de resultaten volstaan.

Proef XXI.

Trilhaar uit de trachea van een pas gedood paard.

Het epithelium is verdeeld in een weinig NaCl-oplossing van 0.9°/₀.
Onmiddellijk daarna worden gelijke hoeveelheden hiervan in aanraking

gebracht met 15 c.c. eener oplossing van NaCl 0.7°/₀, 0.9°/₀ en 1.2°/₀. Na inwerking van ½ uur worden 8 c.c. gecentrifugeerd.

Gebruikte zoutoplossingen.	Volumen van het epithelium.
NaCl 0.7°/₀	98
〃 0.9°/₀	98
〃 1.2°/₀	85

Vergelijkt men de getallen, verkregen na inwerking van Na Cl 0.7 pCt. en 0.9 pCt., dan blijkt, dat het verschil in concentratie geen invloed op het volumen der cellen heeft uitgeoefend; wèl is dit het geval ten aanzien van de Na Cl-oplossingen 0.9 pCt. en 1.2 pCt.

De mogelijkheid bestond, dat de Na Cl-oplossing van 1.2 pCt. daarom inkrimping had veroorzaakt, omdat een inwerking van ½ uur onvoldoende was geweest om een volledige uitwisseling tusschen celinhoud en omgeving tot stand te brengen.

In die onderstelling scheen het ons aanbevelenswaardig, gelijke deelen van de nog overgebleven, doch thans twee uren oude mengsels, te centrifugeeren.

Gebruikte zoutoplossingen.	Volumen van het epithelium.
Na Cl-opl. van 0.7°/₀	86
〃 〃 〃 0.9°/₀	86
〃 〃 〃 1.2°/₀	83

Terwijl na inwerking van ½ uur het verschil in volumen van het in 0.9 pCt.- en 1.2 pCt.- Na Cl-oplossing liggende epithelium bedroeg $\frac{98-85}{98} \times 100 = 13$ pCt., bedraagt dit verschil na 2 uur inwerking slechts $\frac{86-83}{86} \times 100 = \pm 4$ pCt.

Inderdaad blijkt dus, dat na een voldoend lange inwerking der zoutsolutie op het epithelium, het verschil in concentratie geen invloed op het volumen uitoefent.

Ik zal nog twee van de vele proeven laten volgen, welke in deze richting genomen zijn.

Proef XXII.

Epithelium uit de trachea van een pas gedood paard, verdeeld in serum en daarna in zoutoplossingen.

Gebruikte zout-oplossingen.	Volumina van het epithelium bij een inwerkingsduur van		
	½ uur	2 uur	4 uur
NaCl-opl. van 0.7°/₀	68	66	62
„ „ „ 0.9°/₀	63	64	61
„ „ „ 1.2°/₀	57	59	57
„ „ „ 1.5°/₀	54	57	57

Men ziet, dat hoe langer het epithelium met de zoutoplossing in aanraking wordt gelaten, des te minder verschil in volumen optreedt. In dit geval is zelfs een aanraking van 2 uur niet voldoende om een volkomen of nagenoeg volkomen uitwisseling tusschen celinhoud en omgeving tot stand te brengen. Op het einde van de proef kan men, door een praeparaat in een gaskamertje te brengen en een oogenblik CO_2-gas door te voeren, de trilharen nog in beweging brengen.

Proef XXIII.

Gebruikte zout-oplossingen.	Volumina van het epithelium na een inwerking der zoutoplossingen van		
	½ uur	2 uur	3 uur
NaCl-opl. van 0.7°/₀	90	83	80
„ „ „ 0.9°/₀	86	79	81
„ „ „ 1.2°/₀	78	76	78
„ „ „ 1.5°/₀	74	75	78

Deze proef leert, dat na inwerking van ½ uur de volumina nog verschillen, na 2 uur slechts weinig meer, na 3 uur evenmin. Hier is dus de uitwisseling tusschen celinhoud en omgeving na 2 uur zoo goed als geheel voltooid.

Op het einde van de proef was het epithelium nog levend.

Men kan dus uit de proeven concludeeren, dat het trilhaarepithelium in levenden toestand NaCl-oplossingen doorlaat, al is het dan niet zoo snel als het darmepithelium. Dit in ieder geval aanzienlijke doorlatingsvermogen, dat zich in situ natuurlijk krachtiger zal uitspreken dan in het geïsoleerde epithelium, omdat het aan de eene zijde ingetreden vocht aan de andere zijde door bloed- en lymphstroom kan verwijderd worden, is geheel in overeenstemming met de klinische ervaring, dat intratracheaal geinjicieerde geneesmiddelen zeer snel geresorbeerd worden. Omtrent het doorlatingsvermogen der *kern* geldt hier hetzelfde wat te dien aanzien is opgemerkt bij het darmepithelium.

III. BLAASEPITHELIUM.

Hadden wij bij het darm- en trachea-epithelium te doen met cellen, waarvan verwacht kon worden, dat zij zouten gemakkelijk zouden doorlaten, van het blaasepithelium liet zich het tegendeel voorzien. Inderdaad, de blaas zou al heel slecht aan haar bestemming beantwoorden, indien zij een groote permeabiliteit zou bezitten voor opgeloste stoffen.

Zooals bekend is, wordt de urineblaas van binnen bekleed met een viervoudige laag epitheliumcellen. Bij het varken laten deze zich gemakkelijk verwijderen. Het bleek echter noodig te zijn vooraf de blaas goed af te spoelen, omdat zich bij het varken niet zelden, bij het paard gewoonlijk, sediment op het slijmvlies bevindt.

Proef XXXI.

Blaasepithelium van een pas gedood varken, verdeeld in een weinig NaCl-oplossing van 0.9°/₀.

Van het mengsel worden gelijke hoeveelheden gedurende $^1/_2$ uur in aanraking gelaten met NaCl-oplossingen van 0.7°/₀, 0.9°/₀, 1.2°/₀ en 1.5°/₀. Nadat ongeveer 2 uur gecentrifugeerd is, wordt de inhoud van het buisje door middel van een platinumdraad goed dooreengemengd, een uur aan zichzelf overgelaten en weer gecentrifugeerd.

Gebruikte zoutoplossingen.	Volumen der epitheliumcellen na inwerking van	
	$^1/_2$ uur	$1^1/_2$ uur
NaCl-opl. van 0.7°/₀	78	78
" " " 0.9°/₀	70	70.5
" " " 1.2°/₀	62.5	62
" " " 1.5°/₀	58	58

Uit deze proef blijkt, dat het volumen van het epithelium geregeld en ook aanzienlijk afneemt met de stijging van de concentratie der zoutoplossing, en dat de cijfers, verkregen na inwerking van $1^1/_2$ uur, nagenoeg dezelfde zijn als die, welke gevonden werden na inwerking van $^1/_2$ uur.

Op grond van soortgelijke waarnemingen, verricht bij de roode en witte bloedlichaampjes en bij de spermatozoa [1]), kwamen wij indertijd tot het besluit, dat die cellen bestaan uit twee substanties, die zich ten aanzien van het wateraantrekkend vermogen op verschillende wijze gedragen, eene, de protoplasmatische, welke aan het wateraantrekkend vermogen der cel geen aandeel heeft, en een andere, de intracellulaire vloeistof, welke de geheele wateraantrekkende kracht der cel vertegenwoordigt. Door een eenvoudige berekening was het toen mogelijk, de verhouding der volumina van protoplasmatische tot intracellulaire substantie vast te stellen. En de cijfers, bij dezelfde cellensoort met behulp van verschillende zoutoplossingen verkregen, stemden goed met elkander overeen.

Berekenen wij die verhouding ook hier, (1e kolom) dan vindt men, de NaCl-oplossing van 0.9% als de physiologische beschouwende, voor het volumen der protoplasmatische substantie ten opzichte van dat der geheele cel:

uit *a* en *d* 57.8%
uit *a* en *c* 58.2%
uit *b* en *d* . . . . 57.1%.

Deze cijfers stemmen goed met elkander overeen en wettigen met een aantal andere experimenten, die hetzelfde resultaat gaven, doch waarvan wij de vermelding achterwege moeten laten, dezelfde conclusie als indertijd ten aanzien van de bloedlichaampjes en de spermatozoa werd getrokken.

Doch niet alleen bestaat er een groote overeenkomst tusschen de cijfers, verkregen voor het volumen der protoplasmasubstantie van blaasepithelium van verschillende varkens en paarden, maar het trof ons ook dat die cijfers zoo weinig afweken van die welke wij gevonden hadden bij de roode en witte bloedlichaampjes van het laatste dier. (Verslag der vergad. Mei 1898.)

Dit bracht ons op het denkbeeld nog eens bij *hetzelfde dier* gelijktijdig het volumen der protoplasmasubstantie van blaasepithelium èn van bloedlichaampjes te bepalen.

---

[1]) Vergel. Versl. dezer Akademie, Mei 1898.

De overeenstemming was inderdaad frappant, gelijk b.v. uit het volgende experiment blijkt:

Proef XLI.

Blaasepithelium van een varken en gedefibrineerd bloed van hetzelfde dier worden vermengd met NaCl-oplossingen van 0.7 en 1.5°/₀, en beide paren $^1/_2$ uur daarna tegelijk gecentrifugeerd.

		Volumen der sedimenten	Inkrimping door NaCl 1.5°/₀
a. NaCl-opl. van 0.7°/₀	blaasepithelium	96	$\frac{96-69}{96} \times 100 = 28.1$°/₀
b. " " " 1.5°/₀		69	
NaCl-opl. van 0.7°/₀	roode bloedlich.	134	$\frac{134-96}{134} \times 100 = 28.4$°/₀
" " " 1.5°/₀		96	

Een zeer mooie overeenstemming derhalve, tusschen de inkrimping van het (kernhoudende) blaasepithelium en van het (kernlooze) roode bloedlichaampje, door *dezelfde* zoutoplossing.

Invloed van ureum.

Bij het hierboven gebleken gedrag van het blaasepithelium ten opzichte van NaCl, scheen het mij nu verder van belang na te gaan, of dit ook voor het ureum gold, een stof, die in groote hoeveelheid in de urine van omnivoren aanwezig is, en volgens door mij verrichte vriespuntbepalingen, bij den mensch gewoonlijk meer dan een derde deel van het wateraantrekkend vermogen der geheele urine uitmaakt.

De quaestie interesseerde mij vooral uit een algemeen physiologisch oogpunt. Gelijk bekend is, werd door Grijns en door Köppe waargenomen, dat de roode bloedlichaampjes gemakkelijk ureum doorlaten. En het zou mij niet verwonderen, indien hetzelfde ook voor de meeste andere cellen het geval was. Immers oppervlakkig gezien, moet het wel doelmatig schijnen, dat de cellen zich gemakkelijk van ureum, het voornaamste eindproduct van de eiwitomzetting, kunnen ontdoen. Maar zeker ondoelmatig zou het moeten schijnen, indien het ureum even gemakkelijk door den blaaswand zou kunnen dringen. In dat geval zou de blaas al heel slecht beantwoorden aan haar bestemming als reservoir van afvalproducten, waarvan het ureum een belangrijk en tevens voor het organisme niet ongevaarlijk deel uitmaakt.

De vraag was dus: bezit het blaasepithelium, in tegenstelling met de roode bloedlichaampjes, werkelijk de eigenschap, aan het ureum den doorgang te weigeren.

Om die vraag te beantwoorden bereidden wij ureum-oplossingen, isotonisch met Na Cl 0.7, 0.9, 1.2 en 1.5 pCt., lieten deze $^1/_2$ uur op het blaasepithelium inwerken, doch verkregen slechts een betrekkelijk geringen invloed op het volumen. Bij langere inwerking was het onderscheid tusschen de volumina 0; m. a. w. in de 4 verschillende oplossingen vertoonde het epithelium hetzelfde volumen; de ureum-oplossingen waren dus als zoodanig in de cellen binnengedrongen.

Vroeger hadden wij waargenomen, dat roode bloedlichaampjes in zuivere ureumoplossingen te gronde gaan [1]); misschien werd ook het epithelium door zulke oplossingen benadeeld. Wij besloten daarom in plaats van zuivere ureumoplossingen mengsels te nemen van NaCl en ureumoplossingen, die twee aan twee met elkander isotonisch waren, te meer omdat ook in de urine naast ureum veel Na Cl voorkomt.

Hier volgt een proef, die duidelijk spreekt.

Gebruikte oplossingen.	Volumen van het epithelium
a. NaCl-oplossing van 0.7°/₀	85.5
b. 75 cc NaCl-opl. van 0.7°/₀ + 25 cc ur. opl. isot. met NaCl 0 7°/₀	102
c. NaCl-oplossing van 1.5°/₀	61
d. 75 cc NaCl-opl. 1.5°/₀ + 25 cc ur. opl. isot. met NaCl. 1.5°/₀	70

Had de Na Cl-ureumoplossing *b* zich gedragen als de Na Cl-oplossing *a*, waarmede zij isotonisch was, dan zou het volumen niet geworden zijn 102, maar 85.5. En had de Na Cl-ureumoplossing *d* zich gedragen als de Na Cl-oplossing *c*, waarmede zij isotonisch was, dan zou het volumen niet geworden zijn 70, maar 61.

Doch het volumen van *b* komt juist overeen met hetgeen gevonden zou zijn, indien 75 c.c. Na Cl-oplossing 0.7 pCt. met 25 c.c. water verdund waren geweest in plaats van met 25 c.c. ureumoplossing.

Hetzelfde geldt van *d* ten opzichte van *c*.

Het ureum heeft zich dus gelijkmatig over cel en omgeving ver-

---

[1]) Archiv. f. Anat. u. Physiol. Physiol. Abth. 1896. S. 481.

deeld, zonder te kort te doen aan het vermogen van het epithelium om Na Cl tegen te houden. Immers de berekening van het volumen der protoplasma-substantie uit *d* en *b* (in de onderstelling dat de toegevoegde ureum-oplossing als water wordt beschouwd) en uit *c* en *a* geven dezelfde cijfers.

En zoo zien wij ons dan geplaatst voor de vraag: wat is de reden, waarom in het afgeschraapte epithelium het ureum zoo gemakkelijk binnentreedt, terwijl de intacte blaaswand zooal geen absolute, dan toch een uiterst geringe permeabiliteit voor ureum blijkt te bezitten? Met de beantwoording van deze vraag houd ik mij thans bezig.

IV. OESOPHAGUSEPITHELIUM.

Wij wenschten nu nog een epitheliumsoort te onderzoeken, waarvan evenals bij het blaasepithelium, een ondoordringbaarheid voor zout te voorzien was.

Hiertoe beproefden wij het epithelium van den slokdarm, die evenmin als de blaas op resorptie is aangewezen.

Hetgeen men hier afschraapt zijn zeer groote, voor een deel platte cellen, waarin niet zelden een aanzienlijk aantal ronde en langwerpige korrels aanwezig zijn, die den indruk van bacteriën geven en zich dan ook intensief laten kleuren met alkalische kleurstoffen.

De experimenten, verricht op volkomen gelijke wijze als bij de andere epitheliumsoorten, leerden dat er evenals bij het blaasepithelium een regelmatig verband bestaat tusschen het volumen der cellen en de concentratie der daarop inwerkende zoutsoluties. Intusschen liep het bedrag der volumeveranderingen onder den invloed van dezelfde zoutsoluties, bij verschillende slokdarmen van dezelfde diersoort nog al uiteen.

Bij het bestudeeren van onze aanteekeningen viel echter spoedig in het oog, dat met een geringe uitzetting of inkrimping altijd gepaard ging de aanwezigheid van veel korrels in de cellen.

En zoo kwamen wij op het denkbeeld, om die korrels voor de relatief geringe volumeveranderingen aansprakelijk te stellen.

Met die hypothese voor oogen, hebben wij toen eenige vergelijkende bepalingen verricht met oesophagus-epithelium en bloedlichaampjes van hetzelfde dier, en vonden wij een treffende overeenstemming tusschen de grootte der volumeveranderingen van beide celsoorten door dezelfde zoutoplossing; doch alleen in het geval, dat het mikroskoop een zeer geringe hoeveelheid korrels in het epithelium aanwees.

Als voorbeeld deelen wij de volgende proef mede:

Proef LII.

Oesophagusepithelium van een varken en gedefibrineerd bloed van hetzelfde dier wordén vermengd met NaCl-oplossingen van 0.7°/₀ en 1.5°/₀, en beide paren ½ uur daarna tegelijk gecentrifugeerd.

		Volumen van het sediment	Inkrimping door NaCl van 1.5°/₀
a. NaCl-opl. van 0.7°/₀	oesophagus-	82.5	$\frac{82.5-59}{82.5} \times 100 =$ **28.5**°/₀
b. " " " 1.5°/₀	epithelium.	59	
c. NaCl-opl van 0.7°/₀	roode bloedlich.	90	$\frac{90-64.5}{90} \times 100 =$ **28.3**°/₀
d. " " " 1.5°/₀		64.5	

De volumeverandering van het oesophagusepithelium komt op treffende wijze overeen met die der bloedlichaampjes.

Zoo hebben dan de experimenten achtereenvolgens geleerd, dat in witte bloedlichaampjes, spermatozoa [1], *blaasepithelium en oesophagus-epithelium de verhouding van het volumen der protoplasmatische stof (incl. de chromatinedraden der kern) tot het volumen der intracellulaire (incl. de intranucleaire) substantie, dezelfde is als in de overeenkomstige roode bloedlichaampjes.*

Men vraagt zich af, of men hier niet te doen heeft met een algemeen verschijnsel, dat dus ook voor de andere cellen van het lichaam geldt.

Alvorens tot een bevestigend antwoord gerechtigd te zijn, zou men natuurlijk nog een aantal andere cellen aan het onderzoek moeten onderwerpen. De meesten leenen zich er echter niet toe; cellen zooals darm- en trachea-epithelium, welke zoutoplossingen in alle concentraties doorlaten en dus niet krimpen of zwellen, zijn, gelijk van zelf spreekt, hierbij uitgesloten.

Résumé.

De voornaamste resultaten, waartoe het voorgaande onderzoek heeft geleid, zijn de volgende:

1. Van de vier onderzochte epithelium-soorten ondergaat het darm-epithelium en het trilhaar-epithelium der trachea geen volume-

[1]) Vergel. Verslag der Vergad. Mei 1898.

wijziging onder den invloed van Na Cl-oplossingen van verschillende concentratie; zij laten de Na Cl-oplossingen gemakkelijk door. En dit geldt niet alleen voor het cellichaam, maar waarschijnlijk ook voor de kern.

2. Het feit, dat bij het trilhaar-epithelium op het einde der proeven het leven kan worden geconstateerd, verhoogt de waarde der resultaten niet alleen voor het trilhaar-epithelium zelf, maar ook voor het darm-epithelium.

3. In tegenstelling met darm- en trilhaar-epithelium vertoonen blaas- en oesophagus-epithelium inkrimping door hyperisotonische en zwelling door hypisotonische Na Cl-soluties.

4. Uit het bedrag dier krimping en zwelling laat zich de verhouding berekenen tusschen het volumen van protoplasma-substantie en intracellulairen inhoud.

Deze verhouding blijkt, zoowel voor het oesophagus-epithelium als voor het blaas-epithelium, overeen te komen met die, welke voor de roode bloedlichaampjes van hetzelfde dier geldt.

5. Ureumoplossingen laten, in tegenstelling met NaCl-soluties, het volumen van het geisoleerde blaasepithelium onveranderd. Uit mengsels van ureum- en NaCl-oplossingen dringt dan ook alleen het ureum door de cel heen, terwijl uitsluitend de NaCl-oplossing door haar concentratie invloed op het volumen uitoefent.

Dit schijnt niet in overeenstemming te zijn met de bestemming van de blaas als reservoir voor afvalproducten, waarvan ureum een belangrijk en voor het organisme zeer schadelijk deel uitmaakt.

Er moeten dus nog een of meer factoren zijn, welke de resorptie van ureum in den blaaswand tegengaan.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS spreekt over: *„Een anomalie in den loop der plooipuntslijn bij een mengsel van anomale stoffen.”*

In het Zeitschrift für physikalische Chemie XXVIII Heft 2 zijn door KUENEN en ROBSON waarnemingen medegedeeld over de „Gegenseitige Löslichkeit von Flüssigkeiten” die mij tot een korte opmerking aanleiding geven. Bij mengsels van aethaan met aethyl-alcohol of een der volgende alcoholen werd door hen gevonden, dat de plooipuntslijn bestaat uit twee afzonderlijke takken, die elkander snijden, en die beide eindigen op de lijn die den driephasendruk aan-

geeft. In de volgende figuur is hun uitkomst schematisch voorgesteld.

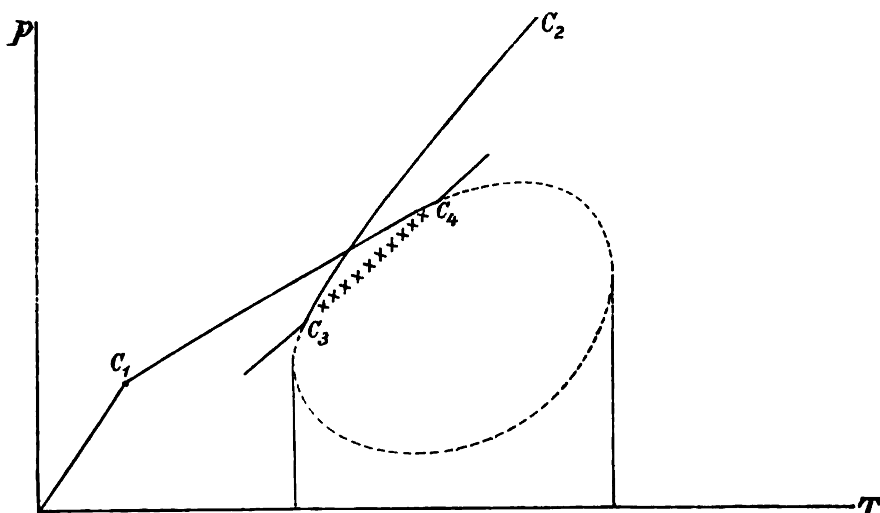


Fig. 1.

Zij C_1 het kritisch punt van aethaan, C_2 dat van alcohol, dan geeft C_4 het punt waarop het van C_1 komende plooipunt niet verder kon worden waargenomen, en het schijnbaar dienst doet als eindpunt van den driephasendruk — en geeft C_3 het punt aan, waarop het van C_2 komende plooipunt niet verder kan worden waargenomen, omdat het daar verdwijnt boven den driehoek van den driephasendruk. Het doet zich dan voor als beginpunt van den driephasendruk.

Geleid door de gedachte dat op het ψ-vlak een plooipunt slechts bij stijgende temperatuur te voorschijn kan komen bij splitsing van een plooi, of verdwijnen kan als twee plooipunten samenvallen, en er dus nimmer een tak van een plooipuntslijn in een punt kan *eindigen*, behalve in de kritische punten der componenten of in het oneindige — heb ik mij afgevraagd hoe de twee afzonderlijke geteekende takken tot één lijn kunnen worden aangevuld. Het eenvoudigste geschiedt dit door de takken te vereenigen zooals in de figuur door de stippellijn is geschied.

De vertikale lijnen, waar tusschen het gesloten deel der kromme ligt, geven dan een maximum- en een minimumtemperatuur aan.

De minimumtemperatuur is dan die temperatuur waarbij de dwarsplooi zich in tweeën splitst en van waar uit zich links en rechts een plooipunt op weg begeeft naar de kritische punten der componenten. Het punt dat naar C_2, het kritisch punt van alcohol, gaat, ondervindt geen grootere onregelmatigheid, dan dat het gedurende zijn loop wat meer dan gewoonlijk naar den kant der kleine volumes genaderd is. Maar het punt, dat naar C_1 gaat ondervindt meer onregelmatigheid. Het ontmoet bij de maximum-

temperatuur een ander dat van C_1 af hem tegemoet is gekomen en bij de ontmoeting komt zijn beweging tot een eind. De drie genoemde wegen vormen echter op het VX-vlak een continue verloopende lijn.

Bij een gegeven temperatuur, die tusschen de maximum- en minimumtemperatuur gelegen is, bestaat de spinodale lijn in projectie uit twee gescheiden gedeelten. Een dat als een kleine gesloten lijn het punt omringt, waar de ontmoeting zal plaats hebben; en een tweede gedeelte, dat een bijna gewoon verloop heeft.

Maar de twee plooipunten die het eerstgenoemde gedeelte bezit, zijn, voor zoover zij in deze teekening bijgevoegd zijn, bedekt door het regelvlak van de connodale lijn van het tweede gedeelte. Daarbij komt dan de bijzonderheid voor, dat er een groote afstand aanwezig is tusschen spinodale en connodale lijn. Een afstand groot genoeg om er den gesloten tak der spinodale lijn tusschen te kunnen bergen.

Toen ik er mij van overtuigd had, dat in het bovengezegde, een juiste beschrijving gegeven was van het verschijnsel, stond ik echter voor de vraag: Hoe is dat te rijmen met het vroeger door mij opgemerkte feit (Molekulartheorie V 2) dat er voor een mengsel van twee stoffen slechts sprake kan zijn of van een minimum kritische temperatuur, of van een maximum, maar dat het aanwezig zijn van beide buitengesloten is. En de verklaring daarvoor meen ik te moeten zoeken in de omstandigheid, dat bij de proeven van KUENEN en ROBSON een der componenten (alcohol) een anomale stof is. Van de alcoholen wordt vrij algemeen aangenomen, o.a. wegens het feit dat zij zich niet schikken onder de wet der overeenstemmende toestanden, dat zij in vloeistofvorm complexe molekulen bezitten. Voor $x = 1$, dat wil zeggen alcohol alleen, is de complexiteit volledig of maximum. Maar voor x zeer klein zal de verdeeling in enkelmolekulen wel bijna volledig zijn. In zulke omstandigheden is de kritische temperatuur niet gegeven door den gang van $\frac{a_x}{b_x}$ alleen.

Evenredig aan deze grootheid zou de kritische temperatuur zijn als de alcoholmolekulen, ook in de verdunning der oplossing, bleven, wat zij in den dicht opeengehoopten toestand zijn als de stof op zich zelve genomen wordt. En nu zal in het algemeen de kritische temperatuur van kleinere molekulen lager zijn dan van meer complexe molekulen. Van aethaan uitgaande zou de temperatuur sterk moeten stijgen tot die van alcohol, volgens den gang van $\frac{a_x}{b_x}$. Door de dissociatie der alcoholmolekulen zal de gang aangegeven worden door $f\,\frac{a_x}{b_x}$, waarin f kleiner is dan 1. Voor x bijna

1, is deze factor ook slechts weinig van 1 verschillend. Voor waarden van x die niet boven $^1/_2$ stijgen, verkrijgt men een denkbeeld van de waarde van dien factor door hem gelijk te stellen aan $\frac{1}{1+x}$. Nu is het gemakkelijk in te zien, dat zelfs al mocht $\frac{a_x}{b_x}$ geen minimum of maximum vertoonen, er tal van gevallen moeten zijn, waarin de factor f zulk een maximum — en dan van zelf ook een minimum — veroorzaakt.

Is hierin de ware verklaring van het verschijnsel te vinden, dan moet zulk een gang als door KUENEN en ROBSON bij mengsels met alcohol gevonden is, nimmer ontmoet worden bij niet-associeerende stoffen. Maar het omgekeerde mag niet gesteld worden.

Wat zich bij KUENEN en ROBSON's proeven als lengteplooi voordeed, was dus inderdaad slechts een eenigszins vervormde dwarsplooi.

Op een dergelijke vervorming doelt reeds de volgende zinsnede: (Mol. Theorie Seite 172). „Es zeigt sich dann aber, dass in diesem Falle die beiden Falten auf ihre Bildungsweise anders angesehen werden müssen u. s. w." In de figuur Seite 173 is de spinodale lijn echter niet goed geteekend. De uitbuiging rechts van P mag niet bestaan. Daarvoor moet een kleine geisoleerde gesloten kromme in de plaats komen, die zich bij de minimumtemperatuur heeft afgescheiden van het overige gedeelte.

Het verdient opmerking dat het mengsel van aethaan met methylalcohol zich zoo verschillend gedraagt. Om de vermoedelijke oorzaak van dat zoo verschillend gedrag te vinden, heb ik de meetkundige plaats geconstrueerd voor het punt waarvoor $\frac{dp}{dv}$ en $\frac{d^2p}{dv^2}$ gelijk 0 is, evenals geschied is in „Een benaderde loop voor de plooipuntslijn van een mengsel" (Verslag der vergad. Kon. Akad., 27 Nov. 1897). Nu moest ook in aanmerking genomen worden dat één der stoffen anormaal is. De invloed daarvan kan slechts op onvolkomen wijze worden nagegaan, omdat de wijze waarop bij zulk een anormale stof associatie der molekulen tot stand komt, onbekend is. Bijgevolg kan het resultaat waartoe deze geheel benaderde berekening mij gevoerd heeft, slechts met reserve worden aanvaard.

De genoemde meetkundige plaats nu heeft tweeërlei gedaante, naarmate de molekulen der anormale stof in dampvorm grooter of kleiner zijn dan de molekulen der stof, waarmede zij gemengd worden. Zijn zij grooter dan heeft de lijn een lis, die naar beneden hangt, zooals in de hiervoren geteekende figuur. Dat de molekulen van C_2H_6O, C_3H_8O enz. grooter zullen zijn dan die van C_2H_6

zal wel niet betwijfeld worden. Zijn de molekulen der anomale sto in dampvorm integendeel kleiner, dan is de lis naar boven gekeerd. Nu is het hoogst waarschijnlijk, dat de molekulen van $C H_4 O$ kleiner zijn dan van $C_2 H_6$. De onderstaande schematische figuur moge in dat geval den waarschijnlijken gang verduidelijken.

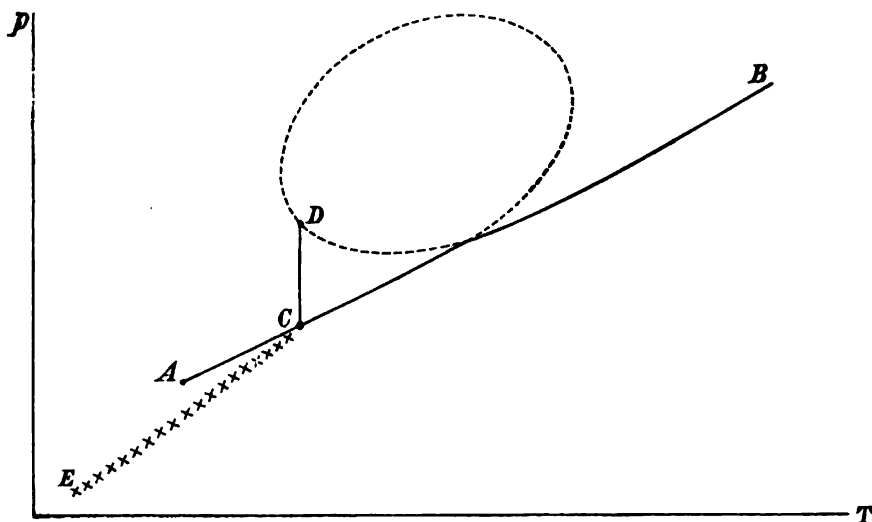


Fig. 2.

Zij *A* het kritisch punt van aethaan, *B* dat van methylalcohol. Zij verder *EC* de driephasendruklijn, en *C* het punt waarin de van *A* komende plooipuntslijn de driephasendruklijn ontmoet. Dan is het punt *D*, dat op den van *B* af komenden tak der plooipuntslijn boven *C* ligt, een grenspunt voor de plooipunten, die, als er geen vertragingsverschijnselen toegelaten worden, verwezenlijkt kunnen worden. Bij afkoeling, hoever ook voortgezet, moet de driephasendruk dus blijven bestaan. De punten tusschen *C* en *D* op de geteekende kromme, geven plooipunten aan voor zulke waarden van *x*, waarvoor zij boven het gederiveerde oppervlak liggen, dat op een connodale lijn rust, die twee gescheiden takken der spinodale lijn omvat. Uit de zinsnede van KUENEN en ROBSON, Seite 357: „Oberhalb 35,37° ist nur eine Falte vorhanden, deren Faltenpunkt wir bei Methylalcohol nicht erreichen konnten, weil Druck und *Temperatur* zu hoch waren" schijnt te volgen, dat het punt *D* onzer figuur 2 niet boven *C* liggen moet, maar meer naar den kant van *B* zou moeten genomen worden. Bij de vele onzekerheden die hier overblijven is het te betreuren, dat zij ook bij methylalcohol hun onderzoek niet hebben kunnen volvoeren. Aan fig. 2 mag geen hoogere waarde worden toegekend, dan dat zij tot het vermoeden heeft gebracht het

verschillend gedrag, als aethaan gemengd wordt met methylalcohol, toe te schrijven aan de kleinheid der methylalcoholmolekulen. [1])

Ik wil deze gelegenheid aangrijpen om de volgende opmerking te maken omtrent wat werkelijk „lengteplooi" moet genoemd worden.

Voor een mengsel van normale stoffen kan tusschen de grootheden a_1, a_{12}, a_2, b_1, b_{12} en b_2 een zoodanige betrekking bestaan, dat er werkelijk twee plooien bestaan, die ieder een eigen connodale lijn bezitten, die beide bij eenzelfde temperatuur proefondervindelijk kunnen worden aangewezen. Dan is voor de dwarsplooi de hoofdrichting // v-as, en voor de lengteplooi de hoofdrichting // x-as. Maar dan is het plooipunt van de lengteplooi gelegen aan de zijde der groote volumes. Dit is door KORTEWEG theoretisch aangetoond in het bijzondere geval van symmetrie — en een dergelijk geval is proefondervindelijk aangetoond door VAN DER LEE (Versl. Kon. Akad. 29 Oct. 1898). De theorie is nog niet in staat geweest te beslissen of deze plooi misschien bij nog veel kleinere volumes weder gesloten is of dat zij blijft uiteenloopen tot bij de limietvolumes. Mocht het laatste het geval zijn, dan is een plooi, die zich als lengteplooi voordoet, maar die, zooals bij de waarnemingen van KUENEN en ROBSON, het plooipunt bezit aan de zijde der kleine volumes, niet een lengteplooi — maar een dwarsplooi, die zich omgebogen heeft. Als dan in den vloeistofvorm niet bij alle omstandigheden volledige menging plaats grijpt is het verschijnsel aan andere oorzaken te wijten dan bij een werkelijke lengteplooi.

Wordt het bovenstaande door verdere waarnemingen bevestigd, dan zou in dat geval de oorzaak te vinden zijn daarin, dat minstens een der stoffen anormaal is.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt voor het Verslag eene mededeeling aan over: „*Volume- en drukcontractie*". III.

Om bij mengsels van twee stoffen over de grootte van volume- of drukcontractie te kunnen oordeelen, zal het noodig zijn, dat men bij de verschillende mengverhoudingen die drukkingen weet aan te geven, waarbij in gelijk volume en bij gelijke temperatuur een even

---

[1]) Uit den aard der zaak zal de meetkundige plaats der punten, waarvoor $\frac{dp}{dv}$ en $\frac{d^2p}{dv^2}$ gelijk 0 is, niets kunnen leeren omtrent de plooipunten der werkelijke lengteplooi. Daarenboven deel ik niet KUENEN's verwachting, dat ook bij methylalcohol de plooi gelijk is aan die bij de volgende alcoholen. Ik verwacht voor een mengsel van methylalcohol en aethaan overeenkomst in den gang met dien van een mengsel van water en ether.

groot aantal molekulen aanwezig is. Was er geen afwijking van de wet van BOYLE, dan zouden de drukkingen daarvoor noodig gelijk moeten zijn. Neemt men voor een mengsel als toestandsvergelijking aan:

$$\left(p + \frac{a_x}{v^2}\right)\left(v - b_x\right) = MRT ,$$

dan is het tweede lid dezer vergelijking bij gegeven temperatuur slechts gelijk voor een gelijk aantal molekulen, en zal dus voor gelijke waarde van v de waarde van p, uit deze vergelijking opgelost, de druk zijn welke aan de bovengestelde voorwaarde voldoet. Stelt men den druk van 1 atmosfeer gelijk aan de eenheid van druk en het volume dat een molekulaire hoeveelheid van het mengsel onder dien druk inneemt gelijk aan de eenheid van volume, dan is de waarde van het tweede lid gelijk aan:

$$(1 + a_x)(1 - b_x)(1 + \alpha t),$$

waarvoor met voldoenden graad van benadering geschreven kan worden: $(1 + a_x - b_x)(1 + \alpha t)$.

Noemen wij de waarde van den druk, die als eenheid van druk gekozen is, p_0 en het volume, dat een molekulaire hoeveelheid bij 0° inneemt, $(v_0)_x$, dan wordt de toestandsvergelijking:

$$\left[p + a_x p_0 \frac{(v_0)_x^2}{v^2}\right]\left[v - b_x (v_0)_x\right] = p_0 (v_0)_x (1 + a_x)(1 - b_x) 1 + \alpha t),$$

waaruit wij afleiden, dat als wij voor verschillende mengsels, in gelijke waarde van v, en bij gelijke waarde van t, de waarde van p zoo groot hebben dat het eerste lid en dus ook het tweede lid gelijk is, aan de voorwaarde, dat in 1 cM^3. evenveel molekulen aanwezig zijn, voldaan is.

Het eenvoudige resultaat is dus, dat men voor de verschillende mengsels de hoeveelheid zoo kiest dat $(v_0)_x (1 + a_x)(1 - b_x)$ even groot is. Daar $p_0 (v_0)_x (1 + a_x)(1 - b_x)(1 + \alpha t)$ de limietwaarde van het product pv is, is dus ook aan de bovengestelde voorwaarde voldaan, als deze limietwaarde voor de verschillende mengsels gelijk is.

Bij de waarnemingen omtrent mengsels van koolzuur en waterstof, door Dr. J. VERSCHAFFELT in de beide vorige verslagen der Akademie medegedeeld, heeft de waarnemer ter bepaling van de volumina, die gelijke hoeveelheid molekulen bevatten, een weg gevolgd, die overeenkomt met het zoeken van $(v_0)_x (1 + a_x)(1 - b_x)$, terwijl hij

meent, dat het zoeken van de limietwaarde van pv niet tot het doel zou voeren. Dit laatste meen ik te moeten opmaken uit zijn opmerking bladz. 398 „Uit het oogpunt" enz.

Wat daarvan zij in het midden latende, wil ik doen zien, dat beide wegen tot het doel kunnen leiden. Tegelijkertijd wensch ik te onderzoeken in hoever zijn waarnemingen met de door mij gegeven toestandsvergelijking in overeenstemming zijn. Maar vooraf een opmerking over den juisten vorm der toestandsvergelijking van een mengsel, of liever over de waarde der grootheden a_x en b_x.

Ik heb daarvoor vroeger altijd den volgenden vorm aangenomen

$$a_x = a_1 (1-x)^2 + 2\, a_{12}\, x (1-x) + a_2\, x^2$$
$$\text{en} \quad b_x = b_1 (1-x)^2 + 2\, b_{12}\, x (1-x) + b_2\, x^2 .$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat als men volkomen juist wil zijn, gesteld moet worden:

$$a_x (v_0)_x^2 = a_1 (v_0)_1^2 (1-x)^2 + 2\, a_{12} \quad (v_0)_1 (v_0)_2\, x (1-x) + a_2 (v_0)_2^2\, x^2$$
$$\text{en} \quad b_1 (v_0)_x = b_1 (v_0)_1 \; (1-x)^2 + 2\, b_{12} \sqrt{(v_0)_1 (v_0)_2}\, x (1-x) + b_2 (v_0)_2 \; x^2 .$$

Mocht men $(v_0)_1$, $(v_0)_2$ en $(v_0)_x$ aan elkander gelijk stellen, dan is er tusschen de beide waarden van a_x en b_x geen verschil; en in elk geval zal, als de waarnemingen omtrent de mengsels niet den hoogsten graad van nauwkeurigheid bereiken, het verschil nauwelijks merkbaar zijn. Maar vooreerst ter wille der volkomen juistheid der theoretische beschouwingen is het noodig den juisten vorm te kennen, en ten tweede schijnen de waarnemingen van VERSCHAFFELT dien hoogen graad van nauwkeurigheid te hebben beoogd en misschien bereikt, waarbij afwijkingen tusschen de tweeërlei waarden van a_x en b_x van invloed zouden kunnen zijn.

Gaan wij er nu toe over te onderzoeken in hoever VERSCHAFFELT geslaagd is in het bepalen van de volumes, die onder den druk van 1 atmosfeer gelijk aantal molekulen bevatten.

Hij stelt daarvoor:

$$y = 0{,}99931 + 0{,}006 \; (1-x)^2 \; .$$

Deze formule levert voor waterstof ($x = 1$) de waarde 0,99931. Voor koolzuur ($x = 0$) de waarde 1,0053 en voor $x = \frac{1}{2}$ de waarde 1,00081. Met behulp dezer drie waarden, aan waarnemingen ontleend, heeft hij zijn formule berekend, terwijl hij onderstelde, dat $y = a + bx + cx^2$ zou mogen gesteld worden.

Volgens de theorie moet de factor, waarmede $(v_0)_x$ moet vermenigvuldigd worden om het volume te verkrijgen, dat even groot aantal molekulen bevat, gelijk zijn aan:

$$(1 + a_x)\,(1 - b_x) = 1 + a_x - b_x\,.$$

De laatste vorm $(1 + a_x - b_x)$ aannemende, maakt men reeds een benadering. Maar zelfs met deze benadering vindt men:

$$y = 1 + (1+a_x - b_x)^2 \left[\frac{a_1\,(1-x)^2}{(1+a_1-b_1)^2} + 2a_{12}\,\frac{x\,(1-x)}{(1+a_1-b_1)(1+a_2-b_2)} + a_2\,\frac{x^2}{(1+a_2-b_2)^2}\right] -$$

$$-(1+a_x-b_x)\left[\frac{b_1\,(1-x)^2}{1+a_1-b_1} + 2b_{12}\,\frac{x\,(1-x)}{\sqrt{(1+a_1-b_1)(1+a_2-b_2)}} + b_2\,\frac{x^2}{1+a_2-b_2}\right],$$

zoodat weder slechts bij een nieuwe benadering een vorm van de gedaante $y = a + bx + cx^2$ gevonden wordt. Dit alles kan afwijking geven, maar toch zal de fout die men begaat door dezen vorm aan te nemen slechts gering blijven — en mijn bezwaar tegen de formule:

$$y = 0{,}99931 + 0{,}006\,(1-x)^2$$

ligt dan ook elders.

Verschaffelt merkt zelf op, dat als hij van andere experimenteele gegevens was uitgegaan, om de waarden van a, b en c te bepalen, hij de volgende formule had gevonden:

$$y = 0{,}9995 + 0{,}00136\,(1-x) + 0{,}0056\,(1-x)^2\,.$$

Maar hij gebruikt de eerst gegevene — en nu wil ik doen zien, dat de laatste nagenoeg in overeenstemming is met wat zijn eigen proeven leeren, en de eerste zeker niet juist kan zijn.

Wanneer men twee gassen met elkander in allerlei proporties mengt, en het eerste gas (koolzuur) wijkt naar de ééne zijde af van de wet van Boyle, terwijl het andere gas (waterstof) dit naar de andere zijde doet, dan is er zeker een mengsel te wachten, dat de wet van Boyle volgt. Wat bij een enkel gas door temperatuurverandering kan teweeggebracht worden, geschiedt dan door verandering in de mengverhouding. Voor zulk een mengsel is $y = 1$. Uit de formule

$$1 = 0{,}99931 + 0{,}006\,(1-x)^2$$

volgt $x = {}^2/_3$ circa. Uit de formule

$$1 = 0{,}9995 + 0{,}00136\,(1-x) + 0{,}0056\,(1-x)^2$$

volgt $x = 0{,}8$.

Nu deelt VERSCHAFFELT waarnemingen mede voor $x = 0,7963$ en $x = 0,6445$. Neemt men de producten pv voor $x = 0,7963$, dan vindt men achtereenvolgens de getallen

1,0740, 1,0756, 1,0764, 1,0749, 1,0748.

Bij $v = 0.02$ is dit getal nog 1,0750 en eerst bij $v = 0,01$ is het geklommen tot 1.0960.

Uit deze waarden van pv besluit men, dat men met een mengsel te doen heeft, dat op de grens staat bij groote volumes de wet van BOYLE te volgen. Uit de lange reeks grootere volumes waarbij feitelijk gelijkheid van dit product is gevonden, zou eigenlijk afgeleid kunnen worden, dat het nog iets afwijkt in den zin van koolzuur, en dat dus x nog iets grooter zou moeten zijn om een mengsel te hebben, dat alleen bij zeer groote volumes de wet van BOYLE volgt, maar toch van den beginne af een toenemend product toont.

Neemt men de waarde van pv bij het mengsel, waarbij $x = 0,6445$ bedroeg, dan vindt men:

1,0431, 1,0425, 1,0413, 1,0411, 1,0413, 1,041,

terwijl bij $v = 0,002$ het product gedaald is tot 1.036 en bij $v = 0,01$ nog verder gedaald is tot 1.021. Uit de eerst opgegeven reeks van waarden zou men misschien nog in twijfel staan, of ook dit mengsel misschien de wet van BOYLE volgt, maar de waarde bij $v = 0,01$, die nog merkbaar kleiner is geworden, beslist, en toont overtuigend, dat dit mengsel nog afwijkt in den zin van koolzuur. Mijn besluit is dus, dat voor het mengsel, waarvoor $y = 1$ is, de waarde van x niet beneden 0,8 kan dalen.

Bij een dergelijk mengsel is het product $pv = (1 + \alpha t)$, of $(t = 18°)$ $pv = 1,06606$. Voor deze waarde vonden wij hierboven 1,074. Dit zou doen besluiten, dat als VERSCHAFFELT het volume gelijk aan 0,03 stelt het inderdaad slechts gelijk was aan 0,02983. Daar dergelijk verschil ook bij de volgende volumes gevonden wordt, zou het beteekenen, dat hij de eenheid van volume circa $^1/_2$ pCt. te groot genomen heeft — een fout, die het bedrag der hierboven besproken correcties te boven gaat. Wilde men deze fout niet toestemmen, dan zou men het mengsel, waarvoor $pv = 1 + \alpha t$ is, moeten zoeken bij kleinere waarden van x; iets, wat met den gang der samendrukking in strijd is, gelijk hierboven is aangetoond.

Nemen wij 35.80 als de waarde van den druk, dien een gas zou uitoefenen, als het de wet van BOYLE zou volgen. Dan vinden wij bij elke reeks van waarnemingen (zie Tabel XII, pg. 400) bij het

volume $x = 0{,}02983$, den druk aangegeven, die van 35,8 moet afgetrokken worden, om den invloed der afwijkingen te vinden.

Stellen wij

$$(35{,}8 - p) = \frac{a_x - b_x(1 + \alpha t)}{v^2} ,$$

dan zal uit deze benaderde vergelijking voor elk mengsel $a_x - b_x(1+\alpha t)$ berekend kunnen worden. Berekent men $a_1 - b_1(1 + \alpha t)$ (voor koolzuur), dan vindt men 0,00614 en voor $a_2 - b_2(1 + \alpha t)$ (waterstof) een waarde gelijk aan $-0{,}000454$. Met deze waarden kan men voor $y = a + bx + cx^2$ de constanten bepalen, als men nog gebruik maakt van de omstandigheid, dat voor $x = 0{,}8$ de waarde van $y = 1$ te vinden is. Men vindt dan:

$$y = 0{,}999546 + 0{,}001189\,(1-x) + 0{,}005405\,(1-x)^2 ,$$

een vergelijking, die groote overeenkomst vertoont met die, welke Verschaffelt gemeend heeft niet te moeten gebruiken, en welke toch nu geheel uit zijn eigen waarnemingen is afgeleid.

In de volgende tabel vinden wij de waarde van y voor waarden van $x = 0{,}1$, $0{,}2$ enz.

$x = 0$	$y = 1.00614$
0.1	1.00499
0.2	1.00396
0.3	1.00303
0.4	1.00220
0.5	1.00149
0.6	1.00089
0.7	1.00039
0.8	1
0.9	0.99972
1	0.99954

Door toepassing van de benaderde formule

$$(35.8 - p)\,v^2 = a_x - b_x\,(1 + \alpha t)$$

vindt men uit de reeksen waarnemingen

$x = 0.0995$	$y = 1.00483$
$x = 0.1990$	1.00398
$x = 0.3528$	1.00276
$x = 0.4993$	1.00177
$x = 0.6445$	1.00093
$x = 0.7963$	1
$x = 0.8972$	0.99965

Een afwijking van belang vindt men alleen bij $x = 0.5$.

Uit

$$a_x - b_x (1 + \alpha t) = -0{,}000454 + 0{,}001189 (1-x) + 0{,}005405 (1-x)^2$$

berekent men voor $t = 18^\circ$ $a_{12} - b_{12} (1 + \alpha t) = 0{,}0001375$ en

$$a_1 + a_2 - 2\, a_{12} - (b_1 + b_2 - 2\, b_{12}) (1 + \alpha t) = 0{,}005404 \; .$$

Volgens deze waarde van $a_{12} - b_{12} (1 + \alpha t)$ zou [1]) de afwijking van de wet van DALTON in den gewonen zin zijn; dat wil zeggen, zoodanig dat de druk van het mengsel bij grootere volumes kleiner is dan de som der afzonderlijke drukkingen, terwijl bij kleinere volumes omkeering van teekens plaats grijpt. Wegens de kleinheid van $a_{12} - b_{12} (1 + \alpha t) = 0{,}0001375$, zal de afwijking slechts klein zijn. Wij kunnen aan de waarnemingen van VERSCHAFFELT (tabel XII) dit kenmerk toepassen voor $x = {}^1/_2$. Zoo is voor $v = 0{,}03$ $p_1 = 28{,}9$ en $p_2 = 36{,}31$. Mengt men gelijk aantal molekulen koolzuur en waterstof, zoodat $x = {}^1/_2$ is, in hetzelfde volume $v = 0{,}03$, dan heeft men in dat volume tweemaal zooveel molekulen, en dus hetzelfde aantal in $v = 0{,}015$. Voor dat volume vindt VERSCHAFFELT $p = 65$. De waarde van $p_1 + p_2 = 65{,}21$.

Evenzoo is

bij	$v = 0.028$	$p_1 = 30.58$	$p_2 = 38.97$	$p_1 + p_2 = 69.45$	en bij	$v = 0.014$	$p = 69.30$
„	$v = 0.026$	$p_1 = 32.40$	$p_2 = 42.04$	$p_1 + p_2 = 74.44$	en bij	$v = 0.013$	$p = 74.20$
„	$v = 0.024$	$p_1 = 34.38$	$p_2 = 45.65$	$p_1 + p_2 = 80.03$	en bij	$v = 0.012$	$p = 80.00$
„	$v = 0.022$	$p_1 = 36.55$	$p_2 = 49.94$	$p_1 + p_2 = 86.49$	en bij	$v = 0.011$	$p = 86.75$
„	$v = 0.020$	$p_1 = 39.08$	$p_2 = 55.10$	$p_1 + p_2 = 94.18$	en bij	$v = 0.010$	$p = 94.40$

In het geval van koolzuur en waterstof, is dus niet de $a_{12} - b_{12} (1 + \alpha t)$ groot en $(a_1 + a_2 - 2\, a_{12}) - (b_1 + b_2 - 2\, b_{12}) (1 + \alpha t)$ klein, maar omgekeerd. Het laatste zal te wachten zijn bij stoffen, die veel in physische eigenschappen verschillen.

In mijne mededeelingen, onder denzelfden titel, in de Verslagen van November en December 1898, heb ik twee benaderingsregels voor mengsels besproken, nl. de wet van DALTON en die van AMAGAT. Er zou een derde benaderingswet kunnen gegeven worden, aldus luidende: Een stof oefent in een mengsel denzelfden druk uit, alsof de andere molekulen door molekulen van haar eigen soort vervangen waren. Noemen wij den druk, dien het eerste gas in zeker gegeven volume zou uitoefenen, als alle molekulen gelijksoortig waren p_1 en

[1]) Zie Verslag der vergad. Nov. 1898.

dien voor het tweede gas p_2, dan komt deze benaderingswet neder op het stellen van

$$p = p_1 (1 - x) + p_2 x .$$

Uit de grafische voorstelling van VERSCHAFFELT pag. 395 blijkt dat voor koolzuur en waterstof $p - [p_1 (1-x) + p_2 x]$ positief is.

Uit de toestandsvergelijking is voor dit verschil af te leiden:

$$p - p_1 (1-x) - p_2 x = x(1-x) \frac{(a_1 + a_2 - 2 a_{12}) - (b_1 + b_2 - 2 b_{12}) (1 + \alpha t)}{v^2}$$

voor alle formules groot genoeg om voor $\frac{v}{v-b}$ te kunnen stellen $1 + \frac{b}{v}$. Wij zien dus, dat deze derde benaderingswet voor groote volumes samenvalt met die van AMAGAT.

Bij gegeven volume is dus p een functie van x van den tweeden graad, en zal de maximumafwijking gevonden moeten worden bij $x = 1/2$.

Voor $v = 0,024$ geeft de volgende tabel de berekende en de waargenomen waarde van de drukking.

In de formule $p = p_1 (1-x) + p_2 x + A x (1-x)$ is $A = 8$ gesteld.

x	0	0.05	0.1	0.2	0.3528	0.5	0.6445	0.8	0.9	1
p berekend	34.38	35.32	36.22	37.91	40.18	42.01	43.47	44.67	45.24	45.65
p waargenomen	34 38	35.53	36.54	38.04	40.12	41.80	43.33	44.80	45.48	45.65

Voor de waarde die wij voor A zouden kunnen berekenen door middel van de betrekking

$$A = \frac{(a_1 + a_2 - 2 a_{12}) - (b_1 + b_2 - 2 b_{12}) (1 + \alpha t)}{v^2},$$

zouden wij met $\Delta_a - \Delta_b (1 + \alpha t) = 0,005405$ (zie pag. 475) vinden circa 9,5.

De berekening voor p met $A = 9,5$ geeft bijna volkomen aansluiting voor x en $1-x$ klein, maar dan zijn de verschillen voor waarden van x in den omtrek van $1/2$ weder grooter. Uit $A = 8$ zou $\Delta_a - \Delta_b (1 + \alpha t) = 0,00461$ volgen [1]).

---

[1]) De coëfficienten in de vergelijking

$$y = 0,999546 + 0,001189 (1-x) + 0,005405 (1-x)^2$$

Uit dit alles volgt, dat absolute overeenstemming tusschen de theorie en de waarnemingen van VERSCHAFFELT nog niet bestaat. Maar de verschillen blijven beneden 1 pCt. Het zou prematuur zijn op dit oogenblik te willen beslissen of de verschillen aan de theorie of aan het experiment zijn toe te schrijven. Wel kan gezegd worden, dat bij deze waarnemingen de verschillen kleiner zijn, dan bij de tot hiertoe door mij getoetste. En het feit, dat tot nu toe naarmate de waarnemingen tot hooger nauwkeurigheid worden gebracht, de verschillen kleiner worden, schijnt mij toe in het voordeel der theorie te spreken.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt voor het Verslag een opstel aan van Prof. L. BOLTZMANN, Buitenlandsch Lid der Akademie, getiteld: „*Ueber die Zustandsgleichung* v. D. WAALS'," vergezeld van een schrijven, waaruit het volgende uittreksel is overgenomen:

WIEN, am 2 März 1899.

Hochgeehrter Herr College!

Herr VAN LAAR hat mir aus Utrecht eine Rechnung zugesandt, welche er auf Ihre Anregung hin unternahm. Ich habe daraus das nächste Correctionsglied Ihrer Formel nach der mir eigenthümlichen Methode berechnet und erlaube mir, Ihnen das Manuscript beiliegend zu übersenden. Das Resultat wird mit demjenigen, wozu Sie gelangen, nicht völlig übereinstimmen, aber eine Discussion darüber wäre mir aus mathematischen Gründen sehr interessant, weniger aus physikalischen, da ja noch weitere Glieder doch

---

hebben wij, behalve met de gegevens voor koolzuur en waterstof, berekend uit de onderstelling dat $y = 1$ is voor $x = 0{,}8$.

Stelt men $y = 1$ voor $x = 0{,}82$, dan worden de coëfficienten

$$y = 0{,}999546 + 0{,}001618\,(1-x) + 0{,}00497\,(1-x)^2 \;.$$

Deze waarden dezer coëfficienten acht ik waarschijnlijker; dan sluiten ook de getallen der beide tabellen op pag. 474 beter met elkander.

Met deze coëfficienten is:

$$a_{12} - b_{12}\,(1 + \alpha t) = 0{,}000355$$

en

$$(a_1 + a_2 - 2\,a_{12}) - (b_1 + b_2 - 2\,b_{12})\,(1 + \alpha t) = 0{,}00497 \;.$$

nicht berechenbar sein werden. Nun sind für kleine Drucke die Beobachtungen zu ungenau als dass dieses Glied nützlich wäre, während man für hohe Drucke noch mehr Annäherungsglieder brauchte. Zudem liegen für *Hg*-dampf, Argon, Helium, wo man kugelförmige Moleküle vermuthen könnte, keine Beobachtungen vor.

Es wäre mir lieb, wenn Sie die Güte hätten, mein Manuscript der Amsterdamer Academie der Wissenschaften vorzulegen und wenn es in deren Berichten abgedruckt werden könnte, weil ich glaube, dass dadurch meine Absicht, diejenigen, welche sich für die Frage interessiren, zu einer der Wissenschaft nützlichen Discussion anzuregen, am besten erreicht würde. . . . .

. . . .

Ihr ergebenster,
LUDWIG BOLTZMANN.

Herr VAN LAAR hat auf Anregung des Herrn VAN DER WAALS eine Formel berechnet [1]), welche zur Berechnung eines weiteren Näherungsgliedes in der Formel des letzteren geeignet ist. Ich will hier zeigen, wie die Formel des Herrn VAN LAAR zur Ergänzung meiner diessbezüglichen Rechnungen benützt werden kann und mich dabei derselben Bezeichnungen bedienen, wie im zweiten Theile meiner Vorlesungen über Gastheorie, welche ich immer kurz mit l. c. citire.

I. *Berechnung des für den Mittelpunkt eines neu hinzugekommenen Molecules im Gase verfügbaren Raumes.*

Sei V das Volumen eines Gefässes, worin sich n gleich beschaffene, sehr kleine, starre Kugeln (Molekule) von der Masse m und dem Durchmesser σ befinden.

Wir bezeichnen mit D_1 den ersten Annäherungswert, des für den Mittelpunkt eines neu hinzugekommenen gleich beschaffenen Moleculs im Gefäss verfügbaren Raumes D, so dass $D_1 = V$ ist. In zweiter Annäherung müssen wir hiervon das Volumen der Deckungssphären aller n Molecule abziehen, wobei wir unter Deckungssphäre eine dem Molecule concentrische Kugel vom Radius σ, daher vom Volumen $\frac{4}{3}\pi\sigma^3$ verstehen. Setzen wir $\frac{2\pi\sigma^3}{3m} = b$ und die gesammte Masse

---

[1]) Amsterdamer Academie der Wissenschaften 26 Januar 1899, ausgegeben am 6 Februar.

des Gases $m n = G$, so ist also die Summe der Volumina aller n Deckungssphären $2 G b$ und der zweite Annäherungswert des D ist daher

$$D_2 = V - 2 G b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In dritter Annäherung müssen wir bedenken, dass nicht das gesammte Volumen aller Deckungssphären von V abzuziehen ist, da hie und da zwei Deckungssphären ineinandergreifen und dann der Raum, der beiden gemein ist, nur einmal abzuziehen ist. Wir müssen also die Summe Z aller Räume, welche irgendwo zwei Deckungssphären gemein haben, wieder zu D_2 addiren.

Das Volumen Z finden wir in folgender Weise: Wir schlagen um den Mittelpunkt jedes der n Molecüle eine dem Molecule concentrische Kugelschale vom inneren Radius x und der sehr kleinen Dicke dx, welche wir die Kugelschale S nennen wollen. Das gesammte Volumen R aller so construirten Kugelschalen S ist $4 \pi n x^2 dx$. Die Anzahl dn der Moleculmittelpunkte, welche sich in allen diesen Kugelschalen befinden, verhält sich zur Gesammtanzahl der Molecule in erster Annäherung wie R zum Gefässvolumen V, so dass man also erhält

$$dn : n = 4 \pi n x^2 dx : V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

oder

$$dn = \frac{4 \pi n^2 x^2 dx}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Letzterer Ausdruck gibt die Anzahl der Molecule, deren Mittelpunkt von dem Mittelpunkte irgend eines anderen Molecules einen Abstand hat, der zwischen x und $x + dx$ liegt. Die Anzahl der Moleculpaare, deren Mittelpunkte einen zwischen diesen Grenzen liegenden Abstand haben, ist $\frac{1}{2} dn$. Sobald x zwischen σ und 2σ liegt, werden die Deckungssphären der beiden Molecule des betreffenden Paares einen linsenförmigen Raum vom Volumen

$$2 K = \frac{\pi}{12} (16 \sigma^3 - 12 \sigma^2 x + x^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

mit einander gemein haben (l.c. p. 166) [1]). Das gesammte Volumen aller dieser linsenförmigen Räume, welche bei allen möglichen

---

[1]) Vrgl. auch VAN DER WAALS, Amsterdamer Acad. 31 Oct. 1896 und 29 Oct. 1898.

Moleculpaaren vorkommen, wurde mit Z bezeichnet. Es ist daher

$$Z = \int K\, dn = \frac{\pi^2 n^2}{6V} \int_{\sigma}^{2\sigma} x^2\, dx\, (16\, \sigma^3 - 12\, \sigma^2 x + x^3) = \frac{17}{16} \frac{G^2 b^2}{V} \quad . \quad (5)$$

und es wird

$$D_3 = V - 2\, G b + Z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Der Wert von D, worin die Annäherung noch um einen Grad weiter getrieben ist, heisse D_4. Um ihn zu finden, muss man erstens von D_3 wieder die Summe aller Volumina abziehen, welche den Deckungssphären je dreier Molecule gleichzeitig angehören und welche nach Herrn VAN LAAR gleich

$$\frac{2\, \beta\, G^3\, b^3}{V^2}$$

ist, wobei β die von ihm berechnete und auf der letzten Seite seiner Abhandlung ebenfalls mit β bezeichnete Grösse ist. Zweitens muss man aber auch noch zu Z ein Correctionsglied hinzufügen, welches wir mit ζ bezeichnen wollen, so dass

$$D_4 = V - 2\, G b + \frac{17\, G^2 b^2}{16\, V} - 2 \beta \frac{G^3 b^3}{V^2} + \zeta \quad . \; . \; . \quad (7)$$

ist. Das Correctionsglied ζ erhalten wir durch folgende Ueberlegung: Die Proportion (2) ist nur in erster Annäherung richtig. Strebt man eine grössere Genauigkeit an, so darf das letzte Glied der Proportion nicht einfach V heissen, da ja nicht das ganze Gefässvolumen für alle n Molecule verfügbar ist. Ebenso muss auch zum vorletzten Gliede der Proportion eine Correction hinzugefügt werden, weil auch ein Theil des oben mit R bezeichneten Volumens in die Deckungssphäre anderer Molecule fallen wird.

Wir können nun zunächtst folgenden Satz aufstellen. Der Wahrscheinlichkeit gemäss, wird sich die oben mit dn bezeichnete Zahl zur Gesammtzahl n der Molecule verhalten, wie derjenige Theil R_1 des Raumes R, welcher für den Mittelpunkt eines neu hinzutretenden Molecules noch verfügbar ist, zum gesammten Raume der inner-

halb des Gefässes für den Mittelpunkt eines neu hinzutretenden Molecules verfügbar ist. [1])

Letzterer Raum ist nach Formel (1) $V - 2\,Gb$. Das letzte Glied der Proportion (2) muss also $V - 2\,Gb$ statt V heissen und es ist noch R_1 zu suchen. Zu dem Ende construiren wir zu jeder der oben betrachteten n Kugelschalen vom Radius x und der Dicke dx, welche wir die Kugelschalen S genannt haben, eine concentrische Kugelschale vom inneren Radius y und der Dicke dy. Die in dieser Weise neu construirten Kugelschalen nennen wir die Kugelschalen T. Die Anzahl der Moleculmittelpunkte, welche in allen Kugelschalen T zusammengenommen liegen, ist analog mit Gleichung (3)

$$d\nu = \frac{4\,\pi\,n^2\,y^2\,dy}{V} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Innerhalb der Deckungssphäre jedes einzelnen dieser Molecule fällt der Theil

$$\pi\,x\,\frac{\sigma^2 - (x - y)^2}{y}$$

der Oberfläche, daher der Theil

$$\omega = \pi\,x\,dx\,\frac{\sigma^2 - (x - y)^2}{y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

des Innenraumes der betreffenden Kugelschale S vom Radius x und der Dicke dx, wie eine leichte Rechnung lehrt. Derjenige Theil des Volumens aller Kugelschalen S, welcher von den Deckungssphären aller $d\nu$ Molecule zusammen überdeckt wird, ist daher $\omega . d\nu$.

Würde sich im Inneren der Kugelschalen S kein Molecul befinden, so wäre dieser Ausdruck bezüglich y von $x - \sigma$ bis $x + \sigma$ zu integriren und es würde folgen

$$\int \omega\,d\nu = \frac{16\,\pi^2\,n^2\,x^2\,\sigma^3}{3\,V}\,dx = \frac{2\,b\,G}{V}\,.\,4\,\pi\,n\,x^2\,dx \quad . \; . \; . \quad (10)$$

Es würde sich also der von den Deckungssphären überdeckte Theil des gesammten Volumens $R = 4\,\pi\,n\,x^2\,dx$ aller Kugelschalen S zu diesem gesammten Volumen R verhalten, wie der ganze von den Deckungssphären aller Molecule des Gases eingenommene Raum

---

[1]) Bezüglich der ausführlicheren Begründung dieses Satzes vergl. l.c. § 51.

$2\,Gb$ zum ganzen Volumen des Gefässes V, was von vorne herein zu erwarten war.

Nun befindet sich aber in jeder Kugelschale S ein Molecul, so dass der Mittelpunkt des zweiten Molecules nicht näher als bis in die Entfernung σ an den Mittelpunkt der Kugelschale herantreten kann. Es ist daher von dem Werte (10) abzuziehen

$$\int_{y=x-\sigma}^{y=\sigma} \omega\, d\nu = \frac{4\,\pi^2\, n^2\, x^2\, dx}{V}\left(\frac{x^3}{12} - x\,\sigma^2 + \frac{4\sigma^3}{3}\right) = 4\,\pi\, n\, x^2\, dx\, \gamma,$$

wobei

$$\gamma = \frac{\pi n}{12\,V}\,(x^3 - 12\,x\,\sigma^2 + 16\,\sigma^3) \text{ ist.}$$

Statt des vorletzten Gliedes in der Proportion (2) ist daher zu setzen

$$4\,\pi\, n\, x^2\, dx \left(1 - \frac{2\,Gb}{V} + \gamma\right)$$

Da statt des letzten $V\left(1 - \frac{2\,Gb}{V}\right)$ zu setzen ist, so kommt es bei Vernachlässigung von Gliedern noch höherer Ordnung auf dasselbe hinaus, als ob man das letzte Glied beliesse und statt des vorletzten setzen würde

$$4\,\pi\, n\, x^2\, dx\,(1 + \gamma).$$

Man erhält daher zu dn noch das Correctionsglied

$$d\nu = \gamma\, dn$$

und zu Z das Correctionsglied

$$\zeta = \int K\,\gamma\, d\nu = \frac{\pi^3\, n^3}{72\,V^2}\int_{\sigma}^{2\sigma} x^2\, dx\,(x^3 - 12\,\sigma^2\, x + 16\,\sigma^3)^2 =$$

$$= \frac{2357}{22680} \cdot \frac{\pi^3\, n^3\, \sigma^9}{V^2} = \frac{2357}{6720}\,\frac{G^3\, b^3}{V^2}\,;$$

somit liefert die Formel (7):

$$D_4 = V - 2\,G\,b + \frac{17}{16}\,\frac{G^2 b^2}{V} + \left(\frac{2357}{6720} - 2\beta\right)\frac{G^3 b^3}{V^2} =$$

$$= V - 2\,G\,b\left[1 - \frac{17}{32}\,\frac{G\,b}{V} + \left(\beta - \frac{2357}{13440}\right)\frac{G^2 b^2}{V^2}\right] \quad (11)$$

Dies ist also der im ganzen Gefässe für den Mittelpunkt eines Moleculs verfügbare Raum, wenn man die Glieder von 4 verschiedenen Grössenordnungen bezüglich $\frac{G\,b}{V}$ berücksichtigt.

II. *Correction der* VAN DER WAALS'*schen Gleichung.*

Diese Correction kann hieraus am kürzesten nach der Methode gefunden werden, welche ich l. c. § 61 einschlug. Substituirt man an Stelle des dort benutzten und dort durch Gleichung 173 gegebenen Ausdruckes D den jetzt gefundenen Ausdruck D_4, so erhält man an Stelle der ersten Formel auf Seite 174

$$l\left[v - 2\,\nu\,m\,b + \frac{17}{16}\,\frac{\nu^2 m^2 b^2}{v} + \left(\frac{2357}{6720} - 2\,\beta\right)\frac{\nu^3 m^3 b^3}{v^2}\right] =$$

$$= l\,v - \frac{2\,\nu\,m\,b}{v} - \frac{15}{16}\,\frac{\nu^2 m^2 b^2}{v^2} - \left(\frac{1283}{6720} + 2\,\beta\right)\frac{\nu^3 m^3 b^3}{v^3}\,,$$

daher statt der 6 Zeilen darauf folgenden Formel für S:

$$S = \frac{3\,n\,r}{2}\int(1+\beta)\frac{d\,T}{T} + r\left[l\,v - \frac{b}{v} - \frac{5}{16}\,\frac{b^2}{v^2} - \left(\frac{1283}{26880} + \frac{\beta}{2}\right)\frac{b^3}{v^3}\right].$$

Die auf diese Formel l. c. folgende Formel für

$$\frac{\partial\,(T\,S)}{\partial\,v}$$

aber verwandelt sich in

$$\frac{\partial\,(T\,S)}{\partial\,v} = r\,T\left[\frac{1}{v} + \frac{b}{v^2} + \frac{5}{8}\,\frac{b^2}{v^3} + \left(\frac{1283}{8960} + \frac{3\,\beta}{2}\right)\frac{b^3}{v^4}\right]$$

so dass also die corrigirte VAN DER WAALS'sche Zustandsgleichung folgendermassen lauten würde:

$$p + \frac{a}{v^2} = r\,T \left[\frac{1}{v} + \frac{b}{v^2} + \frac{5}{8}\frac{b^2}{v^3} + \left(\frac{1283}{8960} + \frac{3\,\beta}{2}\right)\frac{b^3}{v^4} \right]$$

$$= \frac{r\,T}{v - b + \frac{3}{8}\frac{b^2}{v} + \left(\frac{957}{8960} - \frac{3\,\beta}{2}\right)\frac{b^3}{v^2}} \quad . \quad (12)$$

Hierbei ist nach Herrn VAN LAAR

$$\beta = \frac{73\sqrt{2} + 81.17\left(arc\,tg\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{32.35\,\pi} = 0.0958 \; .$$

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling n°. 48 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: Dr. E. VAN EVERDINGEN JR. „*De galvanomagnetische en thermomagnetische verschijnselen in bismuth*". (Tweede mededeeling).

1. In het Verslag der vergad. van 25 Juni 1898 werden de uitkomsten medegedeeld van waarnemingen der vier transversale galvanomagnetische en thermomagnetische verschijnselen, alle verricht in eenzelfde magneetveld bij éénzelfde plaatje electrolytisch neergeslagen bismuth. Met ditzelfde bismuthplaatje zijn thans ook waargenomen de vermindering van het geleidingsvermogen voor electriciteit en warmte en het longitudinaal thermomagnetisch verschijnsel. Het heeft veel moeite gekost de beide laatste verschijnselen met voldoende nauwkeurigheid te meten, en de verandering van het geleidingsvermogen voor warmte kan uit de metingen slechts bij benadering afgeleid worden. Dat de uitkomsten thans niettemin worden medegedeeld heeft twee redenen: vooreerst is het voor een voorloopige theorie voldoende, indien de grootte der verschijnselen nagenoeg bekend is, en ten tweede was het, met het oog op de geringe afmetingen van het plaatje, niet waarschijnlijk dat latere metingen bij ditzelfde plaatje een veel nauwkeuriger uitkomst voor de absolute waarde zouden geven. Bovendien heeft het plaatje bij een der laatste proeven een barst gekregen, die verder waarnemen onder dezelfde omstandigheden, zelfs wanneer men dit wenschte, toch verhindert.

Met de voltooiing van deze metingen zijn dus voor het eerst van alle verschijnselen, die voor de theorie van electriciteits- en warmtegeleiding in metalen in aanmerking komen, bij eenzelfde plaatje en in hetzelfde magneetveld waarnemingen verkregen. Voor een volledige

theorie zou het ook nog noodig zijn, de verandering met de temperatuur van de verschillende verschijnselen na te gaan; tevens zou daarbij de vraag omtrent een mogelijke verandering van het THOMSON-effect in het magneetveld ter sprake komen. Voorloopig wenschte ik echter deze verandering met de temperatuur buiten beschouwing te laten. Wel is waar komen bij de metingen, waartoe een warmtestroom noodig is, verschillende temperaturen voor, maar we zullen onderstellen, dat de verandering met de temperatuur klein genoeg is om in een voorloopige theorie der verschijnselen verwaarloosd te mogen worden. Voor zoover de reeds verkregen waarnemingen een beoordeeling mogelijk maken zijn zij met deze onderstelling niet in strijd.

2. Het is mij gelukt weerstandsverandering en longitudinaal-effect vóor te stellen met behulp van een empirische formule van den vorm

$$E = \frac{C_2 M^2}{1 + C_1 \sqrt{M^2}} \quad [1]$$

waarin E voorstelt het waargenomen verschijnsel en M de magneetkracht (bij de berekening uitgedrukt in de eenheid 1000 C. G. S.).

Naast de waargenomen grootheden zullen we nog opgeven de waarden, verkregen met deze empirische formule. Het zal blijken, dat zij de waarnemingen zeer voldoende weergeeft; toegepast op de waarnemingen van anderen, levert zij een gemakkelijk middel om de uitkomsten daarvan met de mijne te vergelijken. Ook was de formule een belangrijk hulpmiddel om uit te maken, dat weerstandsverandering en longitudinaal-effect bij alle magnetisaties evenredig zijn; een resultaat dat voor de theorie van het verschijnsel van groot belang is. Vat men bijv. het longitudinaal-effect op als een wijziging van het thermo-electrisch vermogen, dan volgt er uit dat men de verandering van het THOMSON-effect in het magneetveld zou kunnen afleiden uit de wijziging van de weerstandstoename bij verandering van temperatuur.

3. *Verandering van den galvanischen weerstand.*

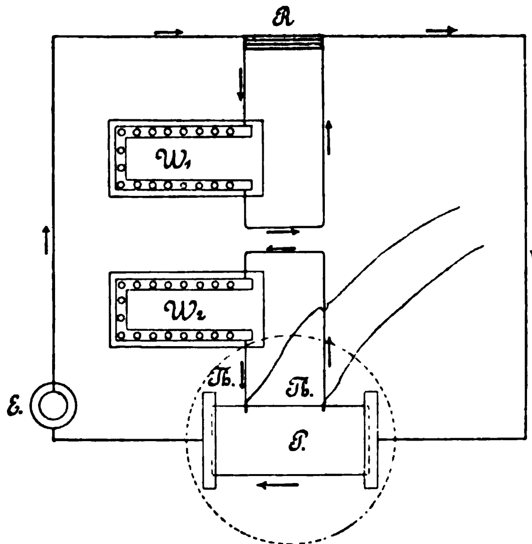
a. Metingen. De waarneming van deze verandering geschiedt volgens de methode, beschreven in het Verslag der vergad. van 21 April 1897, p. 493 [2]). Als weerstandselectroden dienden dezelfde thermo-

---

[1]) In den noemer werd $\sqrt{M^2}$ geschreven in plaats van M in verband met de opmerking van GOLDHAMMER, (Wied. Ann. 36, p. 824, 1889) dat de verschijnselen, die niet van teeken wisselen met het magneetveld, functies zijn moeten van M^2.

[2]) Zie ook mijn dissertatie p. 70.

elementen, welke bij de metingen der transversale verschijnselen gebezigd waren, en wier koperdraden weer met een der windingen van een differentiaalgalvanometer verbonden waren. In fig. 1 wordt het beginsel dezer waarnemingsmethode aanschouwelijk voorgesteld.



E = Element.
P = Bismuth-plaatje.
R = Rheotan-draden.
Th = Thermo-elementen.
W_1 en W_2 = Weerstandsbanken.

Fig. 1.

$C_1 = 0,258$ $C_2 = 1,000$

Magneetveld.	Toename in %.	Id. berekend.	Verschil.
4650	9,7	9,8	+ 0,1
6100	14,5	14,5	0,0
9200	25,1	25,1	0,0

Uit deze waarnemingen kon ook nog worden afgeleid een benaderde waarde voor den soortelijken weerstand van dit bismuth bij ± 20°, waarvoor gevonden werd 182000 C. G. S.

Dat dit getal belangrijk grooter is dan dat van FLEMING en DEWAR, 116000, waarvan bij de berekeningen in de vorige mededeeling gebruik is gemaakt, behoeft niet te verwonderen. Immers onze methode, al leert zij de verhouding der weerstanden in verschillende magneetvelden zeer juist kennen, is niet ingericht op en ook niet geschikt voor het nauwkeurig meten van den soortelijken weerstand. Vooreerst is n.l. de afstand der weerstandselectroden niet nauwkeurig

te bepalen, en ten tweede is het niet zeker dat de stroomlijnen geheel evenwijdig aan de zijkanten van het plaatje loopen, wat toch bij de berekening moet worden ondersteld. Om mij te overtuigen, dat deze omstandigheden op de meting van de weerstandstoename geen invloed uitoefenden heb ik bovendien die meting herhaald met een ander, op dezelfde wijze electrolytisch neergeslagen plaatje, dat zeer regelmatig gevormd was. Terwijl hier nu voor den soortelijken weerstand 121000 werd gevonden, waren de uitkomsten voor de procentische weerstandstoename bijna dezelfde als bij het andere plaatje.

b. Uitkomsten van andere waarnemers.

HENDERSON [1])

Temp. 18°. $C_1 = 0{,}2847$ $C_2 = 1{,}798$

Magneetveld.	Toename in °/₀.	Id. berekend.	Verschil.
960	1,5	1,3	— 0,2
1740	3,4	3,6	+ 0,2
2860	8,2	8,1	— 0,1
4160	14,8	14,2	— 0,6
6260	25,9	25,3	— 0,6
7190	30,7	30,5	— 0,2
8740	39,7	39,4	— 0,3
9650	45,2	44,7	— 0,5
10950	53,0	52,4	— 0,6
12750	62,3	63,1	+ 0,8

Ten einde te onderzoeken in hoeverre de empirische formule nog beteekenis behoudt buiten het gebied der waarnemingen, welke bij het berekenen der constanten werden gebruikt, substitueerde ik de waarde $M = 38900$, waarbij HENDERSON 233,4°/₀ vond; dit leverde 245,7°/₀, dus bij een zoover uitgestrekte extrapolatie een voldoende overeenstemming.

1) Wied. Ann. 53 p. 912, 1894. De hier vermelde cijfers hebben betrekking op de waarnemingen met de groote bismuthspiraal, welke aldaar grafisch zijn voorgesteld in fig. 4 van Tafel X.

VON ETTINGSHAUSEN en NERNST [1])

$C_1 = 0{,}1341\,C_2$ $C_2 = 0{,}8882$

Magneetveld.	Toename in %.	Id. berekend.	Verschil.
1600	2,53	1,87	— 0,7
3160	7,87	6,24	— 1,6
5880	19,7	17,2	— 2,5
8410	30,8	29,6	— 1,2
11200	43,6	44,6	+ 1,0

FLEMING en DEWAR [2])

Temp. 19°. $C_1 = -0{,}03084$ $C_2 = 0{,}1805$

Magneetveld.	Toename in %	Id. berekend.	Verschil.
2450	6,3	1,2	— 5,1
5500	13,6	6,6	— 7,0
14200	60,9	64,9	+ 4,0

De laatste waarnemingen kunnen, blijkens het negatieve teeken van C_1 en de groote afwijkingen, niet door onze formule worden voorgesteld. Uit dit voorbeeld kan echter juist blijken dat de getrouwe voorstelling van mijn drie resultaten door een formule met twee constanten meer beteekenis heeft dan een eerste blik zou doen vermoeden.

4. *Verandering van het warmtegeleidingsvermogen.*

a. Metingen. Daar het ons doel was, al de verschijnselen zooveel mogelijk onder dezelfde omstandigheden waar te nemen, was de aangewezen weg hier het bepalen van de temperatuursverandering op verschillende afstanden van de warmtebron, om daaruit de verandering van het geleidingsvermogen te berekenen.

Men neemt dus eerst waar de temperatuur bij den stationairen toestand zonder magneetveld, dan die temperatuur bij den nieuwen stationairen toestand in het magneetveld. Het bleek evenwel na

[1]) Wied. Ann. 33 p. 474, 1888.
[2]) Proc. Roy. Soc. 60, p. 425, 1896.

eenigen tijd dat, bij de tot dusverre gevolgde opstelling van het plaatje tusschen de polen, de toestand nimmer genoeg standvastig werd om de meting op deze wijze te verrichten; de onregelmatige veranderingen van de temperatuur waren, in vergelijking met de te meten temperatuurdaling, te groot. Dit bezwaar werd nagenoeg geheel opgeheven door het gebruik maken van een watermantel in den vorm van een **U** welke tusschen de polen van den electromagneet werd geplaatst, en waardoor water onder een constant drukverschil stroomde; de temperatuur bleef nu gedurende verscheiden uren op eenige tiende graden na constant.

De nieuwe opstelling van het plaatje wordt verduidelijkt door fig. 2.

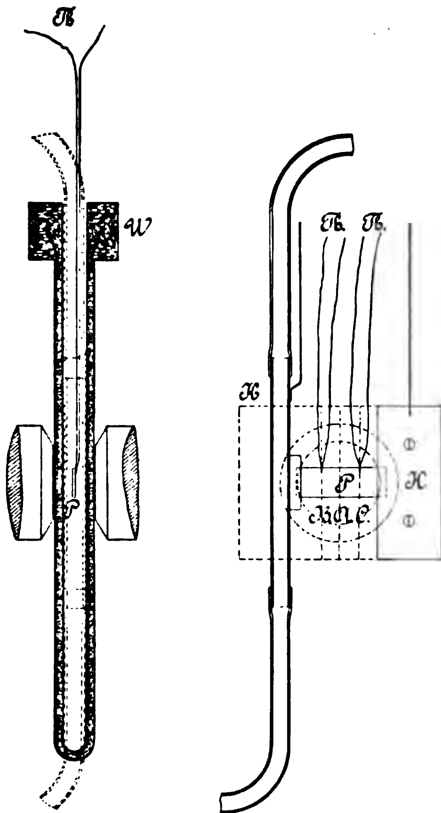


Fig. 2.

P. Bismuthplaatje.
Th. Thermo-element.
W. Watermantel.
K. Koperen buis, waardoor stoom gedreven wordt.
A. *B.* *C.* Groeven voor het insteken der thermo-elementen.
H. Houten blokje om het plaatje vast te houden.

Nadat het plaatje in dezen mantel was geplaatst, werd de overblijvende ruimte met watten opgevuld. Een controle proef, waarbij de mantel aan alle zijden met papier was dichtgeplakt, leverde geen afwijkende resultaten, zoodat men mag aannemen dat geen fouten door luchtstroomingen werden veroorzaakt.

Bij het inbrengen van de thermo-elementen op de daarvoor bestemde plaatsen werd aan den eenen kant gezorgd voor behoorlijk contact, aan den anderen kant evenwel toegezien dat niet de koper- of nieuwzilverdraden afzonderlijk met het bismuth in aanraking kwamen.

Het waarnemen geschiedde dan op deze wijze:

1. Gedurende 5 minuten den uitslag van het thermo-element waarnemen zonder magneetveld.
2. 5 minuten waarnemen met magneetveld in de eene richting.
3. 5 „ „ zonder „
4. 5 „ „ met „ „ „ andere „
5. 5 „ „ zonder „

enz.

Gedurende de 5 minuten na het verbreken van den magnetisatiestroom keert de temperatuur langzamerhand tot de oorspronkelijke waarde terug.

Voornamelijk met behulp van de uitslagen juist vóór het aanbrengen van het magneetveld werd daarom de overblijvende gang van den uitslag zonder magneetveld grafisch voorgesteld en hieruit de waarde van dien uitslag op een tijdstip 5 minuten nà het sluiten van den magnetisatiestroom geïnterpoleerd. Het verschil van deze waarde met den waargenomen uitslag juist vóór het verbreken van den stroom geeft de gezochte temperatuurdaling. Door het nemen van het gemiddelde bij beide magnetisatierichtingen verdwijnt de fout, die de draaiing der isothermen anders zou opleveren.

Hier volgen eenige der verkregen uitkomsten. De letters A, B en C duiden weer de drie vaste plaatsen bij het plaatje aan; de temperaturen boven elke kolom geven ten naaste bij de waarden zooals die bij de waarnemingen voorkwamen.

Magneetveld.	A ± 24°	B ± 36°	C ± 19°
2800	—	0°,38	0°,07
4800	0°,48	0°,83	0°,18
6100	0°,67	1°,25	0°,28

De temperatuur van den watermantel was bij al deze bepalingen ± 8°.

Ter beoordeeling van de nauwkeurigheid der afzonderlijke bepalingen laat ik hier volgen de uitslagen, waaruit het getal 0°,28 bij C werd afgeleid.

Uitslag zonder magn. (geïnterpoleerd).	Uitslag bij magn. A.	Uitslag bij magn. B.	Veranderring.	Gemiddelde.
37,90	36,80		1,10	
				0,90
38,06		37,35	0,71	
				0,95
38,14	36,95		1,19	
				0,90
38,12		37,52	0,60	
				0,86
38,33	37,22		1,11	
				0,89
38,86		38,20	0,66	
				0,90
39,42	38,28		1,14	
				0,90
39,80		39,13	0,67	
				0,90

Bij verscheiden van de bovenvermelde waarnemingen was de overeenstemming der afzonderlijke waarden nog grooter.

c. Berekening van de verandering van het warmtegeleidingsvermogen.

Stelt men door t voor het verschil van de temperatuur in het plaatje met die van de omgeving en door x den afstand tot het verwarmde einde, dan kan men, onder zekere vereenvoudigende onderstellingen, aannemen dat

$$\frac{d^2t}{dx^2} - a^2t = 0$$

waarin
$$a^2 = \frac{o\,s}{d\,g}$$

$d =$ doorsnede van het plaatje.
$o =$ omtrek „ „ „
$s =$ coëfficient van de uitwendige warmtegeleiding
$g =$ „ „ „ inwendige „

We nemen aan dat s niet van de magneetkracht afhangt.

Voor t vinden we nu

$$t = p\,e^{-ax} + q\,e^{+ax}.$$

Het groote bezwaar van de metingen bij ons bismuthplaatje is dat men niet, zooals bij een langer plaatje het geval zou zijn, den tweeden term voor niet te groote waarden van x verwaarloozen en den coëfficient p constant stellen kan (dit laatste zou alleen kunnen wanneer het plaatje onmiddellijk aan de verwarmde buis gesoldeerd

was). In het magneetveld veranderen nu p, q en a; het is waarschijnlijk dat ook de temperatuur aan de beide einden niet dezelfde blijft, en men kan dus alleen met behulp van drie waargenomen temperaturen telkens de a berekenen. Het is duidelijk dat op deze wijze waarnemingsfouten een grooten invloed krijgen, vooral daar de bepaling der temperatuurdalingen onmogelijk op de drie plaatsen gelijktijdig kon geschieden; de stationaire temperaturen waren bij iedere proef wel ongeveer dezelfde, maar kleine verschillen waren niet te vermijden.

Voor de berekening werden de temperaturen, waargenomen op de plaatsen A, B en C en aan het verwarmde einde in een grafische voorstelling met x als abscis vereenigd. Daaruit werden afgeleid de temperaturen op de plaatsen $x = 0$, $0,6$, $1,2$, $1,8$, en $2,4$. Deze moeten voldoen aan de betrekking $\frac{t_n + t_{n+2}}{t_{n+1}} = e^{-0,6a} + e^{+0.6a}$.

$e^{-0,6a} = k$ stellende, vinden we dus k uit de vergelijking

$$k^2 - \frac{t_n + t_{n+2}}{t_{n+1}} k + 1 = 0.$$

De gemiddelde waarde van k als juist aannemende, berekende ik daarop uit de 5 temperaturen te zamen de coëfficienten p en q, en daarmede ten slotte weer de temperaturen zelf. Het resultaat is als volgt:

$k = 0,626$ $\qquad$ $p = 43,16$ $\qquad$ $q = 0,39$

x	t (geïnterpoleerd)	$\frac{t_n + t_{n+2}}{t_{n+1}}$	k	t (berekend)	Verschil.
0	43,5			43,5	0,0
0,6	28,0	2,17	0,666	27,6	—0,4
1,2	17,5	2,29	0,584	17,9	+0,4
1,8	12,1	2,22	0,629	12,2	+0,1
2,4	9,4			9,2	—0,2

Fig. 3 geeft de berekende kromme. De teekens × duiden de temperaturen en plaatsen aan, die voor de berekening hebben gediend, de teekens + de werkelijk waargenomen temperatuur op de plaatsen A, B en C.

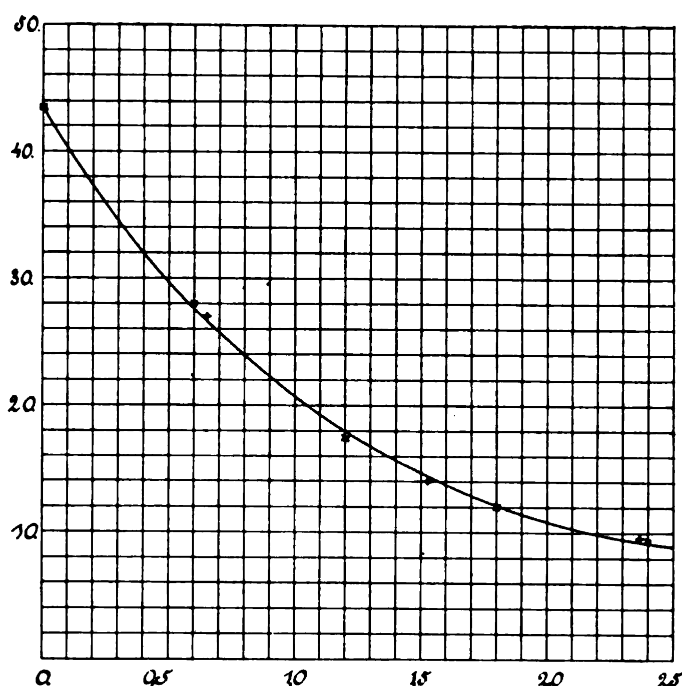


Fig. 3.

Vervolgens werden de temperatuurdalingen eveneens uit een grafische voorstelling afgelezen; met het oog op de geringe nauwkeurigheid der resultaten heb ik mij hier bepaald tot de waarnemingen in het sterkste veld en de waarde voor $x = 0$ als niet te vertrouwen weggelaten. Ik vond

$M = \pm 6000$

x	Δt	t (berekend)	$t - \Delta t$	$\frac{t_n + t_{n+2}}{t_{n+1}}$	k
0,6	1°,25	27°,6	26°,35		
1,2	0 ,90	17 ,9	17 ,00	2,235	0,6185
1,8	0 ,55	12 ,2	11 ,65	2,227	0,6237
2,4	0 ,26	9 ,2	8 ,94		

Daar de afstand van C tot de verwarmde plaats slechts 2,37 bedroeg is de waarde voor 2,4 reeds een weinig geëxtrapoleerd. Nemen we daarom de waarde van k 0,6185 als grondslag. Uit de waarde 0,626 volgt een waarde van $a = 0,778$; 0,6185 geeft $a' = 0,801$

$$\frac{g}{g'} = \frac{a'^2}{a^2} = 1,058.$$

Voor het onderzoek van de verandering in verschillende magneetvelden zijn de waarnemingen niet nauwkeurig genoeg; er blijkt echter wel reeds uit dat de toename sneller is dan evenredig met de eerste macht van de magneetkracht, niet zoo snel echter als evenredig met de tweede macht [1]).

b. Uitkomsten van andere waarnemers.

Voor zoover mij bekend is, hebben tot nu toe alleen LEDUC [2]), de ontdekker, en VON ETTINGSHAUSEN [3]) dit verschijnsel waargenomen.

Uit de waarnemingen van den eerste volgt voor M = 7800 $\frac{g}{g'} = 1,057$.

VON ETTINGSHAUSEN vindt getallen varieerende van 1,052 tot 1,021 in een veld van ± 9000.

In beide gevallen was het bismuth direct aan de warmtebron gesoldeerd en werd voor de berekening alleen de term $p\,\epsilon^{-ax}$ gebezigd.

Daar mijn waarde 1,058 in het veld 6000 eer te groot dan te klein is, kan men uit de waarnemingen wel met zekerheid afleiden dat deze verandering aanmerkelijk kleiner is dan die van het electrische geleidingsvermogen.

5. *Longitudinaal thermomagnetisch verschijnsel.*

a. Metingen. Dit verschijnsel kan worden opgevat als een verhooging van het thermo-electrisch vermogen van bismuth in het magnetisch veld. Ik wenschte daarom de verandering van den uitslag, waargenomen in den galvanometer wanneer de koperdraden der thermo-elementen met dezen verbonden waren, in procenten voor verschillende magneetvelden te bepalen steeds bij beide richtingen van het magneetveld, om de storing door transversale verschijnselen te vermijden, het zou dan later slechts noodig zijn, het thermo-electrisch vermogen buiten het magneetveld eens voor al te bepalen, om het longitudinaal effect ook in absolute maat te kunnen uitdrukken. Het was ook thans wenschelijk, deze metingen te verrichten met de thermo-elementen op de plaatsen B en C; daar echter de temperaturen van deze plaatsen bij aanzetten van het magneetveld veranderen, ontstaat er een storing, die de verandering in den uitslag kleiner maakt, omdat de temperatuurdaling bij de hoogste temperatuur het grootst is. Aanvankelijk

---

[1]) Een wijziging van g met de temperatuur, buiten of in het magneetveld, zou moeten blijken uit een overeenkomstige verandering in k. Het is duidelijk dat de nauwkeurigheid der waarnemingen niet voldoende is om tot zulk een verandering te besluiten; heel groot kan de wijziging echter niet zijn.

[2]) C. R. 104, p. 1783, 1887.

[3]) Wied. Ann. 33, p. 129, 1888.

was het mijn voornemen, deze storing uit de metingen van de temperatuurdaling, in het vorige gedeelte vermeld, te berekenen. Ik ben daarvan teruggekomen omdat gebleken was, dat ondanks zorgvuldige plaatsing der thermo-elementen bij verschillende metingen toch afwijkende temperatuurdalingen voorkwamen. Voor een groot deel moeten deze afwijkingen aan het bestaan van een ander temperatuurverval worden toegeschreven. In den laatsten tijd bepaalde ik daarom vóór en ná de meting van het longitudinaal effect op beide plaatsen de temperatuurdaling. Kende men nu nauwkeurig het temperatuurverschil tusschen de beide contactplaatsen, dan was de correctie in $^0/_0$ uit te drukken geweest. Hoewel echter de temperatuur der contactplaatsen nieuwzilver-koper nauwkeurig bekend was, is er geen voldoende zekerheid dat dit tevens de temperatuur van de contactplaats bismuth-koper was. Dezelfde onzekerheid is oorzaak, dat ook het thermo-electrisch vermogen van het bismuth niet nauwkeurig uit deze metingen kan worden afgeleid; de waarden voor het verschil bismuth-koper, uit de uitkomsten van verschillende proeven berekend, loopen van 8400 tot 10500 per 1° voor temperaturen tusschen 20° en 50°. Men bedenke hierbij dat op de plaats *B* een temperatuurverval van 2°,5 tot 5° per *mM.* gevonden werd, terwijl het geheele temperatuurverschil 20° tot 30° was. Om deze redenen heb ik van een berekening van het longitudinaal effect in absolute maat voorloopig afgezien en de correctie berekend door het thermo-electrisch verschil van bismuth-koper op 10000 per 1° te stellen; voor het thermo-element nieuwzilver-koper was 1590 gevonden. Er blijft in de correctie dus een onzekerheid van waarschijnlijk niet meer dan 10$^0/_0$; de correctie bedroeg zelf hoogstens 25$^0/_0$ van het totale effect, zoodat daarin een onzekerheid van 2,5$^0/_0$ overblijft; daar bovendien de temperatuurdaling, zooals later gebleken is, bijna dezelfde verandering met de magneetkracht vertoont als het longitudinaal effect, zal de verhouding van het verschijnsel in verschillende magneetvelden door de fout niet gewijzigd worden.

Een aantal metingen waren reeds verricht voordat de beschreven waarnemingsmethode werd toegepast. Om deze toch bij de berekening te kunnen gebruiken, interpoleerde ik uit al de waarnemingsreeksen de procentische verandering voor de velden 2000 tot 6000, stelde daarna overal de waarde voor het veld 6000 op 10, de uitkomst volgens de laatste methode, en veranderde de overige cijfers evenredig. Dit leverde mij de volgende uitkomst.

Magneetveld.	21 Juli.	9 Sept.	16 Sept.	18 Febr.	6-9Maart	Gemiddelde.
2000	1,77	1,60	1,94	2,27	1,60	1,84
3000	3,66	3,21	3,69	3,86	3,35	3,55
4000	5,79	5,02	5,60	5,70	5,50	5,52
5000	7,83	7,21	7,69	7,67	7,75	7,63
6000	10.0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0

Op deze gemiddelden werd nu de interpolatieformule toegepast.

$C_1 = 0,2341$ $\qquad$ $C_2 = 0,6663$

Magneetveld.	Toename in %	Id. berekend.	Verschil.
2000	1,84	1,81	—0,03
3000	3,55	3,52	—0,03
4000	5,52	5,51	—0,01
5000	7,63	7,67	+0,04
6000	10,00	9,98	—0,02

Zooals men ziet is de overeenstemming zeer bevredigend. De coëfficient C_1 is bijna dezelfde als bij de toename van den weerstand, waaruit volgt, dat de *beide verschijnselen in verschillende magneetvelden alleen door een bijna constanten factor verschillen* [1]).

b. Uitkomsten van andere waarnemers.

De waarnemingen van VON ETTINGSHAUSEN en NERNST [2]) blijken niet door onze formule te kunnen worden voorgesteld. Ik zal daarom alleen hun resultaten voor het longitudinaal effect in procenten omrekenen en vergelijken met de weerstandstoename in hun bismuth.

---

1) In mijn dissertatie (p. 111—114) wees ik er op, dat de genoemde verschijnselen een gemeenschappelijke oorzaak konden hebben in een verandering van het aantal vrije geladen deeltjes door het aanbrengen van het magneetveld. De gevonden evenredigheid maakt thans een gemeenschappelijke oorzaak wel zeer waarschijnlijk.

2) l. c.

Magneetveld.	Long. effect in %.	Weerstands-toename in %.	Verhouding.
2800	1,01	7,0	0,14
4720	2,57	14,7	0,18
9480	11,00	3,55	0,31

Dat er hier van de door mij gevonden evenredigheid niets te bespeuren is kan waarschijnlijk voor een groot deel aan waarnemingsfouten worden toegeschreven, en dit te eerder, waar het doel der metingen niet was het bepalen van het verband tusschen de sterkte van magneetveld en de beide verschijnselen, maar het vergelijken van het gedrag van bismuth met dat van alliages van bismuth en tin.

Bovondien was het bismuth gegoten en waren dus waarschijnlijk storingen door onregelmatige kristallisatie voorhanden.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM biedt, namens Dr. ERNST COHEN, een opstel aan: *„Over elektrische Reactiesnelheid* II."

De reactiesnelheid der omzetting $Zn + Hg_2 SO_4 \rightleftarrows Hg_2 + Zn SO_4$.

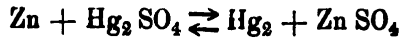
1. Een open galvanisch element is niet een systeem, dat in evenwicht is; dit blijkt reeds daaruit, dat, wanneer een zoodanig element door een draad gesloten wordt, de reactie, die in de cel verloopen kan, zich gaat afspelen.

Wij moeten aannemen, dat, doordien de weerstand van een open element zeer (oneindig) groot is, de reactiesnelheid practisch tot nul wordt gereduceerd [1]).

2. Wil men omgekeerd het verloop eener chemische reactie bij verschillende temperaturen als functie van de temperatuur b.v. bestudeeren, dan kan men een galvanische cel construeeren, waarin die reactie verloopt, wanneer de stroom gesloten wordt.

In het volgende zal ik in het kort de resultaten meedeelen, die de studie der reactie

[1]) Verg. o. a. NERNST, Theor. Chemie 2e Aufl. 1898, 658.



$$Zn + Hg_2SO_4 \rightleftarrows Hg_2 + ZnSO_4$$

bij verschillende temperaturen heeft geleverd.

Wordt een CLARK-element gesloten, dan heeft daarin de reactie plaats, die door de bovenstaande vergelijking wordt uitgedrukt.

Sluiten wij het element door een korten dikken sluitdraad (weerstand practisch = 0) dan is de konstante der *electrische reactiesnelheid* (zie mijn eerste meedeeling) bij $t°$

$$K_1 = \frac{E}{\Omega}$$

waarin E de electromotorische kracht van het element bij $t°$ is en Ω de spec. weerstand der verzadigde zinksulfaatoplossing in het element bij dezelfde temperatuur.

Naar gelang er $ZnSO_4 . 7H_2O$ of $ZnSO_4 . 6H_2O$ op den bodem ligt, zullen wij bij dezelfde temperatuur twee waarden voor K_1 vinden, daar zoowel E als Ω met de vaste phase veranderen.

3. Door JAEGER [1]) is gevonden, dat voor een element, waarin als stabiele vaste phase $ZnSO_4 . 7H_2O$ aanwezig is, de electromotorische kracht bij de temperatuur $t°$ kan worden uitgedrukt door:

$$E_t = 1.400 - 0,00152\,(t-39) - 0,000007\,(t-39)^2 \text{ Volt.}$$

Ligt er in 't element $ZnSO_4 . 6H_2O$ op den bodem, dan geldt:

$$E'_t = 1.400 - 0,00102\,(t-39) - 0,000004\,(t-39)^2 \text{ Volt.}$$

De weerstanden der verschillende oplossingen heb ik gemeten met een *Tauchelectrode* naar KOHLRAUSCH [2]), welker weerstandskapaciteit bij 18°,0 met behulp van een $^1/_2$ N. KCl-oplossing bepaald en bij dezelfde temperatuur met een $^1/_2$ N. NaCl-oplossing gecontroleerd werd.

Tabel I bevat de waarden van E, Ω, en K_1 voor het geval, dat er $ZnSO_4 . 7H_2O$ in 't element aanwezig is, terwijl tabel II dezelfde grootheden aangeeft, wanneer er $ZnSO_4 . 6H_2O$ op den bodem ligt.

---

[1]) WIED. Ann. Bd. 63 (1897) 354.

[2]) KOHLRAUSCH u. HOLBORN, Das Leitvermögen der Electrolyte. (Leipzig 1898). S. 18 u. 19.

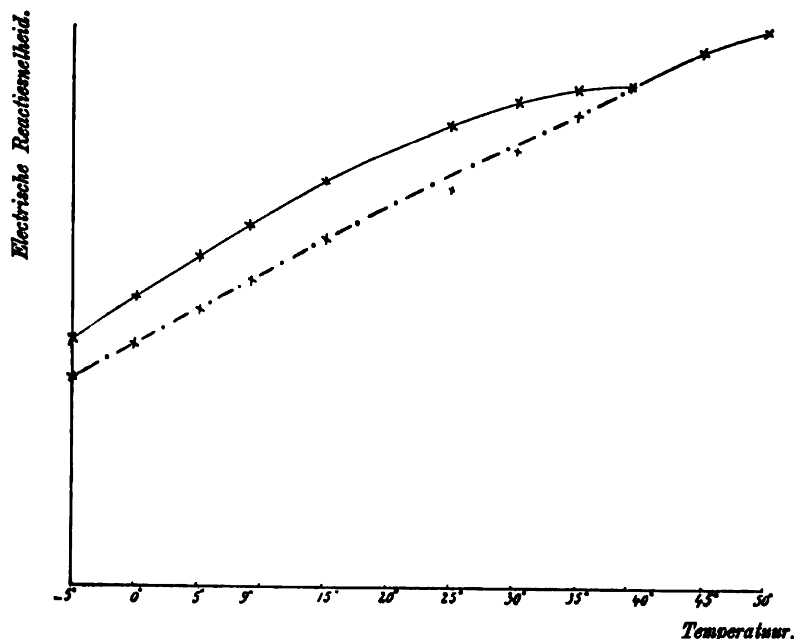
TABEL I.

Temperatuur.	E (Millivolts).	Ω	$K_1 \times 10^{-2}$
— 5°.0	1453.3	0.0491	296.0
0°.0	1448.6	0.0423	342.0
5°.0	1443.6	0.0371	388.5
9°.0	1439.3	0.0337	426.6
15°.0	1432.5	0.0299	478.3
25°.0	1419.9	0.0260	544.6
30°.0	1413.1	0.0248	574.2
35°.0	1406.0	0.0241	583.6
39°.0	1400.0	0.0237	590.9

TABEL II.

Temperatuur.	E (Millivolts).	Ω	$K_1 \times 10^{-2}$
— 5°.0	1437.1	0.0577	248.7
0°.0	1433.7	0.0498	287.8
5°.0	1430.1	0.0437	326.8
9°.0	1427.0	0.0397	359.5
15°.0	1422.2	0.0348	408.5
25°.0	1413.5	0.0302	467.5
30°.0	1408.9	0.0274	513.8
35°.0	1404.0	0 0252	557.3
39°.0	1400.0	0.0237	590.9
45°.0	1393.7	0.0220	631.8
50°.0	1388.3	0.0211	659.0

4. Brengen wij de *electrische reactiesnelheid* als functie der temperatuur in teekening, dan ontstaan, al naarmate men met de beneden 39° stabiele of metastabiele modificatie te doen heeft, de beide krommen, zooals de figuur die aangeeft.



Gelijk te voorspellen geweest ware, is de reactiesnelheid bij 39°,0 voor beide gevallen dezelfde; beneden die temperatuur verloopt (bij dezelfde temperatuur) de reactie in het element met de stabiele phase steeds het snelst.

Amsterdam, Maart 1899.

Natuurkunde. — H. Haga en C. H. Wind: „*De buiging der* Röntgen-*stralen*".

Uit de in dit laboratorium verrichte onderzoekingen [1]) is gebleken, dat, zoo de X-stralen aethertrillingen zijn, de golflengte niet grooter kan zijn dan eenige Angström'sche eenheden. Toen echter bij het voortgezette onderzoek zich een verschijnsel voordeed, dat op eene werkelijke buiging en op eene golflengte van een paar Angström'sche eenheden scheen te wijzen, konden ook de omstandigheden afgeleid worden voor eene nieuwe serie proeven, waarbij eene buiging zich duidelijker zou moeten vertoonen. Eene eenvoudige overweging deed daarbij inzien dat, ter wille der bestralingssterkte, het beter was de spleten nauwer te nemen dan de afstanden te vergrooten, zoodat de

---

[1]) C. H. Wind: „Over den invloed van de afmetingen der lichtbron bij Fresnel'sche buigingsverschijnselen en over de buiging van X-stralen". Verslag der Vergadering, 25 Juni '98.

geheele opstelling plaats kon vinden op ééne hardsteenen plaat, waardoor bovendien meerdere vastheid gewaarborgd werd.

De eerste spleet (X-spleet), de tweede (diffractiespleet) en de photographische plaat waren op zware metalen statieven bevestigd, die op een hardsteenen plaat (200 × 40 × 3 cm.) met gips waren vastgemaakt. Deze plaat werd door drie hardsteenen zuilen gedragen, die op den vasten pijler rustten; plaat, zuilen en pijler waren door gips verbonden.

Achter de eerste spleet stond de RÖNTGEN-buis, eene der uitmuntende buizen van MÜLLER (Hamburg), met automatische regeling van het vacuum.

De Ruhmkorff was een bizonder goed werkende toestel door SIEMENS en HALSKE vervaardigd, van 30 cm. vonkenlengte, voorzien van een interruptor naar DEPREZ, met twee contacten.

De stroom voor den inductieklos werd door 6 accumulatoren geleverd. De buis en eerste spleet waren — behalve aan de achter zijde, waar de toeleidingsdraden van den Ruhmkorff naar de buis liepen — aan alle zijden door dikke looden platen omgeven; in de richting naar de diffractiespleet was een kleine opening, waardoor de X-stralen door de diffractiespleet op de photografische plaat konden komen. Veel moeite werd besteed om de spleten zoo volkomen mogelijk te verkrijgen; de platina plaatjes, ½ mm. dik, die de spleet begrensden, werden zeer zorgvuldig gevlakt en geslepen en tegen gevlakte koperen platen geschroefd. De wijdte der X-spleet was 14, 18 of 25 micron; de hoogte werd begrensd door een looden plaat tot op eene lengte van 1 cm.

De diffractiespleet, 3 cm. hoog, was aan het boveneinde 14 micron en liep langzaam nauwer wordende tot eene wijdte van een paar micron.

In een der spleetwangen der diffractiespleet was dicht bij de spleet, aan de uiteinden en het midden een klein rond gaatje geboord om, op een hieronder te vermelden wijze, na te kunnen gaan hoe wijd het deel der diffractiespleet was, waardoor de stralen gegaan zijn, die op een bepaald punt der photografische plaat hebben ingewerkt. De diffractiespleet was aan beide zijden verlengd, zóó dat daar een veel wijdere spleet (3 mm.) ontstond; de RÖNTGEN-buis werd zóó achter de eerste spleet geplaatst, dat deze wijdere deelen zich op een er achter gehouden fluoresceerend scherm duidelijk afteekenden; men was dan zeker dat de stralen ook goed door het nauwere deel gingen; van tijd tot tijd werd gecontroleerd of de stand der buis nog de juiste was.

Met deze inrichting werden de proeven genomen, die in de volgende tabel vereenigd zijn; hierin beteekent:

σ : wijdte van de eerste spleet in micron.

s „ „ „ diffractiespleet „ „

a afstand van eerste tot diffractiespleet in cm.

b „ „ diffractiespleet tot photografische plaat in cm.

a = 75 cm. *s* : 2 à 14 μ.

σ	*b*	Expositietijd. Uren.	Nommer.
25	1	29	5
25	20	57	3
25	45	66	4
14	75	60	1
14	75	100	2
25	105,5	150	6
18	1	30	8
18	75	130	7
18	75	200	9

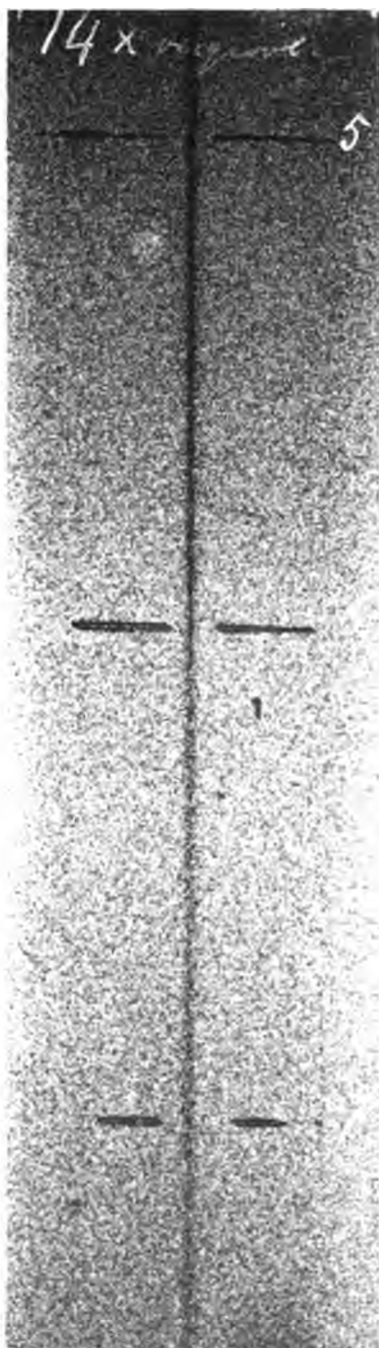
Bij N°. **1** werd een aan beide zijden gevoelige plaat gebruikt — merk B II der Actien-Gesellschaft für Anilin-Fabrikation. Het beeld aan de achterzijde was echter zeer veel flauwer dan dat aan de voorzijde; wegens den vrij sterken sluier was het bovendien zeer gewenscht het beeld aan de achterzijde op te offeren en de gelatinelaag te verwijderen; bij de andere proeven werden Lomberg-platen gebruikt. De platen werden zeer lang (minstens een half uur) ontwikkeld met rodinal (1 op 35) met toevoeging van bromkalium.

De proeven **5** en **8**, waarbij de photografische plaat onmiddellijk tegen de koperen plaat, waarop de diffractiespleet bevestigd was, gedrukt werd, dienden om de spleet uit te meten, waardoor grootere nauwkeurigheid bereikbaar was dan door directe meting der spleten zelve; wegens den geringen afstand waarop de plaat van de spleet verwijderd was, bestond geen merkbare diffractie noch verbreeding door de wijdte van de eerste spleet. De meting geschiedde met een

FIG. 1.



FIG. 2.



de eene meer, de andere minder, het spleetbeeld gewijzigd hebben,

microscoop van ZEISS, objectief D, compensatie oculair 6 met micrometer; ook kleinere vergrootingen werden gebruikt.

Van de bovenvermelde kleine gaatjes in een der spleetwangen waren op **5** en **8** ronde en op de overige — wegens de hoogte der X-bron — langgerekte zwarte beelden gevormd (cf. fig. 1 en 2).

De afstanden van de middens dezer beelden werden met de verdeelmachine allen in een zelfde aantal gelijke deelen verdeeld en daar de wijdte der diffractiespleet bij de deelstrepen op **5** en **8** uitgemeten werd, was ze bekend op de correspondeerende plaatsen van het spleetbeeld bij de overige proeven.

Verschuift men bij niet te sterke vergrooting — objectief a*, index bij 10, compensatie oculair 6 — b. v. N°. **2**, dan ziet men dat het spleetbeeld in het breedere deel zich als een zwarte streep vertoont, in het midden donkerder en met uitloopende flauwe randen, dat in het smallere deel echter het donkerder deel — kern — ophoudt en het spleetbeeld zich eenigszins pluimvormig verbreedt met slechts weinig verschil in intensiteit in eene richting loodrecht op de lengterichting van het beeld. Overeenkomstig het steeds nauwer worden der diffractiespleet, wordt verder het beeld wel flauwer, maar slechts op enkele plaatsen smaller, zoodat van af het punt waar de kern schijnt op te houden in de breedte van het beeld maxima en minima voorkomen.

Ditzelfde komt ook voor op de andere opnamen, het duidelijkst bij N°. **2**, **6** en **9**.

Ten einde eenig denkbeeld te geven van het karakter dezer verbreedingen, die onder het mikroskoop het best kunnen worden waargenomen, hebben we van het smalste deel van **5** en **2** vergroote photografieën vervaardigd door middel van een zoogenaamde microplanar N°. I_a van ZEISS. De figuren 1 en 2 zijn heliografische reproducties dezer vergrootingen.

Fig. 1 is 16 maal vergroot, fig. 2 14 maal.

De gelijke cijfers bij de deelstrepen duiden overeenkomstige plaatsen aan, terwijl op fig. 1 tevens de wijdte der diffractiespleet is aangegeven.

Om nu zeker te zijn dat de hier beschrevene verschijnselen aan buiging moeten worden toegeschreven, hebben we nauwlettend overwogen door welke andere oorzaken eene verbreeding van het spleetbeeld zou kunnen ontstaan. Het bleek ons echter, dat, al zullen photografische irradiatie, plaatselijke verschillen in gevoeligheid der photografische laag, secundaire stralen (SAGNAC), geringe beweging der statieven bij proeven, die dikwijls 10 dagen geduurd hebben, de eene meer, de andere minder, het spleetbeeld gewijzigd hebben,

deze oorzaken niet kunnen verklaren de door ons waargenomen verbreedingen van het beeld bij nauwer worden van de diffractie-spleet.

Wel zou echter, wanneer men den invloed van de wijdte der eerste spleet in aanmerking neemt, ook bij rechtlijnige voortplanting der stralen, het spleetbeeld op ons den indruk *kunnen* maken, alsof het zich verbreedde bij het nauwer worden der tweede spleet daarbij zouden dan echter de schijnbare grenzen van het beeld *hoogstens* even snel uiteen kunnen loopen als de randen der tweede spleet tot elkander naderen. Bij onze proeven vernauwt zich de diffractiespleet zóó langzaam dat *deze* verbreeding geheel onmerkbaar zijn zou.

Er blijft dus niets anders over dan de conclusie te trekken, dat de door ons waargenomen verbreedingen van het spleetbeeld toegeschreven moeten worden aan eene **buiging der Röntgenstralen.** In deze onderstelling zijn de verschillende verbreedingen in het spleetbeeld, die op te vatten zijn als veelvuldige pluimvormingen, gemakkelijk te verklaren, daar we slechts behoeven aan te nemen dat we met stralen te doen hebben van aanzienlijk uiteenloopende golflengten, waarbij stralen van sommige golflengten grootere energie bezitten dan andere; de stralen met de groote energie geven aanleiding tot de afzonderlijke pluimvormige verbreedingen, terwijl de hoogte der stralenbron eene ineenvloeiing bevordert.

De geringe sterkte der pluimvormige verbreedingen, het vloeiend uitloopen harer randen maken eene nauwkeurige uitmeting en daardoor eene juiste bepaling der golflengte onmogelijk. We hebben ons moeten bepalen tot eene schatting omtrent de golflengte der stralen die het sterkst vertegenwoordigd zijn.

Door Fresnel is in zijne diffractietheorie ingevoerd de grootheid v; in aansluiting daarmede zullen we invoeren de grootheid v_s, bepaald door de betrekking

$$v_s = s\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}}.$$

Deze grootheid v_s beslist bij gegeven s, a, b en λ over den aard van het te verwachten primaire buigingsbeeld, zoodat met behulp van de spiraal van Cornu de intensiteitskromme voor het buigingsbeeld geconstrueerd kan worden. Wij hebben dit gedaan voor de waarden 2, 1.5 en 1 van de grootheid v_s. De wijdte der eerste

spleet, σ, moet echter in rekening worden gebracht, m. a. w. uit de primaire moeten de secundaire buigingsbeelden afgeleid worden [1]).

Ten einde een eenigszins algemeen overzicht te verkrijgen voor verschillende mogelijke gevallen, die voor ons van belang waren, hebben wij drie onderstellingen gemaakt aangaande de verhouding

$$\delta = \frac{\frac{b}{a}\sigma}{\frac{a+b}{a}s},$$

wier beteekenis voor de hand ligt, en wel $\delta = 3$, $\delta = 1$ en $\delta = 0{,}6$.

Men ziet, dat de eerste spleet bij de eerste onderstelling betrekkelijk wijd, bij de derde nauw is, vergeleken met de tweede spleet. De intensiteitskromme der in de 9 gevallen te verwachten diffractiebeelden zijn voorgesteld in fig. 3 *a—i*.

In dezelfde teekening hebben we door gestreepte lijnen ook aangegeven de intensiteitsverdeeling bij dezelfde spleten en bij rechtlijnige voortplanting, gebruik makende van de omstandigheid, dat de ingesloten oppervlakten tusschen de intensiteitskrommen en as dezelfde moeten zijn met of zonder buiging.

Uit deze figuren blijkt dat reeds bij groote waarden van v_s verbreeding zal zijn te bespeuren, mits de geringste intensiteit, die nog waarneembaar is, *zeer* gering is, vergeleken met de grootste, intensiteit die bij de gegeven breedte in het spleetbeeld voorkomt. Dit laatste is echter in ons geval bij de pluimvormige verbreedingen zeker niet vervuld; waar in het midden van het spleetbeeld reeds eene geringe intensiteit aanwezig is, zoodat aan de randen een groot breukdeel vereischt wordt om merkbaar te zijn. Doch dan leert een blik op de figuren ons, dat voor eene waarde $v_s = 1$ in *alle* gevallen zich zeker eene duidelijke verbreeding moet vertoonen, voor $v_s = 2$ waarschijnlijk nooit, voor $v_s = 1.5$ alleen onder gunstige omstandigheden, wat betreft de breedte der eerste spleet, en dan nog in geringe mate.

Men ziet ook dat, hoewel in het algemeen de invloed van de waarde van δ op het al of niet waarneembaar zijn van eene verbreeding bestaat, deze invloed niet groot is voor waarden van v_s tusschen 1 en 1,5 gelegen. Dit alles in aanmerking nemende, gelooven we het meest nabij de waarheid te komen wanneer we stellen

---

[1]) C. H. Wind, „Over den invloed van de afmetingen der lichtbron bij Fresnel'sche buigingsverschijnselen". Versl. der vergad. April 1897.

$v_s = 1,3$ telkens wanneer het spleetbeeld zich merkbaar verbreedt dus bij iedere pluimvorming.

Daaruit vinden we door middel der betrekking

$$\lambda = \frac{1}{1.3^2} \frac{2(a+b)}{ab} s_1^2,$$

waarin s_1 de wijdte der diffractie spleet correspondeerende met eene verbreeding voorstelt, de waarden die in onderstaande tabel vereenigd zijn:

Nommer.	s_1 in micra.	λ in ANGSTRÖM'sche eenheden.
2	7	1,5
	6	1,1
	5	0,8
	4	0,5
4	8	2,7
	(5)	(1,0)
	3	0,4
	2,5	0,25
6	8	1,7
	7	1,3
	4,5	0,5
	3	0,25
9	4	0,5
	2	0,12

Wanneer, hetgeen niet onmogelijk is, deze waarden van s_1 door photografische irradiatie te groot zijn, zouden de golflengten nog kleiner uitvallen.

Hoezeer wij gewenscht hebben de grenzen der golflengten der RÖNTGEN-stralen met meerdere zekerheid aan te kunnen geven, komt het ons voor, dat dit met de ons ten dienste staande hulpmiddelen niet mogelijk is. Eerst wanneer het gelukt RÖNTGEN-buizen te vervaardigen, die, gedurende even langen tijd als de door ons gebruikte, goed functioneeren, maar dan stralen van veel grooter energie uitzenden, zal men er in kunnen slagen de schattingen door metingen te vervangen.

Natuurkundig Laboratorium.
Universiteit Groningen.

Natuurkunde. — De Heer H. A. LORENTZ biedt eene mededeeling aan, getiteld: „*Vereenvoudigde theorie der electrische en optische verschijnselen in lichamen die zich bewegen*".

§ 1. In vroegere onderzoekingen heb ik aangenomen dat bij alle electrische en optische verschijnselen in ponderabele lichamen kleine geladen deeltjes of ionen in het spel zijn, die in de dielectrica aan vaste evenwichtsstanden zijn gebonden, maar zich — behoudens een met eene wrijving te vergelijken weerstand — in geleiders vrij kunnen bewegen. Een electrische stroom bestaat volgens deze opvatting in eene voortgaande beweging der ionen, de dielectrische polarisatie van een niet-geleider in eene verplaatsing uit hunne evenwichtsstanden. Er werd ondersteld dat de ionen zich kunnen bewegen, terwijl de aether, waarvoor zij geheel doordringbaar zijn, in rust blijft, en terwijl voor den aether de gewone electromagnetische vergelijkingen werden aangenomen, werden voor de ionen zekere voor de hand liggende betrekkingen opgesteld, zoodat een stelsel vergelijkingen verkregen werd, dat vrij eenvoudig is, en voldoende bleek voor de verklaring van een aantal verschijnselen.

In den loop der beschouwingen maakten sommige mathematische kunstgrepen het mogelijk, door eene korte redeneering tot besluiten te komen, die anders slechts langs veel langeren weg konden worden verkregen. Ik wensch nu te doen zien, hoe men de theorie nog verder kan vereenvoudigen, als men de fundamenteele vergelijkingen aanstonds op geschikte wijze transformeert.

§ 2. Ik zal van dezelfde onderstellingen uitgaan als in mijn „Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern", en ook van de daar gebezigde notatie gebruik maken.

Ik voer dus vooreerst de vectoren $\mathfrak{d}$ en $\mathfrak{H}$ in, die men de dielectrische verplaatsing en de magnetische kracht noemt, en stel verder door ϱ de dichtheid der lading van de ponderabele stof, door $\mathfrak{v}$ hare snelheid voor, en door $\mathfrak{E}$ de kracht die per eenheid van lading op de ponderabele stof werkt. De grootheid ϱ is alleen in de ionen van 0 verschillend; ik neem gemakshalve weder aan dat zij aan het oppervlak van het ioon geleidelijk in 0 overgaat, en verder dat bij de beweging elk element der ponderabele stof zijne lading behoudt.

De fundamenteele vergelijkingen zijn dan

$$Div\,\mathfrak{d} = \varrho\,, \quad \ldots \quad (\mathrm{I_a})$$

$$Div\,\mathfrak{H} = 0\,, \quad \ldots \quad (\mathrm{II_a})$$

$$Rot\,\mathfrak{H} = 4\,\pi\,\varrho\,\mathfrak{v} + 4\,\pi\,\dot{\mathfrak{d}}\,, \quad \ldots \quad (\mathrm{III_a})$$

$$4\,\pi\,V^2\,Rot\,\mathfrak{d} = -\,\dot{\mathfrak{H}}\,, \quad \ldots \quad (\mathrm{IV_a})$$

$$\mathfrak{E} = 4\,\pi\,V^2\,\mathfrak{d} + [\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{H}]. \quad \ldots \quad (\mathrm{V_a})$$

Hierin stelt V de snelheid van het licht voor.

§ 3. Wij zullen nu onderstellen dat de te beschouwen ponderabele lichamen zich in hun geheel met eene standvastige snelheid $\mathfrak{p}$ door den rustenden aether heen verschuiven; door $\mathfrak{v}$ zullen wij de snelheid aanduiden, die de deelen van het stelsel nog bovendien kunnen hebben.

Het ligt voor de hand, een coördinatenstelsel in te voeren, dat aan de beweging der ponderabele stof met de snelheid $\mathfrak{p}$ deelneemt. Doet men dit, gemakshalve aannemende dat deze snelheid de richting der x-as heeft, zoodat $\mathfrak{p}_y$ en $\mathfrak{p}_z$ 0 zijn, dan kan men de vergelijkingen $(\mathrm{I_a})$ — $(\mathrm{V_a})$ vervangen door

$$Div\,\mathfrak{d} = \varrho\,, \quad \ldots \quad (\mathrm{I_b})$$

$$Div\,\mathfrak{H} = 0\,, \quad \ldots \quad (\mathrm{II_b})$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} &= 4\,\pi\,\varrho\,(\mathfrak{p}_x + \mathfrak{v}_x) + 4\,\pi\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathfrak{p}_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_x\,,\\
\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} &= 4\,\pi\,\varrho\,\mathfrak{v}_y + 4\,\pi\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathfrak{p}_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_y\,,\\
\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} &= 4\,\pi\,\varrho\,\mathfrak{v}_z + 4\,\pi\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathfrak{p}_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_z\,,
\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{III_b})$$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi V^2\left(\frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial z}\right) &= -\left(\frac{\partial}{\partial t}-\mathfrak{p}_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{H}_x\,, \\ 4\pi V^2\left(\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial x}\right) &= -\left(\frac{\partial}{\partial t}-\mathfrak{p}_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{H}_y\,, \\ 4\pi V^2\left(\frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y}\right) &= -\left(\frac{\partial}{\partial t}-\mathfrak{p}_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{H}_z\,, \end{aligned}\right\} \quad (IV_b)$$

$$\mathfrak{E} = 4\pi V^2\mathfrak{d} + [\mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{H}] + [\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{H}]\;.\;.\;.\;.\quad (V_b)$$

De beteekenis van het teeken *Div* wordt hier nog altijd bepaald door de vergelijking

$$Div\,\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\;.$$

($\mathfrak{A}$ willekeurige vector).

Zooals reeds gezegd is, stelt $\mathfrak{v}$ de relatieve snelheid ten opzichte van het bewegelijke coördinatenstelsel voor. Is $\mathfrak{v}=0$, dan spreken wij van „rust", met welk woord dus *relatieve rust* ten opzichte van het bewegelijke coördinatenstelsel bedoeld wordt.

Bij de meeste toepassingen zal $\mathfrak{p}$ de snelheid van de jaarlijksche beweging der aarde zijn.

§ 4. Wij zullen thans de vergelijkingen verder transformeeren door de invoering van de volgende onafhankelijk veranderlijken:

$$x' = \frac{V}{\sqrt{V^2-\mathfrak{p}_x^2}}\,x\,,\; y'=y\,,\; z'=z\,,\; t'=t-\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2-\mathfrak{p}_x^2}\,x\;.\;.\quad (1)$$

De laatste dezer grootheden is de tijd, gerekend, niet van een voor alle punten der ruimte geldend begintijdstip, maar van een tijdstip dat van de plaats die men beschouwt afhangt. Wij kunnen daarom t' den *plaatselijken tijd* noemen.

Stellen wij ter bekorting

$$\frac{V}{\sqrt{V^2-\mathfrak{p}_x^2}} = k\;,$$

dan hebben wij de betrekkingen

$$\frac{\partial}{\partial x} = k\frac{\partial}{\partial x'} - k^2\,\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\,\frac{\partial}{\partial t'}\;,\; \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'},\; \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z'},\; \frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}\;:$$

De uitdrukking

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x'} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y'} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z'}$$

zullen wij voorstellen door

$$Div' \mathfrak{A} .$$

Verder voeren wij in plaats van $\mathfrak{d}$ en $\mathfrak{H}$ twee nieuwe vectoren $\mathfrak{F}'$ en $\mathfrak{H}'$ in, die bepaald worden door de vergelijkingen

$$\mathfrak{F}'_x = 4\pi V^2 \mathfrak{d}_x, \quad \mathfrak{F}'_y = 4\pi k V^2 \mathfrak{d}_y - k \mathfrak{p}_x \mathfrak{H}_z, \quad \mathfrak{F}'_z = 4\pi k V^2 \mathfrak{d}_z + k \mathfrak{p}_x \mathfrak{H}_y,$$

$$\mathfrak{H}'_x = k \mathfrak{H}_x, \quad \mathfrak{H}'_y = k^2 \mathfrak{H}_y + 4\pi k^2 \mathfrak{p}_x \mathfrak{d}_z, \quad \mathfrak{H}'_z = k^2 \mathfrak{H}_z - 4\pi k^2 \mathfrak{p}_x \mathfrak{d}_y.$$

Na herleiding en onderlinge combinatie der vergelijkingen (I_b)—(V_b) vindt men dan

$$Div' \mathfrak{F}' = \frac{4\pi}{k} V^2 \varrho - 4\pi k \mathfrak{p}_x \varrho \mathfrak{v}_x , \quad \ldots \quad (I_c)$$

$$Div' \mathfrak{H}' = 0 , \quad \ldots \quad (II_c)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}'_z}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial z'} &= 4\pi k^2 \varrho \mathfrak{v}_x + \frac{k^2}{V^2}\frac{\partial \mathfrak{F}'_x}{\partial t'} \\ \frac{\partial \mathfrak{H}'_x}{\partial z'} - \frac{\partial \mathfrak{H}'_z}{\partial x'} &= 4\pi k \varrho \mathfrak{v}_y + \frac{k^2}{V^2}\frac{\partial \mathfrak{F}'_y}{\partial t'} \\ \frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial x'} - \frac{\partial \mathfrak{H}'_x}{\partial y'} &= 4\pi k \varrho \mathfrak{v}_z + \frac{k^2}{V^2}\frac{\partial \mathfrak{F}'_z}{\partial t'} \end{aligned}\right\} , \quad \ldots \quad (III_c)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}'_z}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{F}'_y}{\partial z'} &= -\frac{\partial \mathfrak{H}'_x}{\partial t'} \\ \frac{\partial \mathfrak{F}'_x}{\partial z'} - \frac{\partial \mathfrak{F}'_z}{\partial x'} &= -\frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial t'} \\ \frac{\partial \mathfrak{F}'_y}{\partial x'} - \frac{\partial \mathfrak{F}'_x}{\partial y'} &= -\frac{\partial \mathfrak{H}'_z}{\partial t'} \end{aligned}\right\} , \quad \ldots \quad (IV_c)$$

$$
\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= \mathfrak{F}'_x + k\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}(\mathfrak{v}_y\,\mathfrak{F}'_y + \mathfrak{v}_z\,\mathfrak{F}'_z) + (\mathfrak{v}_y\,\mathfrak{H}'_z - \mathfrak{v}_z\,\mathfrak{H}'_y) \\
\mathfrak{E}_y &= \frac{1}{k}\,\mathfrak{F}'_y - k\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\,\mathfrak{v}_x\,\mathfrak{F}'_y + \left(\frac{1}{k}\,\mathfrak{v}_z\,\mathfrak{H}'_x - \mathfrak{v}_x\,\mathfrak{H}'_z\right) \\
\mathfrak{E}_z &= \frac{1}{k}\,\mathfrak{F}'_z - k\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\,\mathfrak{v}_x\,\mathfrak{F}'_z + \left(\mathfrak{v}_x\,\mathfrak{H}'_y - \frac{1}{k}\,\mathfrak{v}_y\,\mathfrak{H}'_x\right)
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (V_c)
$$

Uit de drie laatste vergelijkingen ziet men, door $\mathfrak{v} = 0$ te stellen, dat

$$\mathfrak{F}'_x\,,\ \frac{1}{k}\,\mathfrak{F}'_y\,,\ \frac{1}{k}\,\mathfrak{F}'_z$$

de componenten der electrische kracht zijn voor rustende ionen.

§ 5. De verkregen vergelijkingen kunnen vooreerst worden toegepast op electrostatische verschijnselen. Bij deze is $\mathfrak{v} = 0$ en $\mathfrak{H}' = 0$, terwijl de vector $\mathfrak{F}'$ onafhankelijk van den tijd wordt. Ter bepaling van dien vector heeft men de vergelijkingen

$$\frac{\partial\,\mathfrak{F}'_z}{\partial\,y'} - \frac{\partial\,\mathfrak{F}'_y}{\partial\,z'} = 0,\ \frac{\partial\,\mathfrak{F}'_x}{\partial\,z'} - \frac{\partial\,\mathfrak{F}'_z}{\partial\,x'} = 0,\ \frac{\partial\,\mathfrak{F}'_y}{\partial\,x'} - \frac{\partial\,\mathfrak{F}'_x}{\partial\,y'} = 0,$$

$$Div'\ \mathfrak{F}' = \frac{4\,\pi}{k}\,V^2\,\varrho.$$

Uit de drie eerste volgt dat $\mathfrak{F}'$ van een potentiaal ω afhangt, zoodat

$$\mathfrak{F}'_x = -\frac{\partial\,\omega}{\partial\,x'}\,,\ \mathfrak{F}'_y = -\frac{\partial\,\omega}{\partial\,y'}\,,\ \mathfrak{F}'_z = -\frac{\partial\,\omega}{\partial\,z'}$$

is, en uit de vierde volgt ter bepaling van den potentiaal

$$\frac{\partial^2\,\omega}{\partial\,x'^2} + \frac{\partial^2\,\omega}{\partial\,y'^2} + \frac{\partial^2\,\omega}{\partial\,z'^2} = -\frac{4\,\pi}{k}\,V^2\,\varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Zij nu S een stelsel ionen die geene andere beweging hebben dan de gemeenschappelijke translatiesnelheid $\mathfrak{p}_x$; voor dit stelsel gelden de bovenstaande vergelijkingen. Wij denken ons een tweede stelsel S_0 dat zich *niet* beweegt en dat men verkrijgt wanneer men alle afmetingen van S in de richting der x-as k maal grooter maakt, ter-

wijl de afmetingen loodrecht op de x-as hetzelfde blijven. Wanneer wij verder vaststellen dat overeenkomstige volume-elementen in S en S_0 gelijke ladingen hebben, is de dichtheid ϱ_0 die in een punt P_0 van S_0 bestaat k maal kleiner dan de dichtheid in het overeenkomstige punt P van S, dus

$$\varrho_0 = \frac{1}{k}\,\varrho.$$

Wanneer x, y, z de coordinaten van P zijn, kunnen de door (1) bepaalde grootheden x', y', z' als de coordinaten van P_0 beschouwd worden.

In het rustende stelsel worden de componenten der electrische kracht, die wij $\mathfrak{E}_0$ zullen noemen, door een potentiaal ω_0 bepaald, en klaarblijkelijk heeft men, daar in dat stelsel $k = 1$ is,

$$\mathfrak{E}_{0x} = -\frac{\partial\,\omega_0}{\partial\,x'}\,,\ \mathfrak{E}_{0y} = -\frac{\partial\,\omega_0}{\partial\,y'}\,,\ \mathfrak{E}_{0z} = -\frac{\partial\,\omega_0}{\partial\,z'}\,,$$

terwijl de potentiaal ω_0 zelf bepaald wordt door

$$\frac{\partial^2\,\omega_0}{\partial\,x'^2} + \frac{\partial^2\,\omega_0}{\partial\,y'^2} + \frac{\partial^2\,\omega_0}{\partial\,z'^2} = -4\,\pi\,V^2\,\varrho_0 = -\frac{4\,\pi}{k}\,V^2\,\varrho.$$

Uit deze vergelijking, in verband met (2), ziet men dat in overeenkomstige punten

$$\omega = \omega_0$$

en dus

$$\mathfrak{F}'_x = \mathfrak{E}_{0x}\,,\ \mathfrak{F}'_y = \mathfrak{E}_{0y}\,,\ \mathfrak{F}'_z = \mathfrak{E}_{0z}$$

is. Derhalve zijn, krachtens het aan het slot van § 4 gezegde, de componenten der in het stelsel S werkende electrische kracht

$$\mathfrak{E}_{0x}\,,\ \frac{1}{k}\,\mathfrak{E}_{0y}\,,\ \frac{1}{k}\,\mathfrak{E}_{0z}\,.$$

In de richting der x-as heeft men dezelfde electrische kracht als in S_0, maar de componenten volgens de y- en z-as in S zijn k maal kleiner dan die in S_0.

Met behulp van deze uitkomst, die ik reeds vroeger heb afgeleid, kan elk electrostatisch vraagstuk voor een bewegelijk stelsel worden

teruggebracht tot een dergelijk vraagstuk voor een rustend stelsel; alleen moeten in dit laatste de afmetingen in de richting der beweging k maal grooter zijn dan in het eerste. Aan de evenwichtsverdeeling van ionen over een conductor C, die met de snelheid $\mathfrak{p}_x$ voortgaat, beantwoordt b.v. op de door onze formules aangeduide wijze eene evenwichtsverdeeling over een stilstaanden conductor C_0. Ik zal daarover thans niet uitweiden en er alleen op wijzen dat, als de electrische kracht $\mathfrak{E}_0$ aan het oppervlak C_0 loodrecht staat op dat oppervlak, blijkens het bovengezegde ook de electrische kracht in het bewegelijke stelsel loodrecht op het oppervlak C zal staan, zooals men gemakkelijk kan aantoonen.

Daar

$$k = \left(1 - \frac{\mathfrak{p}_x^2}{V^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

de eenheid slechts met een bedrag van de tweede orde overtreft — wanneer wij nl. $\frac{\mathfrak{p}_x}{V}$ van de eerste orde noemen — zal de invloed der aardbeweging bij de electrostatische verschijnselen van de tweede orde zijn.

§ 6. Keeren wij thans tot de algemeene vergelijkingen (I_c)—(V_c) terug en passen wij deze op optische verschijnselen toe. Nemen wij dus aan, dat wij een stelsel van ponderabele lichamen hebben, waarin ionen voorkomen, die om bepaalde evenwichtsstanden kunnen heen- en weertrillen, en onderstellen wij dat in het stelsel eene lichtbeweging plaats heeft, bestaande in dergelijke trillingen van de ionen, gepaard met electrische trillingen in den aether. Ter vereenvoudiging zullen wij ons voorstellen dat, als er geene lichtbeweging is, het geheele stelsel in rust verkeert; van molekulaire bewegingen zien wij dus af.

Wij zullen nu vooreerst de vergelijkingen vereenvoudigen door de termen van de tweede orde te verwaarloozen, en dus $k = 1$ te stellen, waardoor de electrische kracht voor rustende ionen $\mathfrak{F}'$ wordt, en in de tweede plaats door den laatsten term in (I_c) en de termen met $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ in (V_c) weg te laten.

Wij zullen n. l. onderstellen dat de verplaatsingen der deeltjes bij de lichttrillingen als oneindig klein, zelfs tegenover de afmetingen der ionen, kunnen beschouwd worden, en dat men alles wat ten opzichte van deze verplaatsingen van de tweede orde is mag weglaten. Als de verplaatsingen oneindig klein zijn, zijn de snelheden het evenens, en ook alle grootheden die eerst door de beweging

der ionen ontstaan, dus bijv. de waarden van $\mathfrak{H}'_x$, $\mathfrak{H}'_y$, $\mathfrak{H}'_z$. Wij mogen dus de laatste termen in de vergelijkingen (V_c) weglaten, als zijnde van de tweede orde.

Verder merken wij op, dat tengevolge van de verplaatsing in een bepaald punt der ruimte eene andere dichtheid ϱ zal bestaan dan de oorspronkelijk daarin bestaande dichtheid ϱ_0. Wij hebben reeds ondersteld dat de dichtheid in een ioon geleidelijk van punt tot punt verandert, en mogen dus aannemen dat de differentiaalquotienten der dichtheid naar de coördinaten van de orde $\frac{\varrho_0}{a}$ zullen zijn, als a de middellijn van een ioon voorstelt.

Nu vindt men gemakkelijk, als $\mathfrak{a}$ de verplaatsing uit den evenwichtsstand is,

$$\varrho = \varrho_0 - \frac{\partial}{\partial x}(\varrho_0\, \mathfrak{a}_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\varrho_0\, \mathfrak{a}_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_0\, \mathfrak{a}_z).$$

Natuurlijk komt het hierbij op de drie laatste termen aan. Deze zijn, wanneer c de amplitudo der trillingen is, van de orde $\frac{c\,\varrho_0}{a}$, en dus komen in den eersten term in het tweede lid van (I_c) termen voor van de orde

$$\frac{V^2\, c\, \varrho_0}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

De laatste term in (I_c) is daarentegen van de orde

$$\frac{\mathfrak{p}_x\, \varrho_0\, c}{T}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

als T den trillingstijd voorstelt. Deelt men (4) door (3), dan verkrijgt men

$$\frac{\mathfrak{p}_x}{V} \cdot \frac{a}{VT}.$$

Wij mogen dus (4) ten opzichte van (3) verwaarloozen, omdat de afmetingen der ionen zeer veel kleiner zijn dan de golflengte.

Wat nu eindelijk de termen met $\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}$ in (V_c) betreft, deze zouden om dezelfde reden als de termen met $\mathfrak{H}'_x$, $\mathfrak{H}'_y$, $\mathfrak{H}'_z$ mogen worden weggelaten, als men mocht aannemen dat er nergens eene electrische

kracht bestaat, zoo lang de ionen in hunne evenwichtsstanden verkeeren. Zijn er reeds dan, wat wel zoo aannemelijk is, zoodanige krachten $\mathfrak{F}_0'$, dan mag men de wijzigingen die deze bij de trillingen ondergaan als oneindig klein beschouwen, en dus in de bedoelde termen $\mathfrak{F}'_y$ en $\mathfrak{F}'_z$ door $\mathfrak{F}'_{0y}$ en $\mathfrak{F}'_{0z}$ vervangen.

Onderstelt men nu dat de deeltjes zich alleen in hun geheel kunnen verschuiven, en dat een ioon in den evenwichtsstand, al werken er krachten op de volume-elementen ervan, niet in zijn geheel door eene electrische kracht naar den eenen of den anderen kant wordt gedreven, dan wordt alles zeer eenvoudig. Dan is nl., wanneer $d\tau$ een volume-element is, voor het geheele ioon

$$\int \varrho_0 \mathfrak{F}'_{0y}\, d\tau = \int \varrho_0 \mathfrak{F}'_{0z}\, d\tau = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Passen wij thans b. v. de tweede der vergelijkingen (V_c) op de verschillende punten van een ioon toe, telkens op denzelfden algemeenen tijd t, dan kunnen wij door eene integratie de totale kracht

$$\int \varrho\, \mathfrak{E}_y\, d\tau$$

vinden, die het wegens de electrische werkingen ondervindt. De tweede term in het tweede lid levert hiervoor op

$$-\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\int \varrho\, \mathfrak{v}_x\, \mathfrak{F}'_y\, d\tau ,$$

maar hier mag men nu $\mathfrak{F}'_y$ door $\mathfrak{F}'_{0y}$ en ϱ door ϱ_0 vervangen. Men verkrijgt dus

$$-\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\, \mathfrak{v}_x \int \varrho_0\, \mathfrak{F}'_{0y}\, d\tau \;,$$

en dit verdwijnt wegens (5).

De vergelijkingen (V_c) worden thans $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}'$; d. w. z., ook voor de zich bewegende ionen kan $\mathfrak{F}'$ als de electrische kracht beschouwd worden.

Wanneer, zooals wij onderstelden, een ioon zich alleen in zijn geheel kan verschuiven, zoodat $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ in alle punten ervan even groot zijn, mag men voor ϱ in den eersten term achter het gelijkheidsteeken in (I_c) schrijven

$$\varrho_0 - \mathfrak{a}_x \frac{\partial \varrho_0}{\partial x'} - \mathfrak{a}_y \frac{\partial \varrho_0}{\partial y'} - \mathfrak{a}_z \frac{\partial \varrho_0}{\partial z'} ,$$

daar ϱ_0 afhankelijk van t is.

Laten wij nu verder de verschillende boven besproken termen weg, en trekken wij van de vergelijkingen die af, welke men verkrijgt door $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{v} = 0$ te stellen, dan verkrijgt men vergelijkingen ter bepaling van $\mathfrak{H}'$ (welke vector in den evenwichtstoestand niet bestaat) en den vector $\mathfrak{F}' - \mathfrak{F}'_0$. Daar $\mathfrak{F}'_0$ de electrische kracht is in den evenwichtstoestand, en blijkens het gezegde $\mathfrak{F}'$ de electrische kracht gedurende de beweging, zal de vector $\mathfrak{F}' - \mathfrak{F}'_0$ de electrische kracht zijn, die gedurende de beweging meer bestaat dan oorspronkelijk, en klaarblijkelijk hebben wij alleen met *deze* kracht $\mathfrak{F}' - \mathfrak{F}'_0$ te doen, daar $\mathfrak{F}'_0$ door andere krachten in evenwicht moet worden gehouden.

Wij verkrijgen nu, als wij in plaats van $\mathfrak{F}' - \mathfrak{F}'_0$ schrijven $\mathfrak{F}'$, de volgende vergelijkingen:

$$Div' \mathfrak{F}' = -4 \pi V^2 \left(\mathfrak{a}_x \frac{\partial \varrho_0}{\partial x'} + \mathfrak{a}_y \frac{\partial \varrho_0}{\partial y'} + \mathfrak{a}_z \frac{\partial \varrho_0}{\partial z'} \right), \quad . \quad (\mathrm{I_d})$$

$$Div' \mathfrak{H}' = 0 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II_d})$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}'_z}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial z'} = 4 \pi \varrho_0 \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial t'} + \frac{1}{V^2} \frac{\partial \mathfrak{F}'_x}{\partial t'} , \text{ enz.} \quad . \quad . \quad (\mathrm{III_d})$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}'_z}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{F}'_y}{\partial z'} = - \frac{\partial \mathfrak{H}'_x}{\partial t'} , \text{ enz.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{IV_d})$$

Wij zullen verder nog aannemen dat de ionen zoo klein zijn, dat van het verschil in den plaatselijken tijd in de verschillende punten van een ioon mag worden afgezien, zoodat b. v. de verplaatsing $\mathfrak{a}_x$, die voor de verschillende punten eene zelfde functie van den tijd t moet zijn, ook geacht kan worden, voor alle dezelfde functie van t' te zijn.

Nu hebben de vergelijkingen ($\mathrm{I_d}$)—($\mathrm{IV_d}$) volkomen denzelfden vorm als de vergelijkingen voor een stelsel zonder translatie; zij zouden voor zulk een stelsel gelden, wanneer t' den algemeenen tijd voorstelde, x', y', z' de coordinaten [wat zij in ($\mathrm{I_d}$)—($\mathrm{IV_d}$) trouwens ook voorstellen], ϱ_0 de dichtheid, $\mathfrak{a}$ de verplaatsing, $\mathfrak{H}'$ de magnetische kracht, en $\mathfrak{F}'$ de electrische kracht die er gedurende de beweging meer is dan in den evenwichtstoestand.

Voor wij intusschen uit deze overeenstemming der vergelijkingen

voor stelsels *met* en *zonder* translatie een besluit trekken omtrent de mogelijke bewegingstoestanden, moeten wij bedenken dat aan (I_d)—(IV_d) nog de bewegingsvergelijkingen voor de ionen moeten worden toegevoegd, en dat daarbij, behalve de electrische krachten nog andere krachten, die wij molekulaire krachten zullen noemen, te pas komen. Wij zullen vooreerst aannemen dat de afstanden waarop deze werken zoo klein zijn, dat van het verschil der plaatselijke tijden voor twee op elkander werkende deeltjes mag worden afgezien.

§ 7. Verbeelden wij ons thans twee stoffelijke stelsels, het eerste S met en het tweede S_0 zonder translatie, maar overigens volkomen aan elkander gelijk. Bij het eerste voeren wij den plaatselijken tijd t' in, bij het tweede stellen wij door t' den algemeenen tijd voor. Wij geven in S en S_0 aan ϱ_0, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{H}'$ de beteekenis die wij hebben vermeld en hebben dan voor beide stelsels de vergelijkingen (I_d)—(IV_d).

Verder stellen wij ons zoodanige bewegingen voor dat, wanneer men in S_0 zekere ponderabele stof of eene zekere electrische lading op den algemeenen tijd t' in een punt (x', y', z') vindt, men in S in datzelfde punt juist zoodanige stof of lading vindt op den plaatselijken tijd t', wat natuurlijk medebrengt dat op de aldus bepaalde overeenkomstige tijdstippen in het punt (x', y', z') dezelfde dichtheid ϱ_0, dezelfde verplaatsing $\mathfrak{a}$ en dezelfde snelheid en versnelling gevonden wordt. Daar dus een deel der afhankelijk veranderlijken in onze vergelijkingen in S_0 en S op dezelfde wijze van de onafhankelijk veranderlijken afhangt, kan aan de vergelijkingen voor S voldaan worden, wanneer ook de andere afhankelijk veranderlijken op dezelfde wijze van x', y', z', t' afhangen als in S_0, gesteld namelijk dat in dit laatste stelsel aan de vergelijkingen voldaan wordt.

Wanneer dus de grootheden $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$, als functiën van x', y', z', t' in S_0 op een werkelijken bewegingstoestand betrekking hebben, zal, indien in het stelsel S voor $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ dezelfde functiën worden genomen, de electrische kracht in beide stelsels eveneens op dezelfde wijze van x', y' z', t' afhangen. Nu brengt echter het boven omtrent S en S_0 gezegde ook mede dat in eene om het punt (x', y', z') liggende ruimte, zoo klein dat van het verschil der plaatselijke tijden daarbinnen mag worden afgezien, op overeenkomstige tijdstippen volkomen dezelfde verdeeling der stof gevonden wordt. Wanneer wij dus aannemen, dat de molekulaire krachten *niet* door de translatie gewijzigd worden, dus in beide stelsels op dezelfde wijze van

de verdeeling der stof afhangen, zal een ioon in S niet alleen dezelfde electrische kracht, maar ook dezelfde molekulaire kracht ondervinden als in S_0. Daar verder ook de massa's en de versnellingen in beide stelsels dezelfde zijn, zal aan de bewegingsvergelijkingen der ionen in S voldaan zijn, zoodra dat in S_0 het geval is, en beantwoordt op de gezegde wijze aan elken bewegingstoestand in S_0 ook een mogelijke bewegingstoestand in S. Aldus komen wij tot het besluit:

Wanneer in een lichaam of een stelsel van lichamen zonder translatie een bewegingstoestand bestaan kan, waarbij de verplaatsingen der ionen en de componenten der vectoren $\mathfrak{F}'$ en $\mathfrak{H}'$ zekere functiën van de coördinaten en den tijd zijn, dan is in hetzelfde lichaam of hetzelfde stelsel, als het eene translatiesnelheid heeft, een toestand mogelijk, waarbij de verplaatsingen en de componenten van $\mathfrak{F}'$ en $\mathfrak{H}'$ dezelfde functiën zijn van de coördinaten en den plaatselijken tijd. Dit is de stelling, die ik vroeger langs veel omslachtiger weg heb afgeleid, en waaruit de meeste verschijnselen die in de theorie der aberratie ter sprake komen, verklaard kunnen worden.

§ 8. Bij de afleiding werd thans aangenomen dat de molekulaire krachten slechts op uiterst kleine afstanden werken. Mocht de afstand van twee merkbaar op elkander werkende hoeveelheden stof zoo groot kunnen zijn, dat van het verschil in hunne plaatselijke tijden niet mag worden afgezien, dan zal de stelling niet meer doorgaan, als de molekulaire krachten in 't geheel niet door de translatie gewijzigd worden. Gemakkelijk ziet men echter in, dat de stelling weder wel zou doorgaan, wanneer de krachten op eene bepaalde wijze door de translatie werden veranderd, en wel wanneer de kracht die twee hoeveelheden stof in de punten (x'_1, y'_1, z'_1) en (x'_2, y'_2, z'_2) op elkander uitoefenen niet meer afhing van de *gelijktijdige* coördinaten, maar door de coördinaten *op dezelfde plaatselijke tijden* bepaald werd. Mochten er dus verschijnselen bestaan, bij welke de ongelijkheid der plaatselijke tijden voor op elkander werkende stofdeeltjes een merkbaren invloed kan hebben, en bij welke toch blijkens de waarnemingen de boven omtrent overeenkomstige bewegingstoestanden bewezen stelling doorgaat, dan zou men daarin eene aanduiding hebben van een invloed als de zoo even genoemde van de translatie op de molekulaire krachten, en dus van eene voortplanting dezer krachten door den aether. Wellicht behoort de natuurlijke draaiing van het polarisatievlak tot deze verschijnselen.

§ 9. Tot nog toe werden grootheden van de orde $\mathfrak{p}^2_x/V^2$ verwaarloosd. Zooals men weet komen deze ter sprake bij de interferentie-

proef van MICHELSON, waarbij twee lichtstralen met elkander interfereerden na over tamelijk groote afstanden heen- en weergegaan te zijn, de een evenwijdig aan de bewegingsrichting der aarde, de ander in eene richting loodrecht daarop. Om het negatieve resultaat dezer proef te verklaren, hebben FITZGERALD en ik aangenomen dat de afmetingen der vaste lichamen die de optische toestellen droegen op bepaalde wijze door de translatie veranderd werden.

De Heer LIÉNARD heeft nu onlangs de meening uitgesproken [1]) dat mijne theorie tot een positief resultaat der proef zou leiden, wanneer deze op zoodanige wijze genomen werd, dat de lichtstralen niet door lucht, maar door een vast of vloeibaar dielectricum heen- en weergingen.

Het is moeilijk met zekerheid te zeggen, wat er in dit geval zal worden waargenomen, daar men, wanneer mijne hypothese ter verklaring der proef aanvaard wordt, ook moet aannemen dat de onderlinge rangschikking der molekulen van de doorstraalde stof door de translatie wordt gewijzigd, en bovendien op een invloed der verschuiving op de molekulaire krachten, nl. een invloed van de tweede orde, bedacht moet zijn.

De volgende beschouwing moge dienen, niet om te bewijzen dat de proef altijd een negatief resultaat moet opleveren, maar om te doen zien dat dit zeer goed denkbaar is, en in het licht te stellen wat daarvan de theoretische beteekenis zou zijn.

Ik keer daarbij terug tot de vergelijkingen (I_c)—(V_c), en verwaarloos daarin vooreerst, en wel weder op dezelfde gronden, de in § 6 weggelaten termen. Onder $\mathfrak{F}'$ en $\mathfrak{E}$ (de electrische kracht) versta ik wat deze vectoren meer zijn gedurende de bewegingen dan in den evenwichtstoestand (verg. § 6). Ik breng verder de vergelijkingen in denzelfden vorm als die welke voor een rustend stelsel gelden, door in plaats van x', y', z', t', $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{H}'$, a en ϱ_0 nieuwe grootheden in te voeren, die zich van de oude door zekere constante factoren onderscheiden en, ter wille van de eenvormigheid der formules, alle door dubbele accenten zullen worden aangeduid. Natuurlijk kunnen wij deze nieuwe grootheden ook aanstonds in de vergelijkingen (I_b)—(V_b) invoeren.

Stel dan nu, onder ε een onbepaalden factor verstaande, die van de eenheid met een bedrag van de tweede orde verschilt, in onze vergelijkingen

$$x = \frac{\varepsilon}{k}\, x'' , \quad y = \varepsilon\, y'' , \quad z = \varepsilon\, z'' , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

[1]) L'Éclairage Électrique, 20 et 27 août 1898.

$$\mathfrak{a}_x = \frac{\varepsilon}{k}\,\mathfrak{a}''_x,\quad \mathfrak{a}_y = \varepsilon\,\mathfrak{a}''_y,\quad \mathfrak{a}_z = \varepsilon\,\mathfrak{a}''_z\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (7)$$

$$\varrho_0 = \frac{k}{\varepsilon^3}\,\varrho_0''\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (8)$$

$$\mathfrak{F}'_x = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathfrak{F}''_x\,,\quad \mathfrak{F}'_y = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathfrak{F}''_y\,,\quad \mathfrak{F}'_z = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathfrak{F}''_z\,,$$

$$\mathfrak{H}_x = \frac{k}{\varepsilon^2}\,\mathfrak{H}''_x\,,\quad \mathfrak{H}'_y = \frac{k}{\varepsilon^2}\,\mathfrak{H}''_y\,,\quad \mathfrak{H}'_z = \frac{k}{\varepsilon^2}\,\mathfrak{H}''_z\,,$$

$$t' = k\,\varepsilon\,t''\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

zoodat t'' een gewijzigde plaatselijke tijd wordt, dan nemen de vergelijkingen de volgende gedaante aan:

$$Div''\,\mathfrak{F}'' = 4\,\pi\,V^2\left(-\,\mathfrak{a}''_x\frac{\partial\,\varrho_0''}{\partial\,x''} - \mathfrak{a}''_y\frac{\partial\,\varrho_0''}{\partial\,y''} - \mathfrak{a}''_z\frac{\partial\,\varrho_0''}{\partial\,z''}\right), \qquad (\mathrm{I_e})$$

$$Div''\,\mathfrak{H}'' = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (\mathrm{II_e})$$

$$\frac{\partial\,\mathfrak{H}''_z}{\partial\,y''} - \frac{\partial\,\mathfrak{H}''_y}{\partial\,z''} = 4\,\pi\varrho_0''\frac{\partial\,\mathfrak{a}''_x}{\partial\,t''} + \frac{1}{V^2}\frac{\partial\,\mathfrak{F}''_x}{\partial\,t''}\,,\ \text{enz.} \quad . \qquad (\mathrm{III_e})$$

$$\frac{\partial\,\mathfrak{F}''_z}{\partial\,y''} - \frac{\partial\,\mathfrak{F}''_y}{\partial\,z''} = -\,\frac{\partial\,\mathfrak{H}''_x}{\partial\,t''}\,,\ \text{enz.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (\mathrm{IV_e})$$

$$\mathfrak{E}_x = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathfrak{F}''_x\,,\ \mathfrak{E}_y = \frac{1}{k\,\varepsilon^2}\,\mathfrak{F}''_y\,,\ \mathfrak{E}_z = \frac{1}{k\,\varepsilon^2}\,\mathfrak{F}''_z \quad . \quad . \quad . \qquad (\mathrm{V_e})$$

Men ziet dat de vergelijkingen ($\mathrm{I_e}$)—($\mathrm{IV_e}$) ook voor een rustend stelsel kunnen gelden; daarbij worden dan x'', y'', z'' de coördinaten, t'' de werkelijke algemeene tijd, $\mathfrak{a}''$ de verplaatsing, ϱ_0'' de dichtheid, $\mathfrak{H}''$ de magnetische en $\mathfrak{F}''$ de electrische kracht.

Men verbeelde zich thans een dergelijk rustend stelsel S_0, waarin een werkelijke bewegingstoestand plaats heeft, en een tweede stelsel S met eene translatie, in welk stelsel dan de grootheden x'', y'', z'', $\mathfrak{a}''$, ϱ'', t'' op de in (6)—(9) uitgedrukte wijze met de coördinaten, de verplaatsing, de dichtheid en den tijd samenhangen. Wij stellen ons voor dat in den evenwichtstoestand ϱ_0'' in beide stelsels op dezelfde wijze van x'', y'', z'' afhangt. Dit sluit in zich dat het

stelsel S uit S_0 door de in (6) uitgedrukte uitrekkingen kan worden verkregen en dat bij die uitrekkingen de lading van elk volume-element onveranderd blijft. Wij zullen aannemen dat, indien een eerst rustend stelsel S_0 in translatie gebracht wordt, het *van zelf* in het stelsel S overgaat. Verder dat niet alleen wat de ligging der ionen, maar ook wat de verdere stofverdeeling betreft, S op deze wijze uit S_0 kan worden verkregen.

Wanneer wij bovendien aannemen dat op overeenkomstige tijden steeds de configuratie van S door de bedoelde uitrekkingen uit die van S_0 kan verkregen worden, zullen in beide stelsels $\mathfrak{a}''_x$, $\mathfrak{a}''_y$, $\mathfrak{a}''_z$ dezelfde functiën van x'', y'', z'', t'' zijn. Dan kan echter aan de vergelijkingen voldaan worden, wanneer ook $\mathfrak{F}''_x$, $\mathfrak{H}''_x$ enz. in S en S_0 dezelfde functiën zijn.

Wij gingen uit van een werkelijk in S_0 bestaanden bewegingstoestand en kunnen nu nagaan wanneer de daaraan op de zooeven gezegde wijze beantwoordende toestand in S eveneens werkelijk kan bestaan, d. w. z. in een stelsel dat wij kunnen beschouwen als *hetzelfde* als S_0, alleen door de translatie gewijzigd. Te dien einde letten wij op de componenten der kracht die op een ioon werkt. De electrische kracht volgens de x-as is volgens (V_e) bij S $\frac{1}{\varepsilon^2}$ maal de overeenkomstige electrische kracht in S_0, terwijl bij de andere componenten der electrische kracht de factor $\frac{1}{k\,\varepsilon^2}$ te pas komt.

Wij zullen ter vereenvoudiging stellen dat de molekulaire krachten op zoo kleine afstanden werken, dat men de vereenvoudiging mag aanbrengen, die in § 6 werd vermeld, en verder dat deze krachten geene wijziging van de orde $\mathfrak{p}_x/V$ ondergaan. Dan kan er echter nog eene wijziging van de tweede orde zijn, en ik zal nu aannemen, dat de componenten der molekulaire krachten, wanneer men in S en S_0 *dezelfde* ponderabele stof heeft, alleen in de volgens (6) gewijzigde standen, zich in de beide stelsels juist door denzelfden factor onderscheiden als de componenten der electrische krachten. Dan geldt hetzelfde van de *totale* krachten, en de beschouwde bewegingstoestand zal in S, nl. in een bewegelijk stelsel, uit dezelfde deeltjes samengesteld als het rustende, kunnen bestaan, wanneer hetzelfde wat van de krachten geldt ook doorgaat voor de produkten van massa en versnelling.

Nu zijn volgens onze onderstellingen de versnellingen in de richtingen der drie assen in S resp. $\frac{1}{k^3\,\varepsilon}$, $\frac{1}{k^2\,\varepsilon}$ en $\frac{1}{k^2\,\varepsilon}$ maal de versnellingen in S_0. Men komt dus uit de bewegingsvergelijkingen die op de

x-as betrekking hebben tot eene verhouding der massa's $\frac{k^3}{\varepsilon}$ en uit de beide andere tot eene verhouding $\frac{k}{\varepsilon}$.

Verkreeg men nu maar dezelfde breuk, dan zou, bij eene bepaalde waarde van ε, de waarde daarvan 1 kunnen worden. Thans kan dit althans niet voor beide breuken worden bereikt. Om dus de twee bewegingstoestanden aan elkander te laten beantwoorden, moet men wel aannemen dat de massa's der ionen, terwijl S_0 door de uitrekkingen (6) in S overgaat, gewijzigd worden, en wel zoo dat dan de versnellingen in verschillende richtingen met ongelijke massa's moeten vermenigvuldigd worden. Daar de effectieve massa van een ioon kan afhangen van hetgeen er in den aether gebeurt, en bij eene translatie de richting van deze en eene richting loodrecht daarop niet gelijkwaardig zijn, is dit denkbeeld niet geheel te verwerpen.

Mocht het worden aangenomen, dan zou op de in onze formules uitgedrukte wijze uit een bewegingstoestand bij stilstaande aarde een toestand verkregen worden, die in hetzelfde stelsel op de voortgaande aarde mogelijk is. Het verdient daarbij opgemerkt te worden dat de door (6) bepaalde uitrekkingen juist zoodanige zijn, als ik in de verklaring der proef van MICHELSON moest aannemen. Men kan daarbij ε zoo kiezen als men wil, maar natuurlijk zal die constante in werkelijkheid eene bepaalde waarde moeten hebben, die eerst door een nader inzicht in de verschijnselen zou kunnen bepaald worden.

Waren al de genoemde onderstellingen juist, dan zou de proef van MICHELSON een negatief resultaat moeten opleveren, onverschillig door welke stof de lichtstralen liepen, en zelfs wanneer de een b.v. door lucht en de ander door glas ging. Had men nl. bij S_0, dus bij stilstaande aarde, in het stelsel eene zekere verdeeling van licht en donker (interferentiestrepen), dan zou men in S eene verdeeling van licht en donker moeten verkrijgen, die door de uitrekkingen (6) uit de zooeven genoemde kan worden verkregen, als men maar bij S met eene lichtsoort werkt, waarvan de trillingstijd $k\varepsilon$ maal zoo groot is als die in S_0. De noodzakelijkheid van dit laatste volgt uit (9). Daar nu het getal $k\varepsilon$ in alle standen die men aan den toestel geeft, hetzelfde zou zijn, komt men tot het besluit dat men, den toestel draaiend, terwijl men steeds met *dezelfde* lichtsoort werkt, de interferentiestrepen voortdurend met dezelfde deelen van het ponderabele stelsel (b. v. met dezelfde deelstrepen van een micrometer) zou zien samenvallen.

Natuurkunde. — De heer LORENTZ biedt voor het verslag een opstel aan, getiteld: „*De aberratietheorie van* STOKES *in de onderstelling van een aether die niet overal dezelfde dichtheid heeft.*"

In de theorie der aberratie die STOKES heeft opgesteld moet men, zooals bekend is, aannemen dat de aether in eene irrotationeele beweging verkeert en in alle punten van het oppervlak der aarde dezelfde snelheid als de planeet bij hare jaarlijksche beweging heeft. Ik heb vroeger aangetoond dat deze beide voorwaarden met elkander in strijd zijn, maar daarbij onderstelde ik dat de aether overal dezelfde onveranderlijke dichtheid heeft.

Prof. PLANCK te Berlijn had de vriendelijkheid mij er op te wijzen, dat aan beide voorwaarden zou kunnen voldaan worden, wanneer de aether kon worden samengedrukt en evenals het met eene gasmassa kan gebeuren, door de gravitatie rondom de aarde kon worden opeengehoopt. Wel moet er altijd eenige glijding plaats hebben, maar de relatieve snelheid van den aether ten opzichte van de aarde kan zoo klein gemaakt worden als men wil, wanneer men maar eene voldoende condensatie om de aarde aanneemt.

Ziehier de berekening van Prof. PLANCK, die hij mij op mijn verzoek toestond hier mede te deelen.

In plaats van de aarde met eene constante translatiesnelheid door den aether heen te laten voortgaan, laten wij, wat op hetzelfde neerkomt, den aether langs de stilstaande aarde stroomen, zoodat hij op oneindigen afstand de snelheid c, overal in dezelfde richting, heeft. Wij onderstellen dat de beweging stationair en irrotationeel is, en kennen aan den aether de eigenschappen van een gas toe. Wij laten hem de wet van BOYLE volgen, en door de aarde aangetrokken worden naar de wet van NEWTON.

Tot oorsprong van coördinaten kiezen wij het middelpunt der aarde, aan de z-as geven wij de richting der snelheid c, den afstand tot het middelpunt noemen wij r, en den straal der aarde r_0. Eindelijk zij φ de snelheidspotentiaal, p de druk, k de dichtheid, μ de standvastige verhouding $\frac{k}{p}$, V de zwaartekrachtspotentiaal voor de massa-eenheid,

$$g = \frac{\partial V}{\partial r} \; (r = r_0)$$

de versnelling aan het oppervlak der aarde.

Men heeft dan de beide vergelijkingen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \varphi}{dx}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$\int\frac{dp}{k}+V+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{dz}\right)^2\right\}=const. \quad . \quad . \quad (2)$$

Wij zullen nu aannemen dat in deze laatste vergelijking de veranderingen die de term met het snelheidsquadraat van punt tot punt ondergaat tegenover de veranderingen der beide eerste termen mogen worden verwaarloosd, wat, zooals nadere beschouwing leert, bij niet te groote waarden van c werkelijk geoorloofd zal zijn. De vergelijking gaat dan over in

$$\int\frac{dp}{k}+V=const.,$$

of, daar

$$V=-g\frac{r_0^2}{r}$$

is,

$$\log k-\mu g\frac{r_0^2}{r}=const.$$

Wanneer k_0 de dichtheid aan het oppervlak der aarde, en

$$\mu g r_0^2=\alpha$$

is, kan men hiervoor schrijven

$$\log k-\log k_0-\alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Zooals men ziet komt de gemaakte onderstelling omtrent het weglaten van den laatsten term in het eerste lid van (2) hierop neer, dat de wijze waarop de dichtheid van den aether van punt tot punt verandert, onafhankelijk is van de beweging, dat men dus alleen met de condensatie te doen heeft, die ook als de aarde stilstond daarom heen zou bestaan.

De gevonden waarde van k in de vergelijking (1) substitueerende, verkrijgt men eene differentiaalvergelijking ter bepaling van φ. Daaraan wordt voldaan door de waarde

$$\varphi=z\left[a\left(\frac{\alpha}{2r}-1\right)+b\left(\frac{\alpha}{2r}+1\right)e^{-\frac{\alpha}{r}}\right], \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

die zoo is gekozen dat ook met de andere voorwaarden van het vraagstuk rekening kan worden gehouden. Ter bepaling der constanten a en b heeft men de voorwaarden:

1°. voor $r = \infty$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = c,$$

2°. voor $r = r_0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Men vindt hieruit

$$-a + b = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

en

$$a = \left(\frac{\alpha^2}{2 r_0^2} + \frac{\alpha}{r_0} + 1\right) e^{-\frac{\alpha}{r_0}} b. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Hieruit volgt dan verder voor de snelheid waarmede de aether langs de aarde glijdt

$$v = \frac{\alpha^3}{4 r_0^3} \cdot e^{-\frac{\alpha}{r_0}} b \sin \vartheta , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

als ϑ de hoek is, dien de naar 't beschouwde punt getrokken straal met de bewegingsrichting der aarde maakt. De Heer PLANCK merkt nu op dat, blijkens de formule (6), wanneer $\frac{\alpha}{r_0}$ maar groot genoeg is, a zeer klein zal zijn in vergelijking met b. Dan is dus, volgens (5) op zeer weinig na $b = c$, maar, juist wegens de kleine waarde van $e^{-\frac{\alpha}{r_0}}$, zal dan de uit (7) voortvloeiende waarde van v zeer klein ten opzichte van c kunnen worden, zoodat aan het oppervlak der aarde de aether geene merkbare snelheid ten opzichte van de aarde heeft.

Had de verhouding tusschen den druk en de dichtheid voor den aether dezelfde waarde als voor lucht van 0°, en werkte de zwaartekracht op den aether met dezelfde intensiteit als op de ponderabele materie, dan zou

$$\frac{\alpha}{r_0} = 800 \text{ ongeveer}$$

zijn, en dan zou de glijding volkomen onmerkbaar zijn. Dan zou echter ook eene enorme condensatie plaats hebben, want de ver-

houding n der dichtheden voor $r = r_0$ en $r = \infty$ is volgens (3)

$$e^{\frac{\alpha}{r_0}}.$$

Trouwens, om een ter verklaring van de verschijnselen voldoend medegaan van den aether met de aarde te verkrijgen, behoeft men niet eene zoo groote condensatie aan te nemen. Eene kleinere zou bestaan, als de verhouding $\frac{k}{p}$ kleiner was dan bij de lucht, en ook wanneer g kleiner was dan voor de ponderabele materie.

Intusschen moet in ieder geval wel eene vrij aanzienlijke condensatie worden aangenomen. Neemt men aan dat de aberratieconstante tot op $1/2$ pCt. na nauwkeurig bekend is, dan mag in de theorie van STOKES de snelheid waarmede de aether langs de aarde glijdt ook niet meer dan ongeveer $1/2$ pCt. bedragen van de snelheid der aarde. Nu vind ik als $\frac{\alpha}{r_0} = 10$ gesteld wordt, voor de grootste waarde van de glijdingssnelheid 0,011 c, wat te groot zou zijn; voor $\frac{\alpha}{r_0} = 11$ daarentegen wordt deze waarde 0,0055 c. De waarde van $\frac{\alpha}{r_0}$ zou dus wel minstens 11 moeten bedragen, wat aan eene condensatie $n = e^{11}$ zou beantwoorden.

Door berekeningen die hier achterwege kunnen blijven kan men nagaan, in hoeverre in de verschillende boven vermelde onderstellingen de verwaarloozing geoorloofd is, die wij in de vergelijking (2) hebben gemaakt. Het blijkt dat dit op grooten afstand van de aarde niet het geval is, maar dichter bij haar oppervlak wel, juist wegens de kleine daar bestaande snelheden. Wij mogen daaruit afleiden dat de omtrent de grootte der verdichting verkregen uitkomsten juist zijn, al wijkt de bewegingstoestand in den verdunden aether, verder van de planeet, merkbaar van den door (4) bepaalden af.

Eigenlijk zou de condensatie nog grooter moeten zijn dan boven als noodzakelijk werd opgegeven. Men ziet dit in, als men bedenkt dat ook de zon den aether zou moeten aantrekken, zoodat de ruimte waarin zich de aarde beweegt aether bevat die reeds verdicht is; daarin moet nu de aarde nog eene nieuwe condensatie teweegbrengen.

Het verdient opmerking, vooreerst dat men tot dergelijke uitkomsten zou geraken, wanneer men eene andere wet dan die van NEWTON onderstelde, en ten tweede dat het zeer natuurlijk is dat men door eene voldoende verdichting aan te nemen, tot eene kleine relatieve

snelheid van den aether ten opzichte van het aardoppervlak kan geraken. Stellen wij, om dit te begrijpen, gemakshalve dat de aether buiten een zekeren met de aarde concentrischen bol overal de even groote kleine dichtheid k, en binnen dien bol overal eene bepaalde grootere dichtheid k' had. Was dan de aarde in rust, en stroomde de aether buiten den bol met snelheden van de orde c, dan zou klaarblijkelijk evenveel aether als door den bol naar binnen stroomt door het middenvlak dat loodrecht op de gemiddelde bewegingsrichting staat, moeten heen gaan. Daartoe zouden echter de snelheden binnen den bol slechts van de orde $\frac{k}{k'}c$ behoeven te zijn.

Wil men de theorie van STOKES handhaven door de onderstelling van dergelijke verdichtingen, dat moet men in elk geval aannemen dat de voortplantingssnelheid van het licht even groot is in den in hooge mate verdichten aether als in den niet verdichten.

Overweegt men nu, aan welke opvatting de voorkeur moet worden gegeven, aan deze of aan de theorie volgens welke de aether volkomen in rust is, dan moet men op de volgende punten letten.

1°. De laatste theorie heeft, om de aberratieverschijnselen te verklaren, den meêsleepingscoëfficient van FRESNEL noodig, die door rechtstreeksche waarnemingen juist is bevonden en met behulp van vrij aannemelijke theoretische voorstellingen kan worden afgeleid. Er zou wel iets zonderlings in zijn, als toevallig voor dezen coëfficient juist de waarde werd verkregen, die men in eene verkeerde theorie noodig heeft.

2°. Wie er naar streven wil, ook de gravitatie door tusschenkomst van den aether te verklaren, moet het als 't eenvoudigste beschouwen, den aether zelf niet aan de gravitatie te onderwerpen.

Op deze en andere gronden schijnt mij de theorie van den rustenden aether de meest bevredigende te zijn. Ook Prof. PLANCK is van deze meening. Dit neemt niet weg dat het van belang is alle mogelijke opvattingen te onderzoeken, en daarom zij het mij vergund, hier nog de volgende opmerkingen te maken.

1°. Wanneer men de boven beschouwde groote condensatie aanneemt, en onderstelt dat de voortplantingssnelheid onafhankelijk is van de dichtheid, kan men werkelijk alle verschijnselen verklaren. Ik heb althans geen enkel feit kunnen vinden, waarmede men in strijd komt. Wel zal, zooals reeds gezegd werd, de bewegingstoestand van den aether niet volkomen de door de formule (4) bepaalde kunnen zijn. Op grooten afstand van de aarde zal men den term met het snelheidsquadraat in (2) in aanmerking moeten nemen; bovendien zal men daar ook met de aantrekking door de zon rekening

hebben te houden. Maar nadere beschouwing leert dat toch nog altijd eene beweging met een snelheidspotentiaal mogelijk is, en dit, in verband met ėene voldoende verdichting, is alles wat men noodig heeft.

2°. Als men onderstelt dat voor den zich bewegenden aether de vergelijkingen gelden, die HERTZ voor bewegelijke dielectrica heeft opgesteld [1]), wordt de voortplanting van het licht door zeer eenvoudige formules bepaald. Laat de aarde in rust zijn, en de aether stroomen, en kies een stelsel van vaste coördinaatassen. Laat $\mathfrak{d}$ de dielectrische verplaatsing, $\mathfrak{H}$ de magnetische kracht, $\mathfrak{v}$ de snelheid van den aether, en V de snelheid van het licht zijn. Dan kunnen de bewegingsvergelijkingen, als men aanneemt dat zij geheel onafhankelijk zijn van de dichtheid van den aether, in den volgenden vorm worden gebracht

$$Div\ \mathfrak{d} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} = 4\pi \left[\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{v}_y \mathfrak{d}_x - \mathfrak{v}_x \mathfrak{d}_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{v}_x \mathfrak{d}_z - \mathfrak{v}_z \mathfrak{d}_x)\right], \text{ enz.}$$

$$Div\ \mathfrak{H} = 0,$$

$$4\pi V^2 \left(\frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{v}_y \mathfrak{H}_x - \mathfrak{v}_x \mathfrak{H}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{v}_x \mathfrak{H}_z - \mathfrak{v}_z \mathfrak{H}_x), \text{ enz.}$$

Wij passen deze vergelijkingen nu toe op eene stationaire beweging met een snelheidspotentiaal φ, zonder te onderstellen dat $Div\ \mathfrak{v} = 0$ is. Wel bepalen wij ons tot grootheden van de eerste orde met betrekking tot $\mathfrak{v}$.

Voert men nu, in plaats van t, de nieuwe onafhankelijk veranderlijke

$$t' = t + \frac{\varphi}{V^2}$$

in, en als nieuwe afhankelijk veranderlijken de vectoren $\mathfrak{F}'$ en $\mathfrak{H}'$, bepaald door

$$\mathfrak{F}'_x = 4\pi V^2 \mathfrak{d}_x + (\mathfrak{v}_z \mathfrak{H}_y - \mathfrak{v}_y \mathfrak{H}_z), \text{ enz.},$$

$$\mathfrak{H}'_x = \mathfrak{H}_x - 4\pi (\mathfrak{v}_z \mathfrak{d}_y - \mathfrak{v}_y \mathfrak{d}_z), \text{ enz.},$$

---

[1]) Wied. Ann. Bd. 41, p. 369.

dan nemen de vergelijkingen den volgenden vorm aan:

$$Div\ \mathfrak{F}' = 0\ ,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}'_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial z} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial \mathfrak{F}'_x}{\partial t'}\ ,\ \text{enz.}$$

$$Div\ \mathfrak{H}' = 0\ ,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}'_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{F}'_y}{\partial z} = - \frac{\partial \mathfrak{H}'_x}{\partial t'}\ ,\ \text{enz.}$$

Deze betrekkingen hebben dezelfde gedaante als de voor stilstaanden aether geldende, en dit is voldoende om onmiddellijk tot de bekende stellingen omtrent de draaiing der golffronten en de rechtlijnige gedaante der lichtstralen te geraken. Tevens blijkt het dat aan de grens van aetherlagen met verschillende snelheid nooit eene terugkaatsing kan plaats hebben.

Het is merkwaardig dat men in de twee tegenover elkander staande theorieën der aberratie van vrij wel dezelfde mathematische kunstgrepen kan gebruik maken.

3°. Men zou natuurlijk kunnen aannemen dat wel de zwaartekracht den aether kan condenseeren, maar dat molekulaire krachten dat niet noemenswaard kunnen doen. Daaraan kon het worden toegeschreven dat kleine stofmassa's (het water bij de prooven van Fizeau) die zich op het oppervlak der aarde bewegen, den aether niet medesleepen. In deze gevallen zou dan de coëfficient van Fresnel te pas kunnen komen.

4°. Eene beslissing tusschen de beide theorieën zou spoedig verkregen zijn als men de verschijnselen der dagelijksche aberratie voldoende kende. Ongelukkigerwijze is men daarvan ver verwijderd, en heeft er, zooals Prof. van de Sande Bakhuyzen mij verzekerde, nog nooit een opzettelijk onderzoek plaats gehad over de vraag wat men uit de bestaande waarnemingen omtrent deze aberratie kan afleiden.

Aardkunde. — De Heer van Bemmelen biedt voor de Werken der Akademie een verhandeling aan van Dr. J. Lorié, getiteld: „*Onze brakke, ijzerhoudende en alkalische Bodemwateren*". Deze wordt in handen gesteld van de Heeren van Bemmelen en Bakhuis Roozeboom om daarover in de April-vergadering verslag uit te brengen.

Voor de Boekerij worden aangeboden:

1°. door den Heer MAC GILLAVRY, namens den Heer SIEGENBEEK VAN HEUKELOM: „Recueil de travaux du Laboratoire BOERHAAVE". 2 Deelen.

2°. door den Heer MARTIN: „Die Fauna der Melawigruppe einer tertiären (eocaenen?) Brakwasser-Ablagerung aus den Innern von Borneo".

3°. door den Secretaris, namens Prof. J. FORSTER te Straatsburg, Correspondeerend Lid der Akademie, verschillende dissertatiën en brochures waarvan enkelen betrekking hebben op een vroeger door hem in de afdeeling medegedeeld onderzoek, nl.:

a. C. CHR. VAN DER HEIDE, „Gelatinöse Lösungen und Verflüssigungspunkt der Nährgelatine".

b. J. CHR. TH. SCHEFFER, „Die Serumdiagnose des Typhus abdominalis".

c. v. LACHNER-SANDOVAL, „Ueber Strahlenpilze".

d. v. PRESUHN, „Zur Frage der bakteriologischen Fleischbeschau".

e. R. LOEB, „Der Milzbrand in Elsass-Lothringen".

f. S. WOLF, „Beiträge zur Lehre der Agglutination mit besonderer Bezugnahme auf die Differenzierung der Coli- und Proteusgruppe und auf die Mischinfektion".

g. ED. STADLER, „Ueber die Einwirking von Kochsalz auf Bakterien, die bei den sog. Fleischvergiftungen eine Rolle spielen."

h. J. CHR. TH. SCHEFFER, „Beiträge zur Frage der Differenzirung des Bacillus aërogenes und Bacillus coli communis".

i. FR. BASENAU, „Weitere Beiträge zur Geschichte der Fleischvergiftungen".

j. M. MEYERHOF, „Ueber einige biologische und tierpathogene Eigenschaften des Bacillus proteus (HAUSER)".

k. M. MEYERHOF, „Zur Morphologie des Diphterie bacillus".

Op voorstel van den Voorzitter wordt besloten de eerstvolgende vergadering te houden op Zaterdag 22 April 1899.

Na resumtie van het behandelde wordt de vergadering gesloten.

(6 April 1899.)

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 22 April 1899.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

De Heer MOLL heeft bericht gezonden dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d. d. 13 April 1899 bericht gevende van de bekrachtiging door H.M. de Koningin van de benoeming van den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN tot Voorzitter en van den Heer B. J. STOKVIS tot Onder-Voorzitter.

2°. Uitnoodiging van de Académie impériale des Sciences te St. Petersburg tot bijwoning van den 50sten jaardag der stichting van het Observatoire physique Central. Deze uitnoodiging is met een brief van gelukwensch beantwoord.

3°. Circulaire van de Académie royale de Belgique, Classe des Sciences, inhoudende opgaaf van de voor 1900 uitgeschreven prijsvragen.

Verder is ingekomen het bericht van het overlijden van het rustend Lid der Akademie

PETRUS LEONARDUS RIJKE.

Bij dit bericht werd medegedeeld, dat de overledene den wensch had te kennen gegeven, dat van hem geen levensbericht, namens de Akademie zou verschijnen.

Naar aanleiding hiervan zegt de Voorzitter het volgende:

Waar wij, bij het bericht van het overlijden van den oudsten onzer rustende leden, zijn wensch vernemen, dat geen levensbericht van hem in de Akademie zal worden medegedeeld, eerbiedigen wij dien wensch ten volle.

Ik zal dan ook niet wijzen op de verdiensten, welke Rijke zich door zijn arbeid op wetenschappelijk gebied heeft verworven, maar wij mogen toch de tijding van zijn dood niet laten voorbijgaan, zonder eene dankbare herinnering aan dien arbeid, en vooral niet zonder een woord van diepgevoelden dank uit naam van zijne talrijke leerlingen, zoowel natuur- als geneeskundigen, voor zijne uitmuntende lessen in de proefondervindelijke natuurkunde, die zooveel tot hunne wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen, en uit naam van een groot deel van het Nederlandsche volk, voor zijn aandeel in de regeling en invoering van het middelbaar onderwijs hier te lande, dat krachtige hulpmiddel voor de verheffing van het wetenschappelijk peil van onze natie. De nagedachtenis aan den edelen man zullen wij vol eerbied bewaren.

De Heer VAN DER WAALS draagt ook namens de Heeren LORENTZ en SCHOUTE het door hen gestelde adres van gelukwensch voor, dat aan Prof. Sir GABRIEL STOKES te Cambridge, bij gelegenheid van zijn 50-jarig professoraat zal worden toegezonden. Dit adres wordt onveranderd goedgekeurd.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM spreekt over: *„Smeltpunten bij stelsels van optische isomeren".*

Ter toetsing van de beschouwingen over smeltpunten bij mengsels van optische isomeren, medegedeeld in het Verslag der Vergadering van 25 Februari 1899, blz. 378, heeft de Heer ADRIANI thans in de eerste plaats een onderzoek ingesteld aan twee voorbeelden waarbij zekerheid bestond dat de inactieve stof een racemische verbinding is.

Het eerste voorbeeld is de wijnsteenzure dimethylester, waarvan de *d*- en *l*-vorm lager smeltpunt hebben dan de racemische ester.

Het tweede voorbeeld vormt de diacetylwijnsteenzure dimethylester, waarvan de *d*- en *l*-vorm hooger smeltpunt hebben dan de racemische ester.

Voorshands zijn nog alleen onderzocht de smeltpunten van mengsels van *d*-ester en racemische ester in alle verhoudingen. Daardoor kon dus slechts de rechter helft van fig. 3 en 4 (zie blz. 378) verkregen worden.

Gevonden werd:

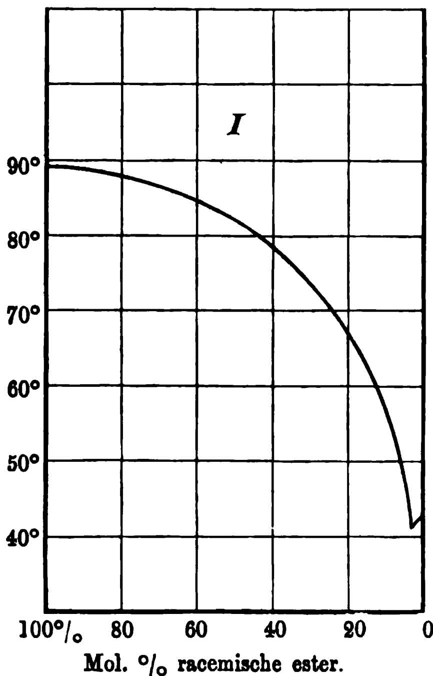
I. *Wijnsteenzure dimethylester.*

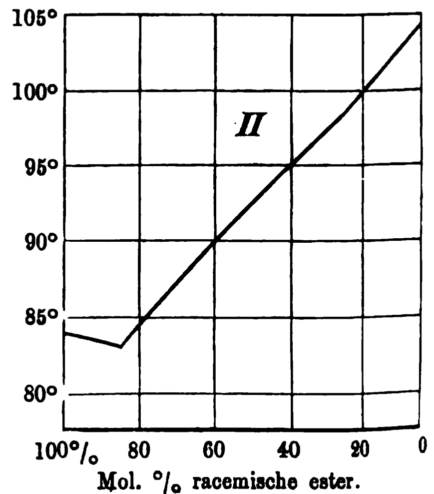
Mol. percent racemische ester in het mengsel.	Eindsmeltpunt.
0	43°3
1.96	41.7
3.02	41.6
4.78	45.0
6.59	50.6
9.17	57.0
20	66.8
40	78.7
50	81.3
60	84.2
70	85.9
80	87.3
90	88.5
100	89.4

II. *Diacetylwijnsteenzure dimethylester.*

Mol. percent racemische ester in het mengsel.	Eindsmeltpunt.
0	104°3
20	99.8
40	95.1
60	90.3
70	87.4
80	84.6
90	83.4
100	83.8

Stelt men de gevonden getallen grafisch voor dan worden de volgende figuren verkregen.





Wat den algemeenen vorm betreft komen zij geheel overeen met de rechterhelften van fig. 3 en 4, blz. 378. In fig. I is evenwel op te merken dat de smeltlijn voor den racemischen ester eene buitengewoon sterke uitgebreidheid verkregen heeft, zoodat zij doorloopt tot de concentratie 3°/₀ vóór zij de smeltlijn van den *d*-ester ontmoet. Dit hangt samen met het vlakke beloop der smeltlijn nabij het smeltpunt van den racemischen ester, hetwelk wijst op eene sterke

mate van dissociatie van dezen ester in de twee actieve komponenten in den gesmolten staat.

In fig. II heeft wegens het lager gelegen smeltpunt juist de smeltlijn van den racemischen ester de kleinste uitgestrektheid (eindpunt bij 86°/₀), doch ook deze heeft in de nabijheid van het smeltpunt een zeer vlakke gedaante.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling n° 48 (vervolg) uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: Dr. E. VAN EVERDINGEN JR., „*De galvanomagnetische en thermomagnetische verschijnselen in bismuth.*" (Vervolg van de tweede mededeeling).

6. In § 6 van mijn eerste mededeeling over bovenstaand onderwerp [1]) merkte ik op, dat in de theorie van RIECKE naar mijn meening ten onrechte de *geheele* warmtegeleiding aan de beweging van geladen deeltjes wordt toegeschreven, en dat men voor de theorie wellicht met voordeel gebruik zou kunnen maken van dergelijke onderstellingen als door mij in de theorie van het verschijnsel van HALL in electrolyten werden ingevoerd [2]). Het is zeker wel opmerkelijk, dat men van alle transversale galvanomagnetische en thermomagnetische verschijnselen tenminste een qualitatieve verklaring kan geven in de onderstelling, dat de warmtestroom in metalen een *zuivere* energiestroom is, *niet* vergezeld van een stroom van ponderabele stof. Immers men behoeft daartoe de zaak slechts op de volgende wijze voor te stellen: —

Bij den *electrischen stroom* bewegen positieve en negatieve geladen deeltjes, die we kortheidshalve ionen zullen noemen, zich met verschillende snelheden, terwijl ook hunne aantallen kunnen verschillen. In het magneetveld veroorzaakt de electromagnetische kracht transversale verplaatsingen en dientengevolge ladingen, die aangroeien totdat de stroomen van positieve en negatieve electriciteit gelijk geworden zijn. Tot dit gelijkworden kunnen medewerken zoowel het ontstaande potentiaalverschil (dat is dus het HALL-*effect*) als diffusiestroomen van de ionen. (Gaan deze gepaard met een merkbaar verschil in aantal ionen per volume-eenheid op verschillende plaatsen, dan zou

[1]) Verslag van de vergadering van 25 Juni 1898, p. 105. Comm. Phys. Lab. Leiden No. 42 p. 18.

[2]) Verslag van de vergadering van 28 Mei 1898, p. 46. Comm. Phys. Lab. Leiden No. 41.

het aan de HALL-electroden waar te nemen potentiaalverschil gewijzigd kunnen worden door een contact-potentiaalverschil). Is de toestand stationair geworden, dan bestaat nog altijd een transversale stroom van ionen, en moeten dus aan den eenen kant vrije ionen gebonden worden, waarbij warmte vrij komt, aan den anderen kant nieuwe ionen vrij worden, wat met warmteverlies gepaard gaat, en ontstaat dus een transversaal temperatuurverschil (*galvanomagnetisch temperatuurverschil*); tevens moet nog een verplaatsing van ongeladen deeltjes tot stand komen.

Den *warmtestroom* heeft men zich, nu daarbij geen verplaatsing van stof mag worden aangenomen, wat het aandeel der vrije ionen betreft zoo te denken, dat wel is waar door een vlak ⊥ de richting van den warmtestroom per tijdseenheid naar beide richtingen evenveel ionen gaan, maar dat deze niet te min gemiddeld bij een verplaatsing in de richting van den warmtestroom een grootere snelheid hebben dan bij een verplaatsing in de omgekeerde richting. De electromagnetische kracht kan dan transversale verplaatsingen veroorzaken, die voor positieve en negatieve ionen tegengestelde richtingen hebben. Op dergelijke wijze als bij den electrischen stroom zal nu in 't algemeen een potentiaalverschil *(transversaal thermomagnetisch effect)* en een temperatuurverschil *(draaiing van isothermen)* ontstaan.

De beantwoording der vraag, in hoeverre deze onderstellingen een quantitatieve verklaring zouden kunnen leveren, moet aan nader onderzoek worden overgelaten.

7. Het is van belang na te gaan, of moleculaire theorieën der thermo-electriciteit het mogelijk maken, alleen met behulp van de hypothese, vermeld in de vorige mededeeling [1]): dat de longitudinale verschijnselen verklaard zouden worden door een verandering van het aantal vrije ionen, door het magneetveld veroorzaakt, — het teeken te bepalen van de verandering in het magneetveld van het thermo-electrisch verschil, bijv. tusschen bismuth en koper. Dit blijkt echter niet het geval te zijn, daar men nog nieuwe onderstellingen moet invoeren. Als voorbeeld kies ik de formule voor de contact-electromotorische kracht, door RIECKE onlangs gepubliceerd [2]), en die we kunnen schrijven in den vorm:

---

1) Verslag van de vergadering van 25 Maart 1899, p. 496. Comm. Phys. Lab. Leiden No. 48 p. 20.

2) Wied. Ann. 66, p. 554, 1898.

$$V_B - V_A = C\left(\log \frac{P_A}{N_A^2} - \log \frac{P_B}{N_B^2}\right)$$

waar de grootheden met A bijv. op koper en die met B op bismuth betrekking hebben, en V den potentiaal, C een positieve temperatuur-functie, P en N aantallen positieve en negatieve ionen per volume-eenheid voorstellen.

De electrische geleidbaarheid van bismuth wordt bij RIECKE voorgesteld [1]) door een formule van den vorm

$$\gamma = P_B\, c_p + N_B\, c_n$$

waarin c_p en c_n weer temperatuurfuncties zijn. In het magneetveld neemt de geleidbaarheid af. De eenvoudigste onderstelling is nu dat P_B en N_B *evenredig* afnemen; iets wat vanzelf het geval zou wezen wanneer $P_B = N_B$ was, zooals in electrolyten.

Onderstellen we verder, wat ook zeer waarschijnlijk is, dat alleen de op bismuth betrekking hebbende grootheden in het magneetveld veranderen, dan blijkt een evenredige vermindering van P_B en N_B te leiden tot een verandering van het verschil $V_B - V_A$ met een negatief bedrag, en dus tot een toename van het thermo-electrische verschil bismuth-koper, dat buiten het magneetveld negatief is.

Onderstelde men daarentegen, dat de verandering van N_B klein is vergeleken bij die van P_B, dan werd de verandering van $V_B - V_A$ positief, en zou het thermo-electrisch verschil bismuth-koper afnemen.

Volgens de waarnemingen komt de verandering van dit thermo-electrisch verschil in het magneetveld overeen met een toename, en zou men dus, op grond van de door mij gevonden evenredigheid van weerstandstoename en longitudinaal effect, aan de eerste onderstelling de voorkeur moeten geven.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: „*Over de afleiding der toestandsvergelijking*" — discussie met Prof. BOLTZMANN.

In den brief van Prof. BOLTZMANN, welke de mededeeling vergezelde, die in het verslag der vorige vergadering is opgenomen, heeft hij den wensch uitgesproken, dat zijn mededeeling tot discussie zou aanleiding geven. Daar de uitkomst omtrent de waarden van de

[1]) l. c. p. 377.

coëfficiënten van $\frac{b}{v}$, $\frac{b^2}{v^2}$ enz., die in de toestandsvergelijking moeten voorkomen, zooals ze door Prof. BOLTZMANN verkregen zijn, verschilt van die, waartoe ik geraakt ben, heb ik die uitnoodiging tot discussie gerekend ook tot mij gericht te zijn. En ofschoon ik in het algemeen er de voorkeur aan zou geven de beslissing tusschen verschillende uitkomsten, welke langs twee verschillende wegen verkregen zijn, over te laten aan de geleidelijke ontwikkeling en verruiming der denkbeelden, welke de loop der tijden medebrengt, wil ik mij niet onttrekken aan de vervulling van zijn wensch, in de hoop dat deze discussie „der Wissenschaft nützlich" zij.

Ik ontveins mij de moeielijkheden aan deze discussie verbonden niet. Prof. BOLTZMANN's „Vorlesungen" vormen een logisch samenhangend geheel, en de verschillende uitkomsten sluiten zoo goed samen, dat men er zeker van zijn kan, dat zij een volkomen juiste oplossing inhouden van het probleem, zooals Prof. BOLTZMANN het zich voorstelt. Daarnaast houd ik er mij van overtuigd, dat ook mijn oplossing, behoudens nog niet opgeloste vragen en enkele ondergeschikte punten, een juiste oplossing geeft van het vraagstuk, zooals ik het mij voorstel. De kwestie nl. of in vergelijking (11) pag. 483 de factor van $2\,Gb$ moet worden $1-\frac{17}{32}\frac{b}{v}+\beta\frac{b^2}{v^2}$ of dat β misschien moet verminderd worden met $\frac{2357}{13440}$, laat ik als minder gewichtig rusten.

Als dan onze uitkomsten zoo verschillend zijn, kan het niet anders of wij moeten ons twee verschillende problemen hebben voorgesteld, en om daaromtrent eenige zekerheid te verkrijgen heb ik een der vergelijkingen van BOLTZMANN van naderbij beschouwd en wel de vergelijking l. c. pag. 169

$$\left(v_g-2\,b+\frac{17}{16}\,\frac{b^2}{v_g}\right)e^{\frac{4\,hma}{v_g}}=\left(v_f-2\,b+\frac{17}{16}\,\frac{b^2}{v_f}\right)e^{\frac{4\,hma}{v_f}}$$

welke vergelijking moet gelden, als twee phasen met elkander in evenwicht zijn.

Het is uit de thermodynamica bekend, dat als twee phasen voor een enkele stof coëxisteeren, behalve p en T, ook de thermodynamische potentiaal gelijk moet zijn. De genoemde vergelijking van

BOLTZMANN moet dus de kinetische vertolking zijn van de thermodynamische betrekking

$$\mu_g = \mu_f$$

of

$$\varepsilon_g - T\eta_g + pv_g = \varepsilon_f - T\eta_f + pv_f \,.$$

Nu heb ik in een mededeeling (Verslag der Vergadering 26 Januari '95, ook opgenomen Arch. Neerl., T. XXX) getiteld „de kinetische beteekenis van de thermodynamische potentiaal" de kinetische vertolking van deze thermodynamische betrekking gegeven. Voor de meer uitvoerige behandeling verwijs ik daarheen. En als ik deze uitkomst vergelijk met de vergelijking van BOLTZMANN voor dat evenwicht blijkt er van een duidelijk verschil in onze opvatting van het probleem. Niet dat onze uitkomsten niet bij eerste benadering aan elkander gelijk zouden zijn. Maar volledig dekken zij elkander niet.

Het verschil bestaat in de eerste plaats in het volgende: Volgens BOLTZMANN moet als arbeid noodig om een molekuul uit de vloeistofphase te verwijderen alleen in aanmerking komen de arbeid noodig om de cohesie te overwinnen, terwijl volgens mijn meening die arbeid verminderd moet worden met wat ik den arbeid van den thermischen druk heb genoemd — en in de tweede plaats vermindert BOLTZMANN het specifiek volume met een bedrag dat tweemaal zoo groot is als het bedrag, waarmede ik meen dat het verminderd moet worden.

Nu kan er m. i., wanneer men aan de molekulen werkelijke afmeting toekent, geen twijfel toegelaten worden of ook de arbeid van den thermischen druk moet in rekening gebracht worden. Verlaat een molekuul een phase, dan wint het niet alleen een hoeveelheid arbeidsvermogen van plaats, dat in aanmerking komt, maar de hoeveelheid, uit het inwendige waarvan het ontsnapt is, is kleiner geworden, de oppervlakte van die hoeveelheid is samengevallen, en een arbeid gelijk aan het product van den thermischen druk en het volume, dat het molekuul in de phase innam, is verricht geworden.

En mocht men daarvan niet à priori overtuigd zijn, dan blijkt dit zoodra men de beteekenis van $\mu = \varepsilon - T\eta + pv$ onderzoekt.

De grootheid, die voor beide phasen gelijk moet zijn, schrijven wij

$$-\eta + \frac{\varepsilon + pv}{T}$$

of volgens de notatie van GIBBS:

$$-\eta+\frac{\chi}{T},$$

waarin χ de functie is welke door GIBBS „heat function for constant pressure" genoemd wordt (Equilibrium of heterogeneous substances, pag. 148).

Om ze naast de vergelijking van BOLTZMANN te kunnen stellen, schrijven wij ze

$$-\eta+\frac{pv-\varepsilon}{T}+\frac{2\,\varepsilon}{T}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(V)$$

Is $\varepsilon=-\frac{a}{v}$, dan is $pv-\varepsilon=v\left(p+\frac{a}{v^2}\right)$.

De grootheid $p+\frac{a}{v^2}$, de som van uitwendigen en molekulairdruk, noemen wij „thermischen druk".

Stellen wij $p+\frac{a}{v^2}=r\,T\,F$, voorloopig in het midden latende, wat de vorm van F is, dan wordt bovenstaande vorm

$$-\eta+r\,F\,v+\frac{2\,\varepsilon}{T}=-\eta+\frac{r\,F\,v\,T+2\,\varepsilon}{T}.$$

Reeds onder dezen vorm zien wij dat de grootheid $r\,F\,T\,v$, wat als arbeid van den thermischen druk, kan beschouwd worden, volkomen op gelijke lijn staat met de grootheid $2\,\varepsilon$.

Nog duidelijker blijkt dit, als men $F=\frac{1}{v-b}$ stelt en voor $r\frac{v}{v-b}T$, in de plaats stelt

$$r\,T+r\,T\frac{b}{v-b}.$$

Wij mogen nl. de grootheid, die voor beide phasen gelijk moet zijn, met een willekeurige constante of temperatuurfunctie verminderen, en schrijven dan

$$-\eta+\frac{r\,T\,F\,b-\frac{2\,a}{v}}{T}$$

Is

$$p+\frac{a}{v^2}=\frac{rT}{v-b}, \quad \text{dan is} \quad \left(\frac{d\eta}{dv}\right)_T=\frac{r}{v-b}$$

en

$$\eta=r\left\{log\,(v-b)+\int\frac{db}{v-b}\right\}$$

en de grootheid, die voor beide phasen gelijk moet zijn, kan geschreven worden in den vorm:

$$log\,(v-b)-\frac{rT\{Fb-\int Fdb\}-\frac{2a}{v}}{rT}\ .$$

In mijn bovengenoemde mededeeling heb ik dezen vorm afgeleid, uitgaande van het denkbeeld, dat er een thermische druk aanwezig is, die het molekuul uitdrijft, welke tegengewerkt wordt door de molekulaire attractie.

Wij kunnen de grootheid, die in beide phasen gelijk zijn moet, ook aldus schrijven:

$$\eta-v\frac{\partial\eta}{\partial v}-\frac{2\varepsilon}{T}\ .$$

Door vergelijking met den vorm van Boltzmann vinden wij, dat deze voor de grootheid

$$\eta-v\frac{\partial\eta}{\partial v}$$

in de plaats stelt $r\,log\{v-2\,b$ enz.$\}+C$.

In geval de vorm onder het teeken log. volkomen nauwkeurig was, zou dus Boltzmann moeten kunnen aantoonen, dat de entropie volkomen nauwkeurig berekend zou moeten kunnen worden uit

$$\eta-v\frac{\partial\eta}{\partial v}=r\,log\,(v-2\,b\ \text{enz.})$$

Approximatief is er gelijkheid, maar het is mij niet kunnen gelukken, aan te toonen dat wat bij Boltzmann entropie is, inderdaad rigoureus aan deze betrekking voldoet.

Deze overwegingen hebben bij mij de vraag doen rijzen of het probleem, waarvan Boltzmann de nauwkeurige oplossing geeft, niet

zou zijn het volgende: Hoe verdeelen zich een groot aantal bewegende *stoffelijke punten*, onderworpen aan een cohesie, die tot een oppervlaktedruk gelijk aan $\frac{a}{v^2}$ voert, als zij elkander niet dichter kunnen naderen dan zekere grootheid (molekuuldiameter). Zijn het *stoffelijke punten* dan vervalt ook de arbeid van den thermischen druk — en zou BOLTZMANN's vergelijking voor coëxisteerende phasen verdedigd kunnen worden. Maar dan is toch niet het eigenlijke probleem, hoe verdeelen zich molekulen met uitgebreidheid opgelost.

Maar dan zou er ook geen aanleiding zijn zich er over te verwonderen, dat niet tot in de uiterste gevolgen overeenstemming verkregen is. Veeleer verwonder ik er mij dan over, dat de overeenstemming nog zoo groot is.

Voor een volledige discussie zou het natuurlijk noodig zijn ook andere vergelijkingen van BOLTZMANN te vergelijken met die, welke ik heb afgeleid. Dan eerst zou het verschil in den grondslag onzer beschouwingen geheel kunnen worden toegelicht. In het bijzonder zou dit gewenscht zijn reeds bij de berekening in eerste benadering van den invloed der molekulaire afmetingen op de grootte van den druk. l. c. pag. 7 enz. Ook daarbij is de uitkomst, waartoe wij geraken, slechts bij eerste benadering gelijk, zonder dat deze uitkomsten elkander geheel dekken.

En de vraag doet zich dan voor of het probleem, dat in BOLTZMANN's Vorlesungen behandeld wordt, nog niet nauwkeuriger, dan hierboven geschiedde, aldus zou kunnen geformuleerd worden: Een groot aantal bewegende stoffelijke punten, bewegen zich in ruimten, die verminderd zijn met achtmaal het molekulairvolume — een opvatting, waarbij de stoffelijke punten bewegen zouden in een ruimte, welke liggen zou buiten de afstandssferen, welke zij zelven vormen.

Het is zeker merkwaardig, dat Prof. BOLTZMANN weet te voorkomen, dat hij op deze wijze een tweemaal te grooten invloed op den druk zou vinden. Door een volkomen vlakken wand te onderstellen en dien wand te bezigen om aan een zijde afstandssferen weg te doen vallen, komt hij bij eerste benadering tot dezelfde uitkomst, waartoe ik van den beginne af aan gekomen was. Maar toch slechts bij eerste benadering.

Dit alles is oorzaak, dat ik aan de eenvoudige rechtstreeksche afleiding van den druk, zooals ik die gegeven heb (Verslag der Vergad. Nov. 1898) de voorkeur blijf geven — al blijven daarbij ook nog vragen over, welker beantwoording ik wel reeds sedert langeren tijd heb beproefd, maar waarvan ik de oplossing nog niet heb kunnen vinden.

De Heer WINKLER biedt de volgende dissertatiën aan voor de Boekerij.

1°. M. H. M. ROEBROECK. Het Ganglion supremum colli nervi sympathici. Utrecht 1895.

2°. P. H. J. BERENDS. Eenige schedelmaten van recruten, moordenaars, paranoïsten, epileptici en imbecillen, onderling vergeleken. Nijmegen 1896.

3°. A. BOSCH. Over Syringomyelie. Utrecht 1896.

4°. H. H. VAN EYK. Partieele epilepsie en hare heelkundige behandeling. Amsterdam 1897.

5°. G. A. M. VAN WAYENBURG. De beteekenis van reflectorische bewegingen voor de zintuigelijke waarneming in verband met de wetten van WEBER en FECHNER. Amsterdam 1897.

6°. H. CHR. FOLMER. Een geval van Spheno-Lordose ten gevolge van kunstmatige schedelmisvorming. 's Gravenhage 1897.

7°. W. G. HUET. De gevolgen der extirpatie van het Ganglion. supremum colli nervi sympathici voor het centrale zenuwstelsel. Amsterdam 1898.

8°. N. VAN DER PLAATS. Vrije Woord-Associatie. Amsterdam 1898.

9°. J. WIARDI BECKMAN. De invloed van de schors der voorhoofdshersenen op de ademhaling. Amsterdam 1899.

Na resumtie van het behandelde wordt de vergadering gesloten.

ERRATA.

p. 299	r.	5	v. b.	staat	26 Januari	moet	zijn	28 Januari.
p. 412	„	17	„	„	mededeeling	„	„	mededinging.
p. 468	„	1	„	„	sto	„	„	stof.
p. 472	„	5	„	„	de laatste vorm	„	„	den laatsten vorm.
p. 476	„	8	„	„	formules	„	„	volumes.

(3 Mei 1899.)

REGISTER.

Boekdrukkerij
DE ROEVER KRÖBER & BAKELS.
AMSTERDAM.